

# The Establishment of Mathematical Model of “Subsistence Allowance Standard”

Yuan Xi, Daihui Yu, Huiting Guo

Jilin University, Changchun Jilin  
Email: xiyuan1016@mails.jlu.edu.cn

Received: Mar. 25<sup>th</sup>, 2019; accepted: Apr. 9<sup>th</sup>, 2019; published: Apr. 16<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

In order to establish the mathematical model of the standard, we put forward the following four questions. Question 1: Select the main index to calculate the “subsistence allowance standard”. Question 2: For a certain region, according to the data obtained, the “subsistence allowance standard” of the region is given. Question 3: Analyze the correlation between the existing “subsistence allowance standards” in different regions (provinces, counties and cities). Question 4: Using the result of question 3, this paper gives a multivariate mathematical model and verifies the adaptability of the model.

## Keywords

Uniform Matrix Method, Component Analysis, Regression Analysis, Clustering Analysis

---

## “低保标准”的数学模型建立

奚 源, 于岱卉, 郭慧婷

吉林大学, 吉林 长春  
Email: xiyuan1016@mails.jlu.edu.cn

收稿日期: 2019年3月25日; 录用日期: 2019年4月9日; 发布日期: 2019年4月16日

---

## 摘 要

为建立低保标准的数学模型, 我们提出了以下四个问题: 问题一: 挑选主要的计算“低保标准”的指标。问题二: 就某一地区, 根据获得的数据, 给出该地区的“低保标准”。问题三: 分析现行的各地(省、或县市)之间“低保标准”的相关性。问题四: 利用问题三分析的结果, 给出多元数学模型, 并给出模型适应性验证。

## 关键词

一致矩阵法, 成分分析, 回归分析, 聚类分析

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 问题重述

### 1.1. 问题背景

低保是对低收入家庭的一种保障制度, 低保问题事关困难群众衣食冷暖, 事关社会的和谐稳定和公平正义, 是维持困难群众基本生活权益的基础性制度安排。研究制定合理的低保标准制度能更有效地帮助老百姓摆脱贫困, 提高生活质量。

### 1.2. 问题提出

基于找寻的数据, 研究下面四个问题:

- (1) 挑选主要计算“低保标准”的指标;
- (2) 就某一地区, 给出该地区“低保标准”, 并给出模型分析与解释;
- (3) 分析现行各地“低保标准”的相关性;
- (4) 利用(3)分析的结果, 给出多元数学模型, 并给出模型适应性验证。

## 2. 模型假设

- 1) 假设不考虑自然灾害、金融危机等不可抗因素;
- 2) 假设所查阅的数据不存在误差。

## 3. 符号说明

符号意义:

$C_i$ : 低保标准的六个指标;

$y_t$ : 第  $t$  年的年低保标准的实际值;

$\hat{y}_t$ : 第  $t$  年的年低保标准的预测值;

$x_{1t}$ : 第  $t$  年居民人均消费支出;

$x_{2t}$ : 第  $t$  年该地区财政收入;

$\alpha_0$ : 参数;

$\beta_i$ : 参数;

$y$ : 年低保标准的实际值;

$\hat{y}$ : 年低保标准的预测值;

$x_i$ : 影响低保标准的六个变量。

## 4. 模型的建立与求解

### 4.1. 问题一的分析与建模

由于建立低保制度是以地方人民政府为主, 实行属地管理, 低保标准要由县级以上各级政府自行制定和公布执行。因此, 就必须考虑各地的物价情况及政府的财政状况[1]。基于以上考虑, 选择如下的“低保标准”指标: 1) 地区生产总值; 2) 人均消费支出; 3) 一般公共预算社会保障和就业支出; 4) 居民消费价格指数; 5) 商品零售价格指数; 6) 政府财政收入。

我们希望在这六项指标中, 寻找出影响“低保标准”的主要指标和次要指标。

#### 4.1.1. 模型一的建立及求解

由于影响因素较多, 想要通过某种方式计算不同指标的权重, 根据权重选择出主要因素和次要因素。

在确定各因素之间的权重时, 如果只是定性的结果, 常常不为人所接受, 运用 Saaty 等人提出的: 一致矩阵法[2], 其特点是: 不把所有因素放在一起比较, 而是两两相互比较, 并采用相对尺度, 以尽可能减少性质不同的诸因素相互比较的困难, 提高准确度。成对比较矩阵中的  $a_{ij}$  用 Saaty 的 1~9 标度方法给出。

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  依次表示: 地区生产总值、人均消费支出、一般公共预算社会保障和就业支出、居民消费价格指数、商品零售价格指数、政府财政收入。所构造的成对比较矩阵如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/2 & 2 & 2 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 1/3 & 1 & 3 & 3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 1 & 1 & 1/4 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 & 1 & 1 & 1/4 \\ 3 & 1/2 & 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

利用 MATLAB 对模型进行编程和求解, 得到地区生产总值、人均消费支出、一般公共预算社会保障和就业支出、居民消费价格指数、商品零售价格指数、政府财政收入的权重为 0.0906, 0.4060, 0.1519, 0.0552, 0.0552, 0.2412。

成对比较矩阵的一致性指标  $CI = 0.0115$ , 一致性比率  $CR = 0.0092 < 0.1$ 。因此, 此矩阵的一致性可以接受。

由此可见, 人均消费支出、政府财政收入的权重较大, 我们将其选为主要指标。

#### 4.1.2. 模型一的评价与改进

在构造成对比较矩阵是, 标度虽有统一标准, 但标度的选择仍然具有较大的主观性, 而且城市和农村的消费水平、生活方式、生活来源存在较大差异, 该模型并未体现出农村与城市的区别之处, 因此所求出的权重仅能大概反映出指标的重要程度。我们希望能够运用大量的客观数据, 通过一定方式求解出各个指标的权重。

