Statistics and Application 统计学与应用, 2019, 8(3), 488-494
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2019.83054

Linear n-Width of Identity Operators in Probabilistic Setting

Wenjing Lu, Hanyue Xiao

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: lwjzbl@163.com

Received: May 22nd, 2019; accepted: Jun. 5th, 2019; published: Jun. 12nd, 2019

Abstract

In this paper, we discuss the Linear (n,δ)-width of identity operator in probabilistic setting $I_{p,q}:l_{p,r}\to l_q\left(1\le q\le p<\infty, r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$, and obtained its accurate asymptotic degree.

Keywords

Identity Operator, Linear (n,δ)-Width, Probabilistic Setting, Asymptotic Degree

概率框架下恒等算子的线性n-宽度

陆文静，肖寒月

西华大学理学院，四川 成都
Email: lwjzbl@163.com

收稿日期：2019年5月22日；录用日期：2019年6月5日；发布日期：2019年6月12日

摘 要

本文讨论了恒等算子在概率框架$I_{p,q}:l_{p,r}\to l_q\left(1\le q\le p<\infty, r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$下的线性$(n,\delta)$宽度，并计算了其精确渐近阶。

文章引用：陆文静，肖寒月．概率框架下恒等算子的线性 n-宽度[J]．统计学与应用, 2019, 8(3): 488-494.
DOI: 10.12677/sa.2019.83054

关键词

恒等算子，线性(n,δ)-宽度，概率框架，渐近阶

1. 引言及主要结果

宽度是函数逼近论在现代发展中所形成的主要方向之一，也是国内外研究的热点之一，它与计算复杂性有着密切的联系[1]。宽度问题的研究开始于 1936 年，A. N. Kolmogorov [2]做了开创性的工作，并且首先计算出 Sobolev 函数类 B_2^r 到 L_2 上的 Kolmogorov 宽度的精确渐近阶。到 1954 年吗，S. R Stechkin [3]研究了在 $p=1,q=2$ 特殊情况下有限维空间的 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶与线性 n-宽度的精确渐近阶。再到 1960 年，V. M. Tikhomirov [4]给出了 $d_n\left(B_\infty^\gamma\right)_\infty$ 宽度的精确渐近阶，其后发表了许多关于宽度问题的论文，使得宽度这方面的探究活跃起来。此后两年，A. Pietsch [5]和 M. I. Stein [6]研究了在一般情形下当 $p\ge q$ 时 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶与线性 n-宽度的精确渐近阶，到 1974 年，Ismagilov [7]研究了当 $q>p$ 时的精确渐近阶估计，这样有关有限维空间在 $1\le p,q\le\infty$ 条件下的经典 n-宽度的精确渐近阶的估计已得到了非常优美的结果，关于经典 n-宽度的其他结果可见参考文献[8]。2018 年，王桐心[9]等讨论了无穷维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度。本文主要讨论概率框架下恒等算子的线性 n-宽度。首先，介绍线性 n-宽度的定义。

定义 1.1. 设 W 为赋范性线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的一非空子集， $n=0,1,2,\cdots$ ，称

$$\lambda_n(W,X)=\inf_{T_n}\sup_{x\in W}\|x-T_nx\|$$

为 W 在 X 中的线性 n-宽度，其中 $T_n: X\to X$ 取遍 X 中的秩不超过 n 的所有线性算子。

定义 1.2. 设 B 为 W 的全部开子集所生成的 Borel 域，在 B 上赋予概率测度 μ，即 μ 为定义在 B 上的 σ-可加的非负函数，且有 $\mu(W)=1$，令 $\delta\in[0,1)$，则称

$$\lambda_{n,\delta}(W,\mu,X)=\inf_{G_\delta}\lambda_n(W/G_\delta,X)$$

为 W 在 X 中的线性概率(n,δ)-宽度，其中的 G_δ 表示取遍 B 中所有测度不超过 δ 的子集。

定义 1.3. 设 X,Y 为两个赋范线性空间，其范数分别为$\|\cdot\|_X$ 与 $\|\cdot\|_Y$，T 是 X 到 Y 的有界线性算子。令 $B_X:=\left\{x\in X\,\middle|\,\|x\|_X\le 1\right\}$， $n=0,1,2,\cdots$， 称 $\lambda_n(T:X\to Y)=\lambda_n(T(B_X);Y)$， 为算子 T 的线性 n-宽度，$\lambda_{n,\delta}(T:W\to Y,\mu)=\inf\lambda_n(T(W/G_\delta),Y)$ 为算子 T 的线性 (n,δ)-宽度。

