Statistics and Application 统计学与应用, 2017, 6(1), 92-97
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2017.61010

Four Methods for Estimating Unknown Parameters in Panel Model

Wenqian Kang

Institute of Medical Information of Yunnan Province, Kunming Yunnan
Email: kangwenqian90@126.com

Received: Mar. 10th, 2017; accepted: Mar. 26th, 2017; published: Mar. 29th, 2017

Abstract

In this paper, four methods for estimating the unknown parameters in Panel model are discussed, which are least squares estimator, Within estimator, Between estimator and two-stage estimator. This paper shows the corresponding expressions of four estimation methods, and compares the advantage of four methods under certain conditions briefly.

Keywords

Least Squares Estimator, Within Estimator, Between Estimator, Two-Stage Estimator

浅谈Panel模型中未知参数的四种估计方法

康文倩

云南省医学信息研究所，云南 昆明
Email: kangwenqian90@126.com

收稿日期：2017年3月10日；录用日期：2017年3月26日；发布日期：2017年3月29日

摘 要

本文整理了Panel模型中未知参数的四种估计方法，分别是最小二乘估计，Within估计，Between估计和两步估计。给出了四种估计方法对应的表达式，并且简单讨论了一定条件下四种估计的优良性。

关键词

最小二乘估计，Within估计，Between估计，两步估计

文章引用: 康文倩. 浅谈 Panel 模型中未知参数的四种估计方法[J]. 统计学与应用, 2017, 6(1): 92-97.
https://doi.org/10.12677/sa.2017.61010

1. 引言

Panel 模型是一种线性回归模型，也称为平面数据模型。这类模型可用来分析个体间的差异情况，也能用来描述个体的动态变化特征，在计量经济学、市场分析、区域经济研究、机械加工等领域有着广泛的应用。

考虑如下含一个随机效应的 Panel 模型

$$y_{it} = \beta_0 + x_{it1}\beta_1 + \cdots + x_{itk}\beta_k + \mu_i + \varepsilon_{it}, \quad i = 1,2,\cdots,N; t = 1,2,\cdots,T, \tag{1.1}$$

这里 i 为代表个体的下标，t 为代表时间的下标。y_{it} 表示第 i 个个体在时刻 t 的观测值，x_{itj} 表示第 i 个个体上第 j 个自变量在时刻 t 的取值，$\beta_1,\cdots,\beta_k$ 为通常的回归系数，μ_i 为第 i 个个体的效应。假如这 N 个个体是从足够大的总体中随机抽取的，那么个体效应是随机的，ε_{it} 为随机误差。一般假设所有的 μ_i 和 ε_{it} 都互不相关，并且 $\varepsilon_{it} \sim N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$，$\mu_i \sim N\left(0,\sigma_\mu^2\right)$。记

$$y = \left(y_{11},\cdots,y_{1T},y_{21},\cdots,y_{2T},\cdots,y_{NT}\right)',$$

$$X = \left(x_{11},\cdots,x_{1T},x_{21},\cdots,x_{2T},\cdots,x_{NT}\right)',$$

$$\beta = \left(\beta_1,\cdots,\beta_k\right)',$$

$$\mu = \left(\mu_1,\cdots,\mu_N\right)',$$

$$\varepsilon = \left(\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1T},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2T},\cdots,\varepsilon_{NT}\right)',$$

其中 $x_{it} = \left(x_{it1},\cdots,x_{itk}\right)'$，于是模型(1.1)可以写成矩阵形式

$$y = 1_{NT}\beta_0 + X\beta + u, \tag{1.2}$$

其中 $u = \left(I_N \otimes 1_T\right)\mu + \varepsilon$，$1_{NT}, 1_T$ 分别表示分量全为 1 的 NT 维，T 维列向量，符号“$\otimes$”表示 Kronecker 乘积。

$$\Sigma = \mathrm{Cov}\left(u\right) = \sigma_1^2 P_1 + \sigma_\varepsilon^2 Q + \sigma_1^2 J_{NT},$$