#### 4.1.3. 模型二的建立及求解

我们通过查阅中华人民共和国民政部官网和《中国统计年鉴 2017》[3], 获取了全国 31 个省份(包括直辖市)的农村和城市低保标准及其各项指标, 由于指标个数较多, 且他们之间可能存在着一定的相关关系, 我们通过主成分分析进行降维处理, 选出主要指标的次要指标。我们所整理数据如表 1 至表 6 所示:

我们利用 SPSS 实现了主成分分析, 并获得了如下结果:

**Table 1.** Urban subsistence allowance standards and indicators  
**表 1.** 城市低保标准及各项指标

地区	年低保标准 (元)	地区生产总值 (亿元)	城市居民人均 消费支出(元)	公共预算社会 保障就业支出(亿元)	分地区居民 消费价格指数	商品零售 价格指数	财政收入 (亿元)
北京	9600.0	25,669.1	38,255.5	6406.8	101.4	98.1	5081.3
天津	9135.0	17,885.4	28,344.6	3699.4	102.1	100.5	2723.5
河北	5846.0	32,070.5	19,105.9	6049.5	101.5	101.1	2849.9
山西	5157.1	13,050.4	16,992.8	3428.9	101.1	100.5	1557.0
内蒙古	6379.1	18,128.1	22,744.5	4512.7	101.2	100.6	2016.4
辽宁	6071.6	22,246.9	24,995.9	4577.5	101.5	101.0	2200.5
吉林	5015.9	14,776.8	19,166.4	3586.1	101.5	101.4	1263.8
黑龙江	6251.4	15,386.1	18,145.2	4227.3	101.2	101.1	1148.4
上海	10,290.0	28,178.7	39,856.8	6918.9	103.2	100.8	6406.1
江苏	7116.8	77,388.3	26,432.9	9982.0	102.4	100.7	8121.2
浙江	7942.3	47,251.4	30,067.7	6974.3	102.0	101.0	5302.0
安徽	5759.1	24,407.6	19,606.2	5523.0	101.8	100.9	2672.8
福建	6091.2	28,810.6	25,005.5	4275.4	101.8	100.7	2654.8
江西	5764.9	18,499.0	17,695.6	4617.4	102.0	100.5	2151.5
山东	5796.4	68,024.5	21,495.3	8755.2	102.2	101.4	5860.2
河南	5035.1	40,471.8	18,087.8	7453.7	101.9	100.3	3153.5
湖北	5705.4	32,665.4	20,040.0	6423.0	102.1	100.7	3102.1
湖南	4958.2	31,551.4	21,420.0	6339.2	101.9	101.0	2697.9
广东	6561.7	80,854.9	28,613.3	13,446.1	102.4	100.8	10,390.4
广西	5081.5	18,317.6	17,268.5	4441.7	101.6	100.4	1556.3
海南	5575.4	4053.2	19,015.5	1376.5	102.9	100.8	637.5
重庆	5204.7	17,740.6	21,030.9	4001.8	101.8	101.3	2227.9
四川	4742.5	32,934.5	20,659.8	8008.9	102.0	100.8	3388.9
贵州	5878.5	11,776.7	19,201.7	4262.4	101.5	100.3	1561.3
云南	5058.0	14,788.4	18,622.4	5018.9	101.4	100.6	1812.3
西藏	7705.8	1151.4	19,440.5	1588.0	102.6	102.1	156.0
陕西	5669.7	19,399.6	19,368.9	4389.4	101.3	100.3	1834.0
甘肃	4824.5	7200.4	19,539.2	3150.0	101.2	100.8	787.0
青海	4773.6	2572.5	20,853.2	1524.8	101.8	100.2	238.5
宁夏	4727.2	3168.6	20,364.2	1254.5	101.6	100.7	387.7
新疆	4398.9	9649.7	21,228.5	4138.3	101.4	100.5	1299.0

**Table 2.** Rural subsistence allowance standards and indicators  
**表 2.** 农村低保标准及各项指标

地区	年低保标准 (元)	地区生产总值 (亿元)	农村居民人均 消费支出(元)	公共预算社会 保障就业支出(亿元)	分地区居民 消费价格指数	商品零售 价格指数	财政收入 (元)
北京	9600.0	25,669.1	17,329.0	6406.8			5081.3
天津	8506.1	17,885.4	15,912.1	3699.4			2723.5

