Statistics and Application 统计学与应用**, 2019, 8(2), 370-374**
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2019.82041

The Local Asymptotics of the Overshoot of a Delay Random Walk

Tiantian Hu, Zhengmin Ji, Yanzhu Mao, Kaiyong Wang*

School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu
Email: *beewky@vip.163.com

Received: Apr. 4th, 2019; accepted: Apr. 19th, 2019; published: Apr. 26th, 2019

Abstract

This paper investigates a delay random walk. Using the renewal equation and the results of random walk with zero delay, when the distribution of the increment of the random walk has a heavy tail, the paper obtains the local asymptotics of the overshoot of the delay random walk.

Keywords

Random Walk, Delay, Overshoot, Local Asymptotics

延迟随机游动的超出的局部渐近性质

胡甜甜，吉正敏，毛砚竹，王开永*

苏州科技大学数理学院，江苏 苏州
Email: *beewky@vip.163.com

收稿日期：2019年4月4日；录用日期：2019年4月19日；发布日期：2019年4月26日

摘 要

本文讨论带有延迟的随机游动，利用建立的更新方程，借助零延迟的结果，在随机游动增量的分布具有重尾情形下，得到了延迟随机游动超出的局部渐近性质。

关键词

随机游动，延迟，超出，局部渐近性质

*通讯作者。

文章引用: 胡甜甜，吉正敏，毛砚竹，王开永．延迟随机游动的超出的局部渐近性质[J]．统计学与应用，2019，8(2): 370-374. DOI: 10.12677/sa.2019.82041

1. 引言

设 $\{X_i, i \ge 2\}$ 为独立同分布 $(i.i.d)$ 的随机变量具有共同的分布 K 及有限的负均值 $\mu_k = -m$。随机变量 X_1 与 $\{X_i, i \ge 2\}$ 独立且具有分布 K_1。由 $\{X_i, i \ge 1\}$ 定义了随机游动 $\{S_n, n \ge 0\}$，其中，设 $S_0 = 0$，$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$n \ge 1$，称 $\{S_n, n \ge 0\}$ 为由 $\{X_i, i \ge 1\}$ 产生的随机游动。当 X_1 与 $\{X_i, i \ge 2\}$ 具有不同分布时，称此随机游动为延迟的随机游动，否则称为零延迟的随机游动。记

$$\eta(x) = \inf\{n \ge 1 : S_n > x\}, \quad x \ge 0,$$

为随机游动 $\{S_n, n \ge 0\}$ 首次上穿水平 x 的时刻，其中约定 $\inf \phi = \infty$。称 $S_{\eta(x)} - x$ 为随机游动 $\{S_n, n \ge 0\}$ 在水平 x 处的超出。

记 $Z_+ = \eta(0)$，S_{Z_+} 为首次上穿梯高。周知，当 $0 < m < \infty$ 时，Z_+ 和 S_{Z_+} 为亏损随机变量，即

$$P(S_{Z_+} < \infty) = P(Z_+ < \infty) = q \in (0,1)。$$

设 K_+ 为 S_{Z_+} 的分布，记

$$K_{P_+}(x) = P(S_{Z_+} \le x | Z_+ < \infty) = \frac{K_+(x)}{q}, x \ge 0。$$

从而，

$$\overline{K_{P_+}}(x) = 1 - \frac{K_+(x)}{q} = q^{-1}(q - K_+(x)) = q^{-1}\overline{K_+}(x), x \ge 0,$$

其中 $\overline{K_+}(x) = q - K_+(x), x \ge 0$。

随机游动的超出是随机游动中的重要对象，在风险理论、排队论、分支过程等领域中有广泛的应用。

对于零延迟的随机游动，有较多的文献研究了随机游动超出的性质，如 Janson [1]，Borovkov 和 Foss [2]，Klüppelberg 等[3]，Tang [4]，Chen 等[5]，Cui 等[6]，等。本文将讨论延迟随机游动超出的局部渐近性质。在给出主要结果之前，先给出一些记号和概念。本文无特殊说明，所有极限关系为 $x \to \infty$。设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 为两个非负函数，若 $\lim a(x)/b(x) = 1$，则记 $a(x) \sim b(x)$；若 $\limsup a(x)/b(x) < \infty$，则记 $a(x) = O(1)b(x)$；若 $\lim a(x)/b(x) = 0$，则记 $a(x) = o(1)b(x)$。对于一分布函数 V，记其尾为 $\overline{V} = V(\infty) - V$，对任 $0 < T \le \infty$，记 $\Delta_T = (0, T]$ 及 $x + \Delta_T = (x, x+T]$；若 $T = \infty$，则记 $\Delta_\infty = (0, \infty)$ 及 $x + \Delta_\infty = (x, \infty)$。