其中 $\sigma_1^2 = T\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2$，$P_1 = P - J_{NT}$，$P = I_N \otimes J_T$，$Q = I_{NT} - P$，$J_T = 1_T 1_T'/T$。

矩阵 P，Q，P_1 和 J_{NT} 有如下重要性质。

引理 1.1 [1] 1) P，Q，P_1 和 J_{NT} 都是对称幂等阵，它们的秩分别是 N，$N\left(T-1\right)$，$N-1$ 和 1。

2) P_1，Q 和 J_{NT} 两两正交，即 $P_1Q = 0$，$P_1J_{NT} = 0$，$QJ_{NT} = 0$。

3) $PQ = 0$，$PJ_{NT} = J_{NT}$，$PP_1 = P_1P = P_1$。

引理可利用王松桂[1]等中相关结论加以证明。

2. 四种估计方法

在 Panel 模型中，我们总假设 $X'P_1X$ 和 $X'QX$ 是可逆的，$rk\left(X\right) = k$。实际中的一般问题，这些条件往往是满足的。下面讨论未知参数向量 β 的几种估计。

如果σ_μ^2和σ_ε^2已知，则β的最佳线性无偏估计(BLU)为

$$\beta^*\left(\sigma^2\right)=\left(\frac{X'P_1X}{\sigma_1^2}+\frac{X'QX}{\sigma_\varepsilon^2}\right)^{-1}\left(\frac{X'P_1y}{\sigma_1^2}+\frac{X'Qy}{\sigma_\varepsilon^2}\right) \tag{1.3}$$

记$\sigma^2=\left(\sigma_1^2,\sigma_\varepsilon^2\right)$，它的协方差阵为

$$\mathrm{Cov}\left(\beta^*\left(\sigma^2\right)\right)=\left(\frac{X'P_1X}{\sigma_1^2}+\frac{X'QX}{\sigma_\varepsilon^2}\right)^{-1}$$

然而在实际应用中，由于σ_1^2和σ_ε^2都是未知的，因此并不能实际应用。于是，我们寻求一些其它的估计方法。

2.1. 最小二乘估计

在(1.3)中令$\sigma_1^2=\sigma_\varepsilon^2$，即$\sigma_\mu^2=0$时，可以得到$\beta$的最小二乘(LS)估计

$$\hat{\beta}=\left(X'P_1X+X'QX\right)^{-1}\left(X'P_1y+X'Qy\right)$$

2.2. Between 估计

对模型(1.2)分别左乘P_1和Q，得到

$$y_1=X_1\beta+u_1 \tag{1.4}$$

$$y_2=X_2\beta+u_2 \tag{1.5}$$

这里$y_1=P_1y$，$y_2=Qy$，$X_1=P_1X$，$X_2=QX$，$u_1=P_1u$，$u_2=Qu$。u_1和u_2的均值都为零，它们的协方差阵分别为

$$\Sigma_1=\mathrm{Cov}\left(u_1\right)=\mathrm{Cov}\left(P_1u\right)=P_1\Sigma P_1=\sigma_1^2P_1$$

$$\Sigma_2=\mathrm{Cov}\left(u_2\right)=\mathrm{Cov}\left(Qu\right)=Q\Sigma Q=\sigma_\varepsilon^2Q$$

应用最小二乘统一理论，可以得到线性模型(1.4)中β的最佳线性无偏(BLU)估计，记作$\hat{\beta}_B$

$$\hat{\beta}_B=\left(X'P_1X\right)^{-1}X'P_1y$$

此即β的 Between 估计，其协方差阵为

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_B\right)=\sigma_1^2\left(X_1'X_1\right)^{-1}=\sigma_1^2\left(X'P_1X\right)^{-1}$$