## Continued

河北	3223.7	32,070.5	9798.3	6049.5	101.5	101.3	2849.9
山西	2994.6	13,050.4	8028.8	3428.9	101.1	100.4	1557.0
内蒙古	4110.3	18,128.1	11,462.6	4512.7	101.1	100.4	2016.4
辽宁	3708.6	22,246.9	9953.1	4577.5	101.8	100.9	2200.5
吉林	2978.8	14,776.8	9521.4	3586.1	101.9	100.8	1263.8
黑龙江	3644.3	15,386.1	9423.8	4227.3	102.1	101.3	1148.4
上海	10,200.0	28,178.7	17,070.8	6918.9			6406.1
江苏	6204.1	77,388.3	14,428.2	9982.0	101.8	101.3	8121.2
浙江	7017.2	47,251.4	17,358.9	6974.3	101.8	101.0	5302.0
安徽	3571.4	24,407.6	10,287.3	5523.0	101.6	100.8	2672.8
福建	3765.9	28,810.6	12,910.8	4275.4	101.5	101.0	2654.8
江西	3328.6	18,499.0	9128.3	4617.4	101.9	100.8	2151.5
山东	3596.7	68,024.5	9518.9	8755.2	101.8	101.0	5860.2
河南	3015.3	40,471.8	8586.6	7453.7	102.0	100.3	3153.5
湖北	3624.6	32,665.4	10,938.3	6423.0	102.2	100.9	3102.1
湖南	2912.6	31,551.4	10,629.9	6339.2	101.9	101.1	2697.9
广东	4971.6	80,854.9	12,414.8	13,446.1	102.0	101.0	10,390.4
广西	2729.0	18,317.6	8351.2	4441.7	101.7	100.3	1556.3
海南	4146.3	4053.2	8921.2	1376.5	102.5	102.3	637.5
重庆	3125.3	17,740.6	9954.4	4001.8			2227.9
四川	2803.6	32,934.5	10,191.6	8008.9	101.7	100.9	3388.9
贵州	3029.1	11,776.7	7533.3	4262.4	101.1	100.0	1561.3
云南	2518.0	14,788.4	7330.5	5018.9	101.7	101.2	1812.3
西藏	2543.6	1151.4	6070.3	1588.0	102.5	102.2	156.0
陕西	2887.0	19,399.6	8567.7	4389.4	101.2	100.7	1834.0
甘肃	2815.8	7200.4	7487.0	3150.0	101.5	101.0	787.0
青海	2889.2	2572.5	9222.2	1524.8	101.8	101.5	238.5
宁夏	2983.2	3168.6	9138.4	1254.5	101.2	100.0	387.7
新疆	2660.2	9649.7	8277.0	4138.3	101.3	100.5	1299.0

由相关矩阵可以看出，无论是城市还是农村，都提取出了两个主成份，分别是居民人均消费支出和

Table 3. (City) correlation matrix

表 3. (城市)相关矩阵

	年低保标准	地区生产总值	城市居民人均消费支出	公共预算社会保障就业支出	居民消费价格指数	商品零售价格指数	财政收入
年低保标准	1	0.218	0.842	0.228	0.446	-0.232	0.477
地区生产总值	0.218	1	0.351	0.937	0.342	0.046	0.918
城市居民人均消费支出	0.842	0.351	1	0.392	0.392	-0.383	0.634
公共预算社会保障就业支出	0.228	0.937	0.392	1	0.280	-0.066	0.924

## Continued

居民消费价格指数	0.446	0.342	0.392	0.28	1	0.283	0.447
商品零售价格指数	-0.232	0.046	-0.383	-0.066	0.283	1	-0.114
财政收入	0.477	0.918	0.634	0.924	0.447	-0.114	1

Table 4. (City) component matrix

表 4. (城市)成份矩阵<sup>a</sup>

	成份	
	1	2
年低保标准	0.652	-0.608
地区生产总值	0.841	0.465
城市居民人均消费支出	0.764	-0.571
公共预算社会保障就业支出	0.848	0.393
分地区居民消费价格指数	0.556	0.072
商品零售价格指数	-0.153	0.661
财政收入	0.967	0.175

提取方法：主成份。

<sup>a</sup>已提取了 2 个成份。

Table 5. (Rural) correlation matrix

表 5. (农村)相关矩阵

	年低保标准	地区生产总值	城市居民人均 消费支出	公共预算社会 保障就业支出	居民消费 价格指数	商品零售 价格指数	财政收入
年低保标准	1	0.303	0.890	0.501	0.164	0.165	0.683
地区生产总值	0.303	1	0.489	0.650	-0.050	-0.282	0.519
城市居民人均消费支出	0.890	0.489	1	0.535	0.044	0.028	0.656
公共预算社会保障就业支出	0.501	0.650	0.535	1	0.110	-0.093	0.945
居民消费价格指数	0.164	-0.050	0.044	0.110	1	0.732	0.130
商品零售价格指数	0.165	-0.282	-0.028	-0.093	0.732	1	0.007
财政收入	0.683	0.519	0.656	0.945	0.130	0.007	1

Table 6. (Rural) component matrix

表 6. (农村)成份矩阵<sup>a</sup>

	成份	
	1	2
年低保标准	0.821	0.211
地区生产总值	0.681	-0.350
农村居民人均消费支出	0.855	0.035
公共预算社会保障就业支出	0.876	-0.105
分地区居民消费价格指数	0.140	0.877
商品零售价格指数	-0.002	0.942
财政收入	0.924	0.007

提取方法：主成份。

<sup>a</sup>已提取了 2 个成份。

财政收入，和一致矩阵法一致。因此，选定居民人均消费支出和财政收入作为主要的计算“低保标准”的指标。

## 4.2. 问题二的分析与建模

据题目要求，选定吉林省为研究地区，收集了该地区连续 9 年的年平均低保标准[4]，通过研究 2008 年到 2016 年的数据建立数学模型，给出该地区“低保标准”的模型。因问题一的研究确定和“低保标准”影响较大的指标为城市居民人均消费支出和财政收入，所以设定本题研究的两个变量为  $x_{1t}$  居民人均消费支出和  $x_{2t}$  该地区财政收入，由于城市和农村的“低保标准”差异性较大，所以该题依然分开研究。

### 4.2.1. 城市“低保标准”数学模型建立与求解

表 7 的数据是以时间为序的，由于城市居民人均消费支出和该地区的财政收入等变量与时间有一定的联系，同一变量的不同时间的值之间会出现相关性。该题不再采用普通的回归模型，考虑自相关性，建立新的回归模型。

**Table 7.** Urban subsistence allowance standard of Jilin province, per capita consumption expenditure of urban residents and fiscal revenue data of this region

**表 7.** 吉林省城市年低保标准与城市居民人均消费支出及该地区财政收入数据

年份序号	年份	年低保标准/千元	城市居民人均消费支出/千元	财政收入/千亿元
1	2008	1.8002	9.7291	0.4228
2	2009	2.0123	10.9144	0.4871
3	2010	2.5815	11.6791	0.6024
4	2011	2.5627	13.0106	0.8501
5	2012	3.3659	14.6135	1.0143
6	2013	3.7151	15.9407	1.1570
7	2014	4.1459	17.1561	1.2034
8	2015	4.5630	17.9726	1.2294
9	2016	5.0159	19.1664	1.2638

