Statistics and Application 统计学与应用, **2017, 6(3), 361-366**
Published Online August 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2017.63040

Parameter Estimation of Weibull Distribution with Binary Data of the Step-Stress Accelerated Life Testing

Hongkai Zhao

College of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin Heilongjiang
Email: 1163735976@qq.com

Received: Aug. 6th, 2017; accepted: Aug. 20th, 2017; published: Aug. 25th, 2017

Abstract

For the product with the double-parameter Weibull distribution, the distribution of the "life" of the product based on the step-stress accelerated life testing is obtained. Then I use the maximum likelihood estimation to give the likelihood equations of the parameters based on the binary data. And the algorithm of transcendental equations is given by the multivariate dichotomy, and the parameter estimation of the life distribution under the normal stress is obtained by the acceleration equation.

Keywords

Weibull Distribution, Step-Stress Accelerated Life Testing, Binary Data, Maximum Likelihood Estimation, Transcendental Equation, Dichotomy

基于成败型数据步加试验的Weibull分布的参数估计

赵竑愷

哈尔滨理工大学理学院，黑龙江 哈尔滨
Email: 1163735976@qq.com

收稿日期：2017年8月6日；录用日期：2017年8月20日；发布日期：2017年8月25日

摘 要

在步加应力寿命试验下，对寿命服从双参数Weibull分布的产品，通过引入该产品在此步加试验下，其

文章引用: 赵竑愷. 基于成败型数据步加试验的 Weibull 分布的参数估计[J]. 统计学与应用, 2017, 6(3): 361-366.
DOI: 10.12677/sa.2017.63040

“寿命”的分布函数，用极大似然估计法，基于成败型数据得到了有关参数的似然方程组，并用多元二分法给出该超越方程组的求解算法，从而通过加速方程求得正常应力水平下寿命分布的参数估计。

关键词

Weibull分布，步加试验，成败型数据，极大似然估计，超越方程组，二分法

1. 引言

加速寿命试验已经广泛应用于高可靠度、长寿命的产品可靠性研究[1]。由于步加试验要比恒加试验更能缩短试验时间、减少试验的样品量，因而更加实用、有效。但步加应力寿命试验在具体实施过程中，往往会遇到下面两个问题：一是在试验过程中定时去观察样品，此时被观察样品只有两种状态：已经失效或者还未失效，即我们无法知道样品的确切失效时间，这就是所谓的成败型数据[2]。何幼桦[2]对服从指数分布的产品在步加应力寿命试验下的成败型数据的参数给出了估计；田霆等[3]对 Weibull 分布定数截尾步加试验缺失数据场合下，给出当形状参数已知时的特征寿命的估计。但未见到有文献给出有关 Weibull 分布下步加试验的成败型数据的参数估计。二是极大似然估计是统计学中重要的参数估计方法，尤其在处理不完全寿命的情况时，极大似然估计具有明显的优势，但经常遇见的情况是只能够列出参数估计所满足的方程组，不仅没有解析解，就算计算出数值解也是不容易的[4]。例如三参数 Weibull 分布的参数估计，Qiao 利用 Newton-Rphson 方法逐步求解参数的估计值[5]；Gove 采用非线性最优化方法求解[6]；曲延碌等提出了降阶法解似然方程组[7]；杨存谋利用降阶思想，两次利用二分法解出参数[8]。最后，戴家佳等给出了多元非线性方程组的极大似然估计算法[4]。

由此可见，给出步加试验下，基于成败型数据的 Weibull 分布参数估计的方法及算法程序，既有理论意义也有重要的应用价值。

2. 成败型数据步加试验模型

1) 设 S 是对某产品所选的加速应力，在正常应力水平 S_0 和一组加速应力水平 $S_1 < S_2 < \cdots < S_k$ 下，共有 n 个产品在加速应力水平 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 下顺序进行步加寿命试验。

2) 实验数据为成败型数据，已知其应力水平转换时间分别为 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k$。在每个应力水平的持续时间 $(\tau_{i-1}, \tau_i]$ 内，只能观测到产品的失效数 r_i，其中 $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_k \le n$，而不知 r_i 个产品的失效时间。

3) 在正常应力水平 S_0 和加速应力水平 $S_1 < S_2 < \cdots < S_k$ 下产品的寿命分布都服从韦布尔分布 Wei(m_i, η_i)，其中 $m_i > 0$ 称为形状参数，$\eta_i > 0$ 称为特征寿命，$i = 0, 1, \cdots, k$。由于在 S_0 和 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 下产品的失效机理不变[8]，且形状参数 m 的变化反映了产品失效机理的变化，故有

$$m_0 = m_1 = \cdots = m_k = m$$

则其分布函数是

$$F_i(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta_i}\right)^m\right\}, t > 0, i = 0, 1, \cdots, k.$$