2.3. Within 估计

同样应用最小二乘统一理论，得到线性模型(1.5)中β的最佳线性无偏(BLU)估计，记作$\hat{\beta}_W$，为

$$\hat{\beta}_W=\left(X'QX\right)^{-1}X'Qy$$

称为 Within 估计[2]，其协方差阵为

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_W\right)=\sigma_\varepsilon^2\left(X'QX\right)^{-1}$$

2.4. 两步估计

σ_1^2和σ_ε^2已知时我们已经得到回归系数β的最佳线性无偏估计。由于σ_1^2和σ_ε^2都是未知的，我们可以先找到σ_1^2和σ_ε^2的某种估计，然后再代入(1.3),这样所得的估计称为两步估计。下面先来构造σ_1^2和σ_ε^2的

无偏估计。

2.4.1. 第一步

从模型(1.4)的残差向量 $\hat{u}_1 = P_1\left(y - X\hat{\beta}_B\right)$ 可以构造 σ_1^2 的一个无偏估计 s_1^2

$$s_1^2 = \hat{u}_1 P_1^- \hat{u}_1 / n \tag{1.6}$$

由 $M\left(P_1 X\right) \subset M\left(P_1\right)$，知 s_1^2 与广义逆 P_1^- 的选择无关。而引理 1.1，P_1 是对称幂等阵，因此它是自身的一个广义逆，(1.6)中的 P_1^- 可简单地取为 P_1，得

$$s_1^2 = \hat{u}_1' P_1 \hat{u}_1 / n = \left(y_1 - X_1\hat{\beta}_B\right)' P\left(y_1 - X_1\hat{\beta}_B\right) / n = u_1'\left(I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'\right)u_1 / n \tag{1.7}$$

这里 $n = rk\left(P_1\right) - rk\left(P_1 X\right) = N - k - 1$.易得 $ns_1^2/\sigma_1^2 \sim \chi_n^2$ 。

u_1 是正态分布，协方差阵为 Σ_1，由于

$$\mathrm{Cov}\left(X_1'u_1, \left(I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'\right)u_1\right) = X_1'\mathrm{Cov}\left(u\right)\left(I - X_1\left(X_1'X_1\right)X_1'\right) = 0,$$

即 $X_1'u_1$ 和 $\left(I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'\right)u_1$ 相互独立。而 $I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'$ 是对称幂等阵，所以

$$s_1^2 = u_1'\left(I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'\right)\left(I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'\right)u_1 / n$$

是 $\left(I - X_1\left(X_1'X_1\right)^{-1} X_1'\right)u_1$ 的函数，因此 $X_1'u_1 = X_1'P_1 u$ 和 s_1^2 相互独立。

同样地，我们可以从模型(1.5)的残差向量 $\hat{u}_2 = Q\left(y - X\beta_W\right)$ 构造 σ_ε^2 的一个无偏估计

$$s_2^2 = \left(y - X\hat{\beta}_W\right)' Q\left(y - X\hat{\beta}_W\right) / m \tag{1.8}$$

其中 $m = rk\left(Q\right) - rk\left(QX\right) = N\left(T-1\right) - k$ 。$ms_2^2/\sigma_\varepsilon^2 \sim \chi_m^2$ 。并且 s_2^2 和 $X'Qu$ 相互独立。

$u_1 = P_1 u$，$u_2 = Qu$ 都是正态分布，同时 $\mathrm{Cov}\left(u_1, u_2\right) = \mathrm{Cov}\left(P_1 u, Qu\right) = P_1\Sigma Q = 0$，所以 u_1 和 u_2 相互独立。$X_1'u_1$，s_1^2 和 $X_2'u_2$，s_2^2 分别是 u_1，u_2 的函数，因此这两组是随机独立的。又有 $X_1'u_1$，s_1^2 相互独立，$X_2'u_2$，s_2^2 相互独立，所以 $X_1'u_1 = X'P_1 u$，s_1^2，$X_2'u_2 = X'Qu$，s_2^2 是相互独立的。这些结果可以写成下面的引理。