将 2008 年到 2016 年分别编号为 1~9，计该地区第  $t$  年的年低保标准为  $y_t$ ，城市居民人均消费支出为  $x_{1t}$ ，财政收入为  $x_{2t}$ ， $t = 1, 2, \dots, n$ 。

随着城市居民人均消费支出的增加，年低保标准增大，两者存在线性关系，财政收入与年低保标准的关系类似，因此建立多元线性回归模型：

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t \quad (1)$$

根据表 7 的数据，对模型(1)利用 MATLAB 求解，得到的回归系数估计值及其置信区间(置信水平  $\alpha = 0.05$ )、检验统计量  $R^2$ ， $F$ ， $p$ ， $s^2$  的结果见表 8。

代入(1)得到：

**Table 8.** Calculation results of model (1)

**表 8.** 模型(1)的计算结果

参数	参数估计值	参数置信区间
$\beta_0$	-2.1448	[-3.0806, -1.2090]
$\beta_1$	0.4445	[0.2889, 0.6001]
$\beta_2$	-1.0692	[-2.6150, 0.4766]
$R^2 = 0.9895, F = 283.7485, p < 0.0000, s^2 = 0.0181$		

$$\hat{y}_t = -2.1448 + 0.4445x_{1t} - 1.0692x_{2t} \tag{2}$$

残差  $e_t = y_t - \hat{y}_t$  见表 9。

**Table 9.** Residual of model (2)  
**表 9.** 模型(2)的残差  $e_t$

$t$	1	2	3	4	5
$e_t$	-0.8316	-1.2151	-1.1092	-1.9847	-2.0695
$t$	6	7	8	9	
$e_t$	-2.4628	-2.6218	-2.5954	-2.7100	

下面考虑  $\varepsilon_t$  的自相关性，考虑如下模型：

$$y_t = \beta_0 + \beta_1x_{1t} + \beta_2x_{2t} + \varepsilon_t, \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t \tag{3}$$

$\rho$  是自相关系数， $|\rho| \leq 1$ ， $u_t$  相互独立且服从均值为零的正态分布， $t = 1, 2, \dots, n$ 。

下面进行 Durbin-Watson 检验，根据模型(2)得到的残差计算  $DW$  统计量：

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^n e_t^2} \tag{4}$$

化简得：

$$DW = 2 \left( 1 - \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_t^2} \right) \tag{5}$$

而  $\frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_t^2}$  是自相关系数  $\rho$  的估计值  $\hat{\rho}$ ，所以：

$$DW \approx 2(1 - \hat{\rho}) \tag{6}$$

经计算得到  $DW = 0.205$ ，查  $DW$  分布表知检验结果存在自相关，采用模型(3)，计算得：

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2} = 0.8975 \tag{7}$$

做变换：

$$y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}, x_{it}^* = x_{it} - \rho x_{i,t-1}, t = 1, 2 \tag{8}$$

模型(3)化为：

$$y_t^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_{1t}^* + \beta_2^* x_{2t}^* + u_t, \beta_0^* = \beta_0(1 - \rho) \tag{9}$$

比较  $d_u$  和  $d_l$  之后可以认为随机误差存在自相关，将(7)的值代入(8)做变换，得到变换后的  $x_{1t}^*$ ， $x_{2t}^*$ ， $y_t^*$  数据如表 10。

利用表 10 估计模型(9)的参数，得到的结果见表 11。

将模型(9)中的  $x_{1t}^*$ ， $x_{2t}^*$ ， $y_t^*$  还原为原始变量  $x_{1t}$ ， $x_{2t}$ ， $y_t$  得到的结果为：

$$\hat{y}_t = -0.0102 + 0.8975y_{t-1} + 0.3932x_{1t} - 0.3528x_{1,t-1} - 1.5132x_{2t} + 1.3581x_{2,t-1} \tag{10}$$

结果预测与分析，将模型(10)，模型(2)的计算值  $\hat{y}_t$  与实际数据  $y_t$  比较，见表 12，可以发现模型(10)在偏差内更适合求解城市低保标准。

**Table 10.** The data after transformation

**表 10.** 变换后的数据

$t$	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{1t}^*$	2.1850	1.8862	2.5315	2.9397	2.8287	2.8533	2.5793	3.0405
$x_{2t}^*$	0.1077	0.1654	0.3096	0.2515	0.2469	0.1653	0.1496	0.1607
$y_t^*$	0.397092	0.775937	0.246409	1.066503	0.695061	0.812593	0.843085	0.921701

**Table 11.** Parameter estimation of model (9)

**表 11.** 模型(9)的参数估计

参数	参数估计值	参数置信区间
$\beta_0^*$	-0.0102	[-1.7040, 1.6837]
$\beta_1^*$	0.3932	[-0.2786, 1.0649]
$\beta_2^*$	-1.5132	[-5.4969, 2.4705]

$R^2 = 0.3373, F = 1.2727, p < 0.3575, s^2 = 0.0685$

**Table 12.** Calculation values of model (10) and model (2)

**表 12.** 模型(10)、模型(2)的计算值  $\hat{y}_t$

$t$	$y_t$ (实际数据)	$\hat{y}_t$ (模型(2))	$\hat{y}_t$ (模型(10))
1	1.8002	2.6318	
2	2.0123	3.2274	2.3008
3	2.5815	3.6907	2.2864
4	2.5627	4.5473	2.8327
5	3.3659	5.4353	3.0642
6	3.7151	6.1779	3.7482
7	4.1459	6.7677	4.1947
8	4.5630	7.1584	4.4973
9	5.0159	7.7259	5.0361