下面给出一些常用的分布族。设 V 是支撑在 $(0,\infty)$ 上的分布，称 V 属于长尾分布族，记作 $V \in L$，若对任 $y \in (-\infty, \infty)$，有

$$\overline{V}(x+y) \sim \overline{V}(x)。$$

长尾分布族的一个子族为次指数分布族，记作 S。设 V 是支撑在 $(0,\infty)$ 上的分布，称 $V \in S$，若

$$\overline{V^{*2}}(x) \sim 2\overline{V}(x)。$$

此处，V^{*2} 为 V 的二重卷积。一个常用的次指数分布族的子族为 S^* 族，它是由 Klüppelberg [7]提出的。设 V 是支撑在 $(0,\infty)$ 上的分布，称 $V\in S^*$，若

$$\int_0^x \overline{V}(x-y)\overline{V}(y)\mathrm{d}y \sim 2\overline{V}(x)\int_0^x \overline{V}(y)\mathrm{d}y \text{。}$$

设 V 是支撑在 $(-\infty,\infty)$ 上的分布，称 V 属于某一分布族，若 $V(x)\mathrm{I}_{\{x>0\}}$ 属于某一分布族，其中 I_A 为 A 的示性函数。

上述分布族具有如下关系

$$S^*\subset S\subset L \text{。}$$

可见 Cline 和 Samorodnitsky [8]，Klüppelberg [9]，Embrechts 等[10]，等。

下面结果为本文的主要结果。

定理 1.1： 设 $K_1\in L$，$K\in S^*$ 且 $\overline{K_1}(x)=O(1)\overline{K}(x)$，则对任 $0<T<\infty$，

$$P\left(S_{\eta(x)}\in x+\Delta_T\right)\sim\left((1-q)^{-1}\int_0^T\overline{K_+}(y)\mathrm{d}y+T\right)m^{-1}\overline{K}(x) \tag{1.1}$$

2. 主要结果的证明

下面的引理给出了长尾分布族的一个等价条件，可见 Gao 和 Wang [11] Proposition A.1。在给出他们的结果之前，先给出一个符号，对于一个支撑在 $(-\infty,\infty)$ 上的分布 V，定义

$$H_V=\left\{h:[0,\infty)\to[0,\infty):h(x)\uparrow\infty,x^{-1}h(x)\to 0\text{且}\overline{V}(x-y)\sim\overline{V}(x)\text{对}|y|\le h(x)\text{一致}\right\}.$$

引理 2.1： 设 V 是一个支撑在 $(-\infty,\infty)$ 上的分布，则

$$V\in L\Leftrightarrow H_V\ne\phi \text{。}$$

对于上述随机游动 $\{S_n,n\ge 0\}$，当 $\{S_n,n\ge 0\}$ 为零延迟时，Cui 等[6]的(2.5)式给出了如下随机游动超出的局部渐近性质。

引理 2.2： 设 $\{X_i,i\ge 1\}$ 为 $i.i.d$ 随机变量，具有支撑在 $(-\infty,\infty)$ 上的分布 K。若 $K\in S^*$ 则对任 $0<T<\infty$，

$$P\left(S_{\eta(x)}\in x+\Delta_T\right)\sim\left((1-q)^{-1}\int_0^T\overline{K_+}(y)\mathrm{d}y+T\right)m^{-1}\overline{K}(x) \text{。}$$

下面证明主要结果。

定理 1.1 的证明：

记 $S_n'=S_n-X_1$，$n\ge 1$，

$$\eta'(x)=\inf\left\{n\ge 1:S_n'>x\right\},\quad x\ge 0 \text{。}$$

从而，由强马氏性知，对任 $x>0$ 及 $0<T<\infty$，

$$\begin{aligned}
&P\left(S_{\eta(x)}\in x+\Delta_T\right)\\
&=P\left(S_{\eta(x)}\in x+\Delta_T,X_1>x\right)+P\left(S_{\eta(x)}\in x+\Delta_T,X_1\le x\right)\\
&=K_1\left(x+\Delta_T\right)+P\left(x-X_1<S_{\eta(x)}-X_1\le x+T-X_1,X_1\le x\right)\\
&=K_1\left(x+\Delta_T\right)+P\left(x-X_1<S'_{\eta'(x-X_1)}\le x+T-X_1,X_1\le x\right)\\
&=K_1\left(x+\Delta_T\right)+\int_{-\infty}^x P\left(S'_{\eta'(x-y)}\in x-y+\Delta_T\right)K_1(\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

由于 $K \in S^* \subset L$， $K_1 \in L$ 及引理 2.1 知，存在函数 $h \in H_K \cap H_{K_1}$。从而对充分大的 x，有

$$\begin{aligned} &P\left(S_{\eta(x)} \in x+\Delta_T\right) \\ &= K_1\left(x+\Delta_T\right)+\left(\int_{-\infty}^{h(x)}+\int_{h(x)}^{x-h(x)}+\int_{x-h(x)}^{x}\right)P\left(S'_{\eta'(x-y)} \in x-y+\Delta_T\right)K_1(\mathrm{d}y) \\ &=: K_1\left(x+\Delta_T\right)+\sum_{i=1}^{3}J_i(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