引理 1.2 $X'P_1 u$，$X'Qu$，s_1^2，s_2^2 都相互独立。

2.4.2. 第二步

将模型(1.4)和(1.5)联立，得到新的模型

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_3 = \mathrm{Cov}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 Q \end{pmatrix}$$

对 β 的估计来说，这个模型和模型(1.2)等价。模型(1.2)中 β 的最佳线性无偏估计为

$$\hat{\beta}\left(\sigma^2\right) = \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}' \Sigma_3^- \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}' \Sigma_3^- \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

注意到 $M=\begin{pmatrix} P_1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & Q/\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$ 是 Σ_3 的一个广义逆，用 M 替换(1.9)中的 Σ_3^-，即可得到(1.3)式。利用 u_1 和 u_2 的独立性可以把 BLU 估计 $\beta^*\left(\sigma^2\right)$ 表示为 $\hat{\beta}_B$ 和 $\hat{\beta}_W$ 的以矩阵为权的凸组合形式

$$\beta^*\left(\sigma^2\right)=W_1\left(\sigma^2\right)\hat{\beta}_B+W_2\left(\sigma^2\right)\hat{\beta}_W,$$

这里权矩阵

$$W_1\left(\sigma^2\right)=\left(\frac{B}{\sigma_1^2}+\frac{W}{\sigma_\varepsilon^2}\right)^{-1}\frac{X'P_1X}{\sigma_1^2},$$

$$W_2\left(\sigma^2\right)=\left(\frac{B}{\sigma_1^2}+\frac{W}{\sigma_\varepsilon^2}\right)^{-1}\frac{X'QX}{\sigma_\varepsilon^2}$$

$$B=X'P_1X\ ,\quad W=X'QX\ .$$

实际中，σ_1^2 和 σ_ε^2 都未知，我们用它们的估计 s_1^2 和 s_2^2 来代替。于是产生了 β 的一种两步估计

$$\hat{\beta}\left(s^2\right)=\left(\frac{X'P_1X}{s_1^2}+\frac{X'QX}{s_2^2}\right)^{-1}\left(\frac{X'P_1y}{s_1^1}+\frac{X'Qy}{s_2^2}\right)$$

这里 $s^2=\left(s_1^2,s_2^2\right)'$。显然

$$\hat{\beta}\left(s^2\right)=W_1\left(s^2\right)\hat{\beta}_B+W_2\left(s^2\right)\hat{\beta}_W$$

可证得两步估计 $\hat{\beta}\left(s^2\right)$ 是 β 的无偏估计[3]，因为

$$\hat{\beta}\left(s^2\right)-\beta=\left(\frac{B}{s_1^2}+\frac{W}{s_2^2}\right)^{-1}\left(\frac{X'P_1u}{s_1^2}+\frac{X'Qu}{s_2^2}\right)$$

利用引理 1.2 可得

$$E\left(\hat{\beta}\left(s^2\right)-\beta\right)=E\left(E\left(\hat{\beta}\left(s^2\right)-\beta\left|s_1^2,s_2^2\right.\right)\right)=0$$

因此，$\hat{\beta}\left(s^2\right)$ 是 β 的无偏估计。

两步估计的协方差阵形式比较复杂，其证明过程也很繁琐，这里就不加讨论了。

3. 四种估计的比较

第一部分分别给出了 Panel 模型中回归系数的四种估计方法及其表达式，下面简要介绍一定条件下四种估计方法的优良性。

3.1. Pitman 准则下估计的比较

Pitman 于 1937 年提出的比较参数估计的准则被称为 Pitman 准则[4]。著名统计学家 Rao [5] [6]曾指出常用的均方误差准则的明显缺陷之一是过分强调以较小概率出现的那些大偏差，并且认为 Pitman 准则克服了这一明显缺陷，是评价估计优劣的更为本质的度量，之后 Pitman 受到了统计学家的广泛关注。下面首先给出其具体定义。