#### 4.2.2. 农村问题的建模与求解

对于农村问题的研究，初步和城市问题建立相似的模型来研究，农村的变量是否有自相关性由数据来判断。如表 13 是吉林省农村年低保标准与城市居民人均消费支出及该地区财政收入数据[4]：

将 2008 年到 2016 年分别编号为 1~9，记该地区第  $t$  年的年低保标准为  $y_t$ ，城市居民人均消费支出为  $x_{1t}$ ，财政收入为  $x_{2t}$ ， $t = 1, 2, \dots, n (= 20)$ 。

建立多元线性回归模型：

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t \tag{11}$$

根据表 13 的数据，对模型(1)利用 MATLAB 求解，得到的回归系数估计值及其置信区间(置信水平  $\alpha = 0.05$ )、检验统计量  $R^2$ ， $F$ ， $p$ ， $s^2$  的结果见表 14。

将参数估值代入(11)得到：

$$\hat{y}_t = -0.4637 + 0.3667x_{1t} - 0.1466x_{2t} \tag{12}$$

残差  $e_t = y_t - \hat{y}_t$  作为随机误差  $\varepsilon_t$  的估计值，判断  $\varepsilon_t$  的自相关性，模型(12)的残差如表 15。

为研究对  $\varepsilon_t$  的自相关性，考虑如下模型：

**Table 13.** The annual subsistence allowance standard of rural areas in Jilin province, the per capita consumption expenditure of rural residents and the fiscal revenue data of this region

**表 13.** 吉林省农村年低保标准与农村居民人均消费支出及该地区财政收入数据

序号	年份	年份	年低保标准/千元	农村居民人均消费支出/千元	财政收入/千亿元
1		2008	0.5438	3.4432	0.4228
2		2009	0.8133	3.9029	0.4871
3		2010	1.2961	4.1474	0.6024
4		2011	1.4291	5.3058	0.8501
5		2012	1.6655	6.1862	1.0143
6		2013	1.9340	7.3797	1.1570
7		2014	2.2514	8.1398	1.2034
8		2015	2.5403	8.7833	1.2294
9		2016	2.9788	9.5214	1.2638

**Table 14.** Calculation results of model (11)

**表 14.** 模型(11)的计算结果

参数	参数估计值	参数置信区间
$\beta_0$	-0.4637	[-0.9356, 0.0083]
$\beta_1$	0.3667	[0.0827, 0.6506]
$\beta_2$	-0.1466	[-2.0552, 1.7621]

$R^2 = 0.9596, F = 71.2453, p < 0.0001, s^2 = 0.0341$

**Table 15.** Residual of model (12)

**表 15.** 模型(12)的残差  $e_t$

$t$	1	2	3	4	5
$e_t$	-0.1931	-0.0827	0.3273	0.0718	0.0094
$t$	6	7	8	9	
$e_t$	-0.1388	-0.0934	-0.0366	0.1363	

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t, \varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t \quad (13)$$

$\rho$  是自相关系数,  $|\rho| \leq 1$ ,  $u_t$  相互独立且服从均值为零的正态分布,  $t = 1, 2, \dots, n$ 。

下面进行 Durbin-Watson 检验, 根据模型(12)得到的残差计算  $DW$  统计量:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^n e_t^2} \quad (14)$$

化简得:

$$DW = 2 \left( 1 - \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_t^2} \right) \quad (15)$$

而  $\frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_t^2}$  是自相关系数  $\rho$  的估计值  $\hat{\rho}$ , 因此:

$$DW \approx 2(1 - \hat{\rho}) \quad (16)$$

计算得到  $DW = 1.910146$ ，经查  $DW$  分布表知检验结果不存在自相关，即适合农村的低保标准的模型就是简单的线性回归模型(12)。

结果预测与分析，将模型(12)的计算值  $\hat{y}_t$  与实际数据  $y_t$  比较，见表 16，可以发现模型(12)在偏差内比较适合吉林省农村的低保标准。

**Table 16.** Calculated values of model (12)

**表 16.** 模型(12)的计算值  $\hat{y}_t$

$t$	$y_t$ (实际数据)	$\hat{y}_t$ (模型(12))
1	0.5438	0.7369
2	0.8133	0.8961
3	1.2961	0.9688
4	1.4291	1.3573
5	1.6655	1.6561
6	1.9340	2.0728
7	2.2514	2.3447
8	2.5403	2.5769
9	2.9788	2.8425

### 4.3. 问题三的分析与建模

通过第一题的计算，我们筛选出了计算各地“低保标准”的主要指标，第三题我们选择利用聚类分析方法[1]，把低保标准情况相似的情况的省份找出来，使得类别内部省份间差异尽可能的小，类别间的差异尽可能的大，即把 31 个省域归为若干类，从而更好的掌握全国城市低保的差异情况，来更准确地分析各省“低保标准”的相关性。

#### 4.3.1. 问题的建模与求解

比较题目中要求分析现行各地之间的“低保标准”的相关性，我们选择我们首先选择根据只根据低保标准的数目对全国 36 个省份和直辖市进行比较，并用 EXCEL 编程做出相应热图 1，图 2。

由于某些省份的低保标准数目集中，我们指定的区间并不能完全展现出各省的特征，所以选择以“低保标准”、问题一求出的主要指标(“居民人均消费支出”和“公共预算支出”)以及低保标准和两者的比值，把农村和城市作为一项影响因素，重点分析各省域之间的区别，把全国省份之间的差异问题更加突出，运用聚类分析模型，对全国各省份和直辖市进行分类。