由于 $K_1 \in L$ 且 $\overline{K_1}(x)=O(1)\overline{K}(x)$，则

$$K_1\left(x+\Delta_T\right)=o(1)\overline{K_1}(x)=o(1)\overline{K}(x) \tag{2.2}$$

由于 $\{S'_n, n \ge 1\}$ 为零延迟的随机游动且 $K \in S^*$，从而由引理 2.2 知

$$P\left(S'_{\eta'(x)} \in x+\Delta_T\right) \sim C_1\overline{K}(x) \tag{2.3}$$

其中，$C_1=\left((1-q)^{-1}\int_0^T\overline{K_+}(y)\mathrm{d}y+T\right)m^{-1}$。从而由(2.3)及 $K \in L$ 知

$$\begin{aligned} J_1(x) &\sim C_1\int_{-\infty}^{h(x)}\overline{K}(x-y)K_1(\mathrm{d}y) \\ &\sim C_1\overline{K}(x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于 $J_2(x)$，由于 $\overline{K_1}(x)=O(1)\overline{K}(x)$，从而由(2.3)，引理 2.1，分部积分及 $K \in S^* \subset S$ 知，

$$\begin{aligned} J_2(x) &\sim C_1\int_{h(x)}^{x-h(x)}\overline{K}(x-y)K_1(\mathrm{d}y) \\ &\le C_1\left(\overline{K}(x-h(x))\overline{K_1}(h(x))+\int_{h(x)}^{x-h(x)}\overline{K_1}(x-y)K(\mathrm{d}y)\right) \\ &= O(1)\left(\overline{K}(x-h(x))\overline{K_1}(h(x))+\int_{h(x)}^{x-h(x)}\overline{K}(x-y)K(\mathrm{d}y)\right) \\ &= o(1)\overline{K}(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

对于 $J_3(x)$，由 $K_1 \in L$ 及 $\overline{K_1}(x)=O(1)\overline{K}(x)$ 知，对充分大的 x，

$$\begin{aligned} J_3(x) &\le \overline{K_1}(x-h(x))-\overline{K_1}(x) \\ &= o(1)\overline{K_1}(x)=o(1)\overline{K}(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

从而由(2.1)，(2.2)，(2.4)~(2.6)知，(1.1)成立。

基金项目

江苏省大学生实践创新训练计划项目资助(项目号：201710332029Y)。

参考文献

[1] Janson, S. (1986) Moments for First-Passage and Last-Exit Times, the Minimum, and Related Quantities for Random Walks with Positive Drift. *Advances in Applied Probability*, **18**, 865-879. https://doi.org/10.2307/1427253

[2] Borovkov, A.A. and Foss, S. (2000) Estimates for Overshooting an Arbitrary Boundary by a Random Walk and Their Applications. *Theory of Probability & Its Applications*, **44**, 231-253. https://doi.org/10.1137/S0040585X97977537

[3] Klüppelberg, C., Kyprianou, A.E. and Maller, R.A. (2004) Ruin Probabilities and Overshoots for General Lévy Insurance Risk Process. *The Annals of Applied Probability*, **14**, 1766-1801. https://doi.org/10.1214/105051604000000927

[4] Tang, Q. (2007) The Overshoot of a Random Walk with Negative Drift. *Statistics & Probability Letters*, **77**, 158-165. https://doi.org/10.1016/j.spl.2006.06.005

[5] Chen, G., Wang, Y. and Cheng, F. (2009) The Uniform Local Asymptotics of the Overshoot of a Random Walk with Heavy-Tailed Increments. *Stochastic Models*, **25**, 508-521. https://doi.org/10.1080/15326340903088859

[6] Cui, Z., Wang, Y. and Wang, K. (2009) Asymptotics for the Moments of the Overshoot and Undershoot of a Random Walk. *Advances in Applied Probability*, **41**, 469-494. https://doi.org/10.1239/aap/1246886620

[7] Klüppelberg, C. (1989) Subexponential Distributions and Characterizations of Related Classes. *Probability Theory and Related Fields*, **82**, 259-269. https://doi.org/10.1007/BF00354763

[8] Cline, D.B.H. and Samorodnitsky, G. (1994) Subexponentiality of the Product of Independent Random Variables. *Stochastic Processes and their Applications*, **49**, 75-98. https://doi.org/10.1016/0304-4149(94)90113-9

[9] Klüppelberg, C. (1988) Subexponential Distributions and Integrated Tails. *Journal of Applied Probability*, **25**, 132-141. https://doi.org/10.1017/S0021900200040705

[10] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997) Modelling Extremal Events. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-33483-2

[11] Gao, Q. and Wang, Y. (2009) Ruin Probability and Local Ruin Probability in the Random Multi-Delayed Renewal Risk Model. *Statistics & Probability Letters*, **79**, 588-596. https://doi.org/10.1016/j.spl.2008.10.001