定义 2.1 设 θ 为未知参数向量，$L(*,\theta)$ 为损失函数，$\hat{\theta}_i$，$i=1,2$ 为 θ 的两个估计，称

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)=P\left[L\left(\hat{\theta}_1,\theta\right)\le L\left(\hat{\theta}_2,\theta\right)\right] \tag{2.1}$$

为 $\hat{\theta}_1$ 关于 $\hat{\theta}_2$ 的 Pitman 度量。参数 θ 所有可能取值组成的集合称为参数空间 Θ，若对一切 $\theta\in\Theta$，总有

$$P_\theta\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)\geq\frac{1}{2}$$

成立，且至少对一个$\theta\in\Theta$不等号成立，则称在 Pitman 意义下，$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更接近于θ，或称在 Pitman 意义下，$\hat{\theta}_1$优于$\hat{\theta}_2$。这里取二次损失函数$L\left(\hat{\theta},\theta\right)=\left(\hat{\theta}-\theta\right)'D\left(\hat{\theta}-\theta\right)$。有如下结论：

1) 当$\sigma_1^2<2\sigma_\varepsilon^2$，在 Pitman 准则下 LS 估计优于 Within 估计，这里损失函数$L\left(\hat{\theta},\theta\right)$中的$D$取$D=\left(B+W\right)B^{-1}\left(B+W\right)$

2) 在 Pitman 准则下 LS 估计优于 Between 估计，这里损失函数$L\left(\hat{\theta},\theta\right)$中的$D$取为$D=\left(B+W\right)W^{-1}\left(B+W\right)$。

3.2. 广义均方误差意义下两步估计的优良性

定义 2.2 设参数向量θ的一个估计为$\hat{\theta}$，则$\hat{\theta}$的广义均方误差(GMSE)定义为

$$\mathrm{GMSE}\left(\hat{\theta}\right)=E\left\|\hat{\theta}-\theta\right\|_D^2=E\left(\hat{\theta}-\theta\right)'D\left(\hat{\theta}-\theta\right)$$

本节取$D=\left(B+\frac{s_1^2}{s_2^2}W\right)^2$

记$\rho=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_\varepsilon^2},z=\frac{s_1^2}{s_2^2\rho}$，易见$z\sim F_{n,m}$。有如下结论：

1) 当$m>\frac{8n}{n-2}$时，在广义均方误差意义下两步估计优于 Between 估计。

2) 若$n>4,m>4$则两步估计$\hat{\beta}\left(s^2\right)$优于$\hat{\beta}_W$的充分条件是

$$m-\frac{2m\left(n+m-2\right)}{n\left(m-4\right)}\geq 4,$$

$\hat{\beta}\left(s^2\right)$优于$\hat{\beta}_B$的充分条件是

$$n-\frac{2n\left(n+m-2\right)}{m\left(n-4\right)}\geq 4，\text{这里 } n=N\left(T-1\right)-k,m=N-k-1$$

我们可以认为，当N,T较大时，两步估计要优于 Within 估计和 Between 估计。

参考文献 (References)

[1] 王松桂, 史建红, 尹素菊, 吴密霞. 线性模型引论[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[2] 王松桂, 范永辉. Panel 模型中两步估计的优良性[J]. 应用概率统计, 1998, 14(2): 177-184.

[3] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[4] Pitman, E. (1937) The Closest Estimates of Statistical Parameters. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **33**, 212-222. https://doi.org/10.1017/S0305004100019563

[5] Rao, C.R. (1981) Some Comments the Minimum Mean Square as Criterion of Estimation. Statistics and Related Topics, North Holland, Amsterdam, 123-143.

[6] Rao, C.R., Keating, J.P. and Mason, R.L. (1986) The Pitman Nearness Criterion and Determination. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **15**, 3173-3191. https://doi.org/10.1080/03610928608829302

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：sa@hanspub.org