4) 产品的特征寿命 η_i 与所施加速应力水平 S_i 之间满足加速模型[1]

$$\ln\eta_i = a + b\varphi(S_i), i = 0,1,\cdots,k,$$

其中 a 与 b 是待估参数，$\varphi(S)$ 是 S 的已知函数。

在上面模型中，假设产品的寿命与已累积失效部分和当时应力水平有关，而与累积方式无关。即产品在应力水平 S_i 下工作 τ_i 时间的累积失效概率 $F_i(\tau_i)$ 等于此产品在应力水平 S_j 下工作 τ_j 的累积失效概率 $F_j(\tau_j)$，有

$$F_i(\tau_i) = F_j(\tau_j), i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,k.$$

由 Weibull 分布函数得

$$1-\exp\left\{-\left(\frac{\tau_i}{\eta_i}\right)^{m_i}\right\} = 1-\exp\left\{-\left(\frac{\tau_j}{\eta_j}\right)^{m_i}\right\}$$

由加速方程，得

$$\tau_j = \frac{\eta_j}{\eta_i}\tau_i = \tau_i e^{b\left[\varphi(S_j)-\varphi(S_i)\right]}$$

设参加此步加试验产品的“寿命”记为 T，那么 T 的分布函数记为 $F_T(t)$，可求得

$$\begin{cases} F_T(t) = 1-\exp\left\{-\left(\dfrac{t}{\eta_1}\right)^m\right\}, & 0 < t \le \tau_1 \\ F_T(t) = 1-\exp\left\{-\dfrac{1}{\eta_1{}^m}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\eta_1}{\eta_j}\tau_j + \frac{\eta_1}{\eta_i}\left(t-\sum_{j=1}^{i-1}\tau_j\right)\right)^m\right\}, & \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\tau_j < t \le \sum_{j=1}^{i}\tau_j, i = 2,\cdots,k \end{cases}$$

3. 成败型步加试验数据的极大似然估计

在 k 个应力水平的测试时间内的失效数 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 和尚未失效数 $n-R$ 的联合分布是多项式分布 $M(n, P_1, P_2, \cdots, P_k, P_{k+1})$：

$$\begin{aligned} P_i &= P\left\{\sum_{j=1}^{i-1}\tau_j < t \le \sum_{j=1}^{i}\tau_j\right\} = F_T\left(\sum_{j=1}^{i}\tau_j\right) - F_T\left(\sum_{j=1}^{i-1}\tau_j\right) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{\eta_1^m}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\eta_1}{\eta_j}\tau_j\right)^m\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{\eta_1^m}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{\eta_1}{\eta_j}\tau_j\right)^m\right\} \\ &= \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\tau_j}{\eta_1}e^{b\left[\varphi(S_1)-\varphi(S_j)\right]}\right)^m\right\} - \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{\tau_j}{\eta_1}e^{b\left[\varphi(S_1)-\varphi(S_j)\right]}\right)^m\right\}, i = 1,2,\cdots,k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P\left\{t > \sum_{j=1}^{k}\tau_j\right\} = 1 - F_T\left(\sum_{j=1}^{k}\tau_j\right) = \exp\left\{-\frac{1}{\eta_1{}^m}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_1}{\eta_j}\tau_j\right)^m\right\} \\ &= \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\tau_j}{\eta_1}e^{b\left[\varphi(S_1)-\varphi(S_j)\right]}\right)^m\right\} \end{aligned}$$

由此可以写出 m, a, b 的似然函数

$$L(m,a,b)=C\cdot P_1^{r_1}\cdot P_2^{r_2}\cdots P_k^{r_k}\cdot P_{k+1}^{n-R}$$
$$=C\cdot\prod_{i=1}^{k}\left\{\exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right)^m\right\}-\exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right)^m\right\}\right\}^{r_i}\cdot\left\{\exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right)^m\right\}\right\}^{n-R}$$

其中 $y_j(b)=\tau_j e^{b\left[\varphi(S_1)-\varphi(S_j)\right]}$，

则有对数似然函数

$$l(m,a,b)=\ln L(m,a,b)$$
$$=\ln C+\sum_{i=1}^{k}r_i\ln\left\{\exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right)^m\right\}\right.$$
$$\left.-\exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right)^m\right\}\right\}-(n-R)\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right)^m$$

由 $\ln\eta_1=a+b\varphi(S_1)$，$\frac{\partial l}{\partial a}=\eta_1$，$\frac{\partial l}{\partial b}=\eta_1\varphi(S_1)$，对 $l(m,a,b)$ 求导得关于 m,a,b 的似然方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial l}{\partial m}=\sum_{i=1}^{k}r_i\left\{\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}-\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\right\}^{-1} \\ \quad\cdot\left\{\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\cdot\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\ln\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]-\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\right. \\ \quad\left.\cdot\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\ln\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]\right\}-(n-R)\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\ln\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]=0 \\ \frac{\partial l}{\partial a}=\sum_{i=1}^{k}r_i\left\{\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}-\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\right\}^{-1} \\ \quad\cdot\left\{\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\cdot m\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m-\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\right. \\ \quad\left.\cdot m\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}+m(n-R)\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m=0 \\ \frac{\partial l}{\partial b}=\sum_{i=1}^{k}r_i\left\{\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}-\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\right\}^{-1} \\ \quad\cdot\left\{\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\cdot m\sum_{j=1}^{i-1}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\left[\varphi(S_1)-\frac{y_j'(b)}{y_j(b)}\right]-\exp\left\{-\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\right\}\right. \\ \quad\left.\cdot m\sum_{j=1}^{i}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\left[\varphi(S_1)-\frac{y_j'(b)}{y_j(b)}\right]\right\}+m(n-R)\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{y_j(b)}{\eta_1}\right]^m\left[\varphi(S_1)-\frac{y_j'(b)}{y_j(b)}\right]=0\end{cases}$$