设 $1\le p\le\infty, \forall x=\{x_n\}_{n=1}^\infty$， 令 $l_p=\left\{x\,\middle|\,\|x\|_{l_p}<\infty\right\}$， 其中

$$\|x\|_{l_p}=\begin{cases}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty\\ \sup_{n\ge1}|x_n|, & p=\infty\end{cases}$$

可知 $\|\cdot\|_{l_p}$ 为 l_p 上的一个范数，且 l_p 为 Banach 空间，且当 $1\le p\le q\le\infty$ 时， $l_p\subset l_q$， 而 $l_q\not\subset l_p$，所以无

穷维恒等算子是 $I:l_p \to l_q$ 的有界线性算子，而不是 l_q 到 l_p 的有界线性算子。对于 $1\le p\le\infty;\gamma>0,x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_p$，令 $x^r:=\{n^r x_n\}_{n=1}^{\infty}$，

$$\|x\|_{l_{p,\gamma}}:=\|x^r\|_{l_p}=\begin{cases}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|n^r x_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty\\ \sup_{n\ge1}\left|x_n\cdot n^r\right|, & p=\infty\end{cases}$$

$$l_{p,r}:=\left\{x\in l_p \middle| \|x\|_{l_{p,r}}<\infty\right\}。$$

可知 $\|\cdot\|_{l_{p,r}}$ 为 $l_{p,r}$ 上的范数，且 $l_{p,r}$ 为 Banach 空间，记 $B_{p,r}$ 为 $l_{p,r}$ 中的单位球。令 $1\le p<q\le\infty,r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ 时，对 $\forall x\in l_{p,r}$ 由 Hölder 不等式：

$$\|x\|_{l_q}\le\begin{cases}\|x\|_{l_{p,r}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{pr}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}<\infty, & 1\le p<q\le\infty\\ \|x\|_{l_{p,r}}\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\gamma q}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty, & p=\infty\end{cases}$$

因此 $x\in l_q$。令 $1\le q<p\le\infty,r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，定义无穷维恒等算子 $I_{p,q}$：

$$\begin{aligned}I_{p,q}:l_{p,r}&\to l_q\\ x&\mapsto x\end{aligned}$$

则 $I_{p,q}$ 为 $l_{p,\gamma}$ 到 l_q 上的有界线性算子[1]。

在下文中，令 $c_i,i=0,1,\cdots$，是和参数 p,q,r 有关的任意正常数。对两个正函数 $a(y)$ 和 $b(y)$，$y\in D$，如果存在正常数 c_1 满足条件 $a(y)\le c_1 b(y)$，则记 $a(y)\ll b(y)$。若存在正常数 c_2 满足条件 $c_2 a(y)\ge b(y)$，则记 $a(y)\gg b(y)$，若 $a(y)\ll b(y)$ 且 $a(y)\gg b(y)$，则记 $a(y)\succ\prec b(y)$。

本文利用离散化的方法讨论了概率框架下恒等算子的线性 n-宽度，并得到其精确渐近阶。这就是本文的主要结果：

定理 1: 设 $1\le q<p\le2,r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，$n\in\mathbb{N}$，$\forall\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，且数列 $\{n_k\},\{\delta_k\}$ 满足 $0\le n_k\le m_k$，$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n$，$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_n\le\delta$，则

$$\lambda_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^m,\gamma,l_q^m\right)\succ\prec\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\left(r+\frac{\rho}{2}\right)k}\cdot\lambda_{n_k,\delta_k}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$$

定理 2: 设 $1\le q<2,2n\le m,\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，则

$$\lambda_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^m,\gamma,l_q^m\right)\succ\prec m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{m+\ln\frac{1}{\delta}}$$

2. 主要结果的证明

首先介绍有限维空间的线性 (n,δ)-宽度的相关结论。

令 $\mathbb{R}^m=\left\{x=(x_1,\cdots,x_m)\middle|x_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,m\right\}$。设 $1\le p\le\infty, x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m$，

$$\|x\|_{l_p^m}=\begin{cases}\left(\sum_{n=1}^{m}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty\\ \max\limits_{1\le n\le m}|x_n|, & p=\infty\end{cases}$$