我们可以把全国 31 个省域划分为四个大类，见表 17。

按照不同类别，把全国低保标准的热图绘制出来，见图 3。

#### 4.3.2. 结果分析

##### 1) 类别一

类别一所属省市都是经济发达地区。城市低保平均标准和居民消费水平在全国处于领先地位，但低保标准占人均消费水平的百分比农村和城市的差距过大，可见，低保标准制定并未能与所在城市人均可支配收入同步增长，未能充分发挥低保救助工作的作用。

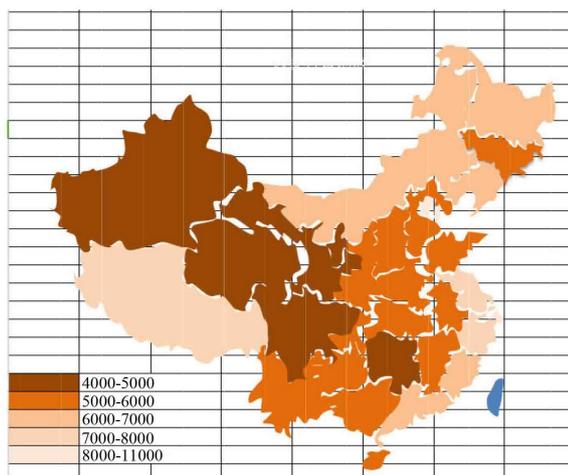


Figure 1. Distribution of national urban subsistence allowance standard  
图 1. 全国城市低保标准分布

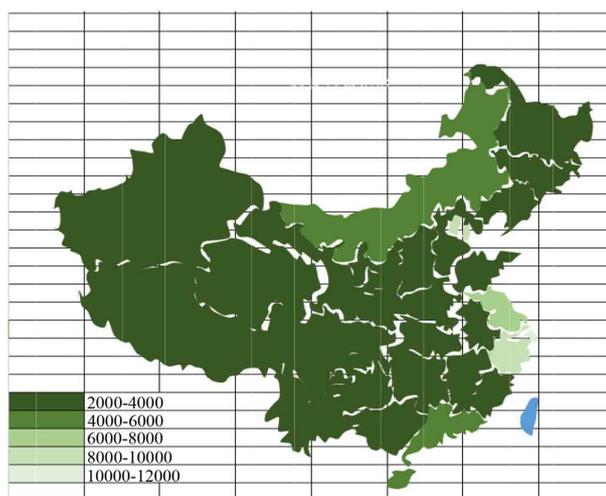


Figure 2. Distribution of national rural subsistence allowance standard  
图 2. 全国农村低保标准热图



Figure 3. Distribution of national subsistence allowance standard  
图 3. 全国低保标准热图

**Table 17.** Classification of the country's 31 provinces  
**表 17.** 全国 31 个省域的分类

类别	地区
类别一	北京、上海、天津
类别二	浙江、广东、江苏
类别三	西藏
类别四	宁夏、湖北、安徽、福建、辽宁、海南、内蒙古、青海、四川、重庆、湖南、河南、新疆、甘肃、吉林、黑龙江、江西、山西、陕西、广西、贵州、云南

## 2) 类别二

此类经济发达地区所属省域城市低保标准基本都与经济富裕程度相符。

## 3) 类别三

西藏地区人均可支配收入属于全国最后梯队，但受中央财政支撑，低保标准实施表现较突出，城市低保平均标准、支出水平相对较高。

## 4) 类别四

第四类地区属于经济不是特别发达的地区，财政收入较少，而贫困人口多，因此低保平均标准较低，对于这样的经济不发达地区，中央财政就是低保制度的主要财政支柱，理应加大对低保工作的支持力度。

### 4.4. 问题四的分析与建模

据题目要求，利用问题的结果建立多元数学模型，使验证其适应性。由问题三可知，不论哪种模型分析的结果都与地理位置有很大的因素，所以本题把增加地理位置作为一个新的变量，增加城市或农村作为一个新的变量，建立一个统一的制定低保标准的回归模型。利用问题三聚类分析的结果作为该题区分地理位置变量的依据。该题选取 2016 年数据进行研究建模，用 2015 年数据对适应性进行验证。

#### 4.4.1. 模型的建立与求解

定义变量， $y$  表示低保标准， $x_1$  表示区域发展情况，因为聚类分布是依据各省的城市和农村的低保标准把全国化为四个类别，所以该题表示属于不同类别的具体指标是由该类别的城市和农村的低保标准求平均来近似。

$$x_1 = \begin{cases} 9.56, & \text{类别一;} \\ 6.64, & \text{类别二;} \\ 5.12, & \text{类别三;} \\ 4.31, & \text{类别四.} \end{cases} \quad x_2 = \begin{cases} 1, & \text{城市;} \\ 0, & \text{农村.} \end{cases} \quad x_4 = \begin{cases} 0, & \text{城市;} \\ 1, & \text{农村.} \end{cases}$$

$x_3$  表示城市居民人均消费， $x_5$  表示农村居民人均消费， $x_6$  表示该地区财政收入。

建立回归模型：

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 x_3 + \alpha_3 x_4 x_5 + \alpha_4 x_6 \quad (17)$$

根据表 18 的数据，对模型(1)直接利用 MATLAB 统计工具箱求解，得到的回归系数估计值及其置信区间(置信水平  $\alpha = 0.05$ )、检验统计量  $R^2$ ， $F$ ， $p$ ， $s^2$  的结果见表 19。

模型(17)的参数估计见表 20。

将数值代入(17)得到：

$$\hat{y} = -0.9474 + 0.6373x_1 + 0.1710x_2x_3 + 0.1994x_4x_5 - 0.0615x_6 \quad (18)$$