其中，$y_j'(b)$ 为 $y_j(b)$ 关于 b 导数，$y_j'(b)=\tau_j\left[\varphi(S_1)-\varphi(S_j)\right]\mathrm{e}^{b\left[\varphi(S_1)-\varphi(S_j)\right]}$。

此方程组为超越方程组，用数值方法可解得 m,a,b 的极大似然估计值 $\hat{m},\hat{a},\hat{b}$。

则正常应力水平 S_0 下，η_0 的估计可由加速方程获得

$$\hat{\eta}_0=\exp\left\{\hat{a}+\hat{b}\varphi(S_0)\right\}$$

4. 二分法求极大似然估计值

设一个三元超越方程组可以写为

$$\begin{cases} g_1(m,a,b)=0 & (1) \\ g_2(m,a,b)=0 & (2) \\ g_3(m,a,b)=0 & (3) \end{cases}$$

取定 m_0 为变量 m 的初值，将 m_0 分别带入方程(1) (2)，有

$$g_1(m_0,a,b)=0 \tag{4}$$

$$g_2(m_0,a,b)=0 \tag{5}$$

则算法如下：

1) 设定 m 的取值范围 (m_0,m_1)，对于产品寿命问题一般有 $1<m<10$，因此取 $m_0=1$，$m_1=10$；

2) 对于给定的初值 m_0 和 m_1，迭代分别求出对应 m_0 和 m_1 的(4)、(5)两个方程的解 $a_0(m_0)$、$b_0(m_0)$ 和 $a_1(m_1)$、$b_1(m_1)$；

3) 由方程(3)，有 $g_3(m_0)=g_3\left(m_0,a_0(m_0),b_0(m_0)\right)$ 和 $g_3(m_1)=g_3\left(m,a_1(m_1),b_1(m_1)\right)$，判断 $g_3(m_0)$ 和 $g_3(m_1)$ 是否异号，若异号，继续步骤(4)，否则，重新选取初值计算；

4) 令 $m_2=\dfrac{m_0+m_1}{2}$，求出对应 m_2 的 $g_3(m_2)$；

5) 若 $g_3(m_0)g_3(m_2)<0$，则 $m_1=m_2$，否则，$m_0=m_2$；

6) 若 $m_1-m_0<\varepsilon$，停止计算，否则，转步骤(4)。

$m_2,a_2(m_2),b_2(m_2)$ 就是所求方程组的解。

5. 结论

本文解决了由于实验条件限制，只能在试验中知道失效数目而不知失效的具体时间的成败型数据，在步加应力加速寿命试验下，Weibull 分布参数的估计问题，给出了参数的估计方法和算法实现，对于此种实际问题可以直接应用，非常方便。

致　谢

本论文的工作是在我的老师张国志教授的悉心指导下完成的，在此向老师表示衷心的谢意。

参考文献 (References)

[1] 茆诗松，汤银才，王玲玲. 可靠性统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 295-340.

[2] 何幼桦. 步进应力加速寿命试验中成败型数据的 Bayes 统计分析[J]. 上海大学学报, 1999, 5(4): 287-290.

[3] 田霆，刘次华. 定数截尾步加寿命试验缺失数据下 Weibull 分布的正常应力水平下特征寿命的近似 Bayes 估计[J]. 应用数学, 2015, 28(4): 777-781.

[4] 戴家佳，杨爱军，杨振海. 极大似然估计算法研究[J]. 高校应用数学学报, 2009, 24(3): 275-280.

[5] Qiao, H.Z. and Tsokos, C.P. (1995) Estimation of the Three Parameter Weibull Probability Distribution. *Mathematics and Computers in Simulation*, **39**, 173-185. https://doi.org/10.1016/0378-4754(95)95213-5

[6] Gove, J.H. and Fairweather, S.E. (1989) Maximum-Likelihood Estimation of Weibull Function Parameters Using a General Interactive Optimizer and Grouped Data. *Forest Ecology and Management*, **28**, 61-69. https://doi.org/10.1016/0378-1127(89)90074-1

[7] 曲延碌, 张程道, 阎书源. 三参数 Weibull 分布的参数估计[J]. 气象学报, 1987, 45(3): 374-375.

[8] 杨谋存，聂宏. 三参数 Weibull 分布参数的极大似然估计数值解法[J]. 南京航空航天大学学报，2007，39(1): 22-25.