结果预测与分析,将模型(17)的2016年计算值 $\hat{y}$ 与实际数据 $y$ 比较,比较数据见表21,可以发现模型(17)在偏差内比较适合各省的低保标准。

**Table 18.** Data of Beijing, Tianjin and Shanghai

**表 18.** 北京、天津、上海各项数据

地区	城市年低保标准/元	农村年低保标准/元	城市低保与消费支出比值	农村低保与消费支出比值
北京	9600	9600.00	0.25	0.55
天津	9135	8506.06	0.32	0.53
上海	10,290	10,200.00	0.25	0.59

**Table 19.** Data of 31 provinces

**表 19.** 全国 31 个省域各项数据

地区	城市年低保标准/ 千元	农村年低保标准/ 千元	城市居民人均消费支出/ 千元	农村居民人均消费支出/ 千元	财政收入/ 千万元
北京	9.6000	9.6000	38.2555	17.3290	5.0813
天津	9.1350	8.5061	28.3446	15.9121	2.7235
上海	10.2900	10.2000	39.8568	17.0708	6.4061
江苏	7.1168	6.2041	26.4329	14.4282	8.1212
浙江	7.9423	7.0172	30.0677	17.3589	5.3020
广东	6.5617	4.9716	28.6133	12.4148	10.3904
西藏	7.7058	2.5436	19.4405	6.0703	0.1560
海南	5.5754	4.1463	19.0155	8.9212	0.6375
内蒙古	6.3791	4.1103	22.7445	11.4626	2.0164
湖北	5.7054	3.6246	20.0400	10.9383	3.1021
宁夏	4.7272	2.9832	20.3642	9.1384	0.3877
山东	5.7964	3.5967	21.4953	9.5189	5.8602
安徽	5.7591	3.5714	19.6062	10.2873	2.6728
福建	6.0912	3.7659	25.0055	12.9108	2.6548
辽宁	6.0716	3.7086	24.9959	9.9531	2.2005
青海	4.7736	2.8892	20.8532	9.2222	0.2385
新疆	4.3989	2.6602	21.2285	8.2770	1.2990
重庆	5.2047	3.1253	21.0309	9.9544	2.2279
河南	5.0351	3.0153	18.0878	8.5866	3.1535
吉林	5.0159	2.9788	19.1664	9.5214	1.2638
四川	4.7425	2.8036	20.6598	10.1916	3.3889
湖南	4.9582	2.9126	21.4200	10.6299	2.6979
甘肃	4.8245	2.8158	19.5392	7.4870	0.7870
黑龙江	6.2514	3.6443	18.1452	9.4238	1.1484
山西	5.1571	2.9946	16.9928	8.0288	1.5570
江西	5.7649	3.3286	17.6956	9.1283	2.1515
河北	5.8460	3.2237	19.1059	9.7983	2.8499
广西	5.0815	2.7290	17.2685	8.3512	1.5563

Continued

贵州	5.8785	3.0291	19.2017	7.5333	1.5613
陕西	5.6697	2.8870	19.3689	8.5677	1.8340
云南	5.0580	2.5180	18.6224	7.3305	1.8123

Table 20. Calculation results of model (17)

表 20. 模型(17)的计算结果

参数	参数估计值	参数置信区间
$\alpha_0$	-0.9474	[-1.7745, -0.1204]
$\alpha_1$	0.6373	[0.4021, 0.8725]
$\alpha_2$	0.1710	[0.1003, 0.2416]
$\alpha_3$	0.1994	[0.0511, 0.3476]
$\alpha_4$	-0.0615	[-0.1731, 0.0500]

$R^2 = 0.8644, F = 90857, p < 0.0000, s^2 = 0.6030$

Table 21. The true, predicted and residual values of the subsistence allowance standard in 2016

表 21. 2016 年低保标准的实际值、预测值和残差

地区	城市低保标准			农村低保标准		
	2016 实际值/千元	2016 预测值/千元	2016 残差	2016 实际值/千元	2016 预测值/千元	2016 残差
北京	9.6000	11.3713	-1.7713	9.6000	8.2850	1.3150
天津	9.1350	9.8246	-0.6896	8.5061	8.1506	0.3555
上海	10.2900	11.5667	-1.2767	10.2000	8.1551	2.0449
江苏	7.1168	7.3020	-0.1853	6.2041	5.6590	0.5451
浙江	7.9423	8.0998	-0.1575	7.0172	6.4196	0.5976
广东	6.5617	7.5381	-0.9764	4.9716	5.1208	-0.1492
西藏	7.7058	5.6333	2.0725	2.5436	3.5194	-0.9758
海南	5.5754	5.0111	0.5642	4.1463	3.5383	0.6079
内蒙古	6.3791	5.5647	0.8144	4.1103	3.9610	0.1493
湖北	5.7054	5.0354	0.6700	3.6246	3.7897	-0.1651
宁夏	4.7272	5.2578	-0.5306	2.9832	3.5977	-0.6146
山东	5.7964	5.1147	0.6817	3.5967	3.3370	0.2597
安徽	5.7591	4.9877	0.7715	3.5714	3.6863	-0.1149
福建	6.0912	5.9120	0.1792	3.7659	4.2105	-0.4446
辽宁	6.0716	5.9383	0.1333	3.7086	3.6487	0.0599
青海	4.7736	5.3506	-0.5770	2.8892	3.6236	-0.7344
新疆	4.3989	5.3496	-0.9507	2.6602	3.3699	-0.7097
重庆	5.2047	5.2586	-0.0540	3.1253	3.6472	-0.5219
河南	5.0351	4.6984	0.3366	3.0153	3.3176	-0.3023
吉林	5.0159	4.9991	0.0168	2.9788	3.6202	-0.6414
四川	4.7425	5.1238	-0.3813	2.8036	3.6231	-0.8195
湖南	4.9582	5.2963	-0.3380	2.9126	3.7531	-0.8405

## Continued

甘肃	4.8245	5.0922	-0.2677	2.8158	3.2439	-0.4281
黑龙江	6.2514	4.8316	1.4198	3.6443	3.6078	0.0365
山西	5.1571	4.6094	0.5477	2.9946	3.3045	-0.3100
江西	5.7649	4.6930	1.0719	3.3286	3.4872	-0.1586
河北	5.8460	4.8912	0.9548	3.2237	3.5779	-0.3542
广西	5.0815	4.6566	0.4249	2.7290	3.3689	-0.6399
贵州	5.8785	4.9868	0.8916	3.0291	3.2055	-0.1764
陕西	5.6697	4.9987	0.6710	2.8870	3.3950	-0.5080
云南	5.0580	4.8723	0.1856	2.5180	3.1496	-0.6316

## 4.4.2. 模型的适应性验证

利用模型(17)分析 2015 年数据, 得到结果如表 22, 发现全国各省的低保标准在一定误差范围内可以使用模型(17)。

**Table 22.** The true, predicted and residual values of the subsistence allowance standard in 2015  
**表 22.** 2015 年低保标准的实际值、预测值和残差

地区	城市低保标准			农村低保标准		
	2015 实际值/千元	2015 预测值/千元	2015 残差	2015 实际值/千元	2015 预测值/千元	2015 残差
北京	8.50875	11.4079	-2.89915	8.48488	7.846756	0.638124
天津	8.265	9.630433	-1.36543	7.11485	7.635913	-0.52106
上海	9.24	11.46297	-2.22297	8.94	7.740618	1.199382
江苏	6.70032	7.550658	-0.85034	6.01967	5.426817	0.592853
浙江	7.25001	8.185354	-0.93534	6.46947	5.83725	0.63222
广东	5.94156	7.674372	-1.73281	4.71015	5.066469	-0.35632
西藏	6.94821	5.229316	1.718894	3.48125	3.136413	0.344837
海南	4.93851	4.953345	-0.01483	4.00029	2.763032	1.237258
内蒙古	6.03495	5.540245	0.494706	4.3925	3.436473	0.956027
湖北	5.23509	4.910417	0.324673	3.57817	3.005786	0.572384
宁夏	4.11366	5.04561	-0.93195	2.91281	2.621421	0.291389
山东	5.55981	5.194363	0.365447	3.76684	2.858051	0.908789
安徽	5.39148	4.746292	0.645189	3.66421	2.626262	1.037948
福建	5.30148	5.821317	-0.51984	3.71098	3.781698	-0.07072
辽宁	5.6883	5.485559	0.202741	3.98685	3.160763	0.826087
青海	4.37778	5.082666	-0.70489	2.90694	3.168348	-0.26141
新疆	4.10247	5.119277	-1.01681	2.65257	3.020362	-0.36779
重庆	4.61328	5.175296	-0.56202	3.21293	3.165046	0.047884
河南	4.18746	4.732748	-0.54529	2.59156	2.707742	-0.11618
吉林	4.56303	4.872678	-0.30965	3.06321	3.139999	-0.07679
四川	4.24164	5.095696	-0.85406	2.78887	3.102529	-0.31366
湖南	4.27827	5.134102	-0.85583	2.87274	3.222903	-0.35016

## Continued

甘肃	4.41681	4.783467	-0.36666	3.00094	2.909387	0.091553
黑龙江	5.73825	4.732372	1.005878	3.90603	3.146883	0.759147
山西	4.83975	4.504344	0.335406	3.19367	2.946964	0.246706
江西	5.41818	4.660501	0.757679	3.57248	2.960715	0.611765
河北	5.24874	4.806672	0.442068	3.26915	3.190449	0.078701
广西	4.3275	4.590288	-0.26279	2.76093	2.784698	-0.02377
贵州	5.15049	4.691691	0.458799	3.11221	2.690905	0.421305
陕西	5.04849	4.95669	0.0918	3.12543	3.04464	0.08079
云南	4.59555	4.821788	-0.22624	2.85295	2.769753	0.083197

## 5. 模型评价

### 优点:

1) 本文建立的模型与实际生活紧密相连,对各省低保标准和主要指标进行建模,其结果与实际相符。对民政部门,统计部门都具有很高的参考价值。

2) 模型建立的模型依据的数据来自《中国统计年鉴》以及中国民政部所给出的数据,使得模型的可信度较高。

3) 模型具有一定创新性和灵活性,对各省的情况都符合。

### 缺点:

1) 对省份的分类不够细致,在实际中应用会有一定误差。

2) 成对比较矩阵,可以实现权重计算,但由于其标度的选择具有较大的主观性,且无法体现出城市与农村“低保”指标的差异性,因此所得出的结果不够具有说服力。

3) 问题二中在针对吉林省研究该地区的低保标准时,由于官网上找不到大量年份的低保标准,所以在研究此问题时的数据量不够大,无法深层次地再研究2016年以前低保标准的适应性。

## 参考文献

- [1] 李春根,夏俊.中国城市最低生活保障标准:变化轨迹与现实考量[J].中国行政管理,2014(354):90-94.
- [2] 姜启源,谢金星,叶俊.数学模型[M].第四版.北京:高等教育出版社,2011:346-352.
- [3] 中华人民共和国国家统计局.中国统计年鉴[R].<http://www.stats.gov.cn/tjsj/ndsj/>,2018-04-29.
- [4] 中华人民共和国民政部.民政数据统计季报[R].<http://www.mca.gov.cn/article/sj/tjtb/qgsj/>,2018-04-29.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2325-2251，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[sa@hanspub.org](mailto:sa@hanspub.org)