$\|\cdot\|_{l_p^m}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的范数，l_p^m 表示 $\mathbb{R}^m$ 按范数 $\|\cdot\|_{l_p^m}$ 所构成的 Banach 空间。记 B_p^m 为 l_p^m 的单位球，则易知 $\{e_n'\}_{n=1}^m$ 为 l_p^m 的基，其中 $e_n'=(0,\cdots,1,\cdots,0)\in\mathbb{R}^m$。

引理 1 [8]：设 $1\le p<q\le\infty, n=0,1,2,\cdots$，则

$$\lambda_n\left(B_p^m,l_q^m\right)=\begin{cases}(m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 0\le n\le m\\ 0, & n>m\end{cases}$$

定理 1 的证明：

首先建立离散化定理：对 $\forall k\in\mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N}\in\{1,2,\cdots\}$，记 $S_k=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|2^{k-1}\le n<2^k\right\}$，则 $\forall k,k'\in\mathbb{N}$，且 $k\ne k'$，有 $S_k\cap S_{k'}=\varnothing, \mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$，用 m_k 表示 S_k 中元素的个数，则 $m_k=|S_k|=2^{k-1}$。$\forall x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_p$，有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$ 这里 $e_n=\left(0,\cdots,\underset{\substack{\downarrow\\ n}}{1},\cdots0\right)$，且 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $l_p\,(1\le p)\le\infty$ 的 Schauder 基。记 E^{m_k} 是由 $\sum_{n\in\Delta_k}x_ne$ 构成的向量空间。

在 $\mathbb{R}^m$ 中赋予标准 Guassiam 测度

$$\gamma(G):=\gamma_m(G)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int_G\exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_2^2\right)\mathrm{d}x$$

对 $\forall n\in S_k$，记 $\sigma_n=\langle c_\mu e_n,e_n\rangle=\lambda_n=n^{-\rho},\rho>0$，$c_\mu$ 为所对应特征向量，$e_k=\left\{0,\cdots,\underset{\substack{\downarrow\\ k}}{1},0,\cdots\right\}$，则：

$$\frac{1}{2^{k\rho}}<\sigma_n\le\frac{2^\rho}{2^{k\rho}},\quad C_\mu e_k=\lambda_ke_k$$

记 $\sigma=\frac{1}{2^{k\rho}},\sigma'=\frac{2^\rho}{2^{k\rho}}$。于是 $\lambda_k=k^{-\rho}$。

定理 1 的上界估计：

对于 $\forall k\in\mathbb{N}$，T_{n_k} 是 $l_q^{m_k}$ 上的一个秩不大于 n_k 的线性算子，使得

$$\gamma\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\middle|\left\|y-T_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}>\lambda_{n_k,\delta_k}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma\right)\right\}\le\delta_k$$

存在映射：$I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to E^{m_k}$。对于 T_{n_k}，则存在一个线性映射 T_{n_k}'，满足 $I_k:T_{n_k}\mathbb{R}^{m_k}\to T_{n_k}'E^{m_k}$。显然：$\mathrm{Rank}T_{n_k}'=\mathrm{Rank}T_{n_k}$，$\left\|y-T_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}=\left\|z-T_{n_k}'z\right\|_q$。

考察集合 E^{m_k} 中子集

$$G_k=\left\{z\in E^{m_k}\middle|\left\|z-T_{n_k}'x\right\|_q>\sigma^{\frac{1}{2}}\lambda_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma\right)\right\}$$

由 Gaussian 测度 μ 和标准 Gaussian 测度 γ 的定义可得

$$\mu\left(G_k\right)=\gamma_{m_k}\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|\left(y_{2^{k-1}}\sigma_{2^{k-1}}^{\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma_{2^{k-1}}^{\frac{1}{2}}\right)-T_{n_k}\left(y_{2^{k-1}}\sigma_{2^{k-1}}^{\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma_{2^k-1}^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_{l_q^{m_k}}\right.\right.$$

$$\left.>\sigma^{\frac{1}{2}}\lambda_{n_k,\delta_k}\left(I_k:\mathbb{R}^{n_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\right\}$$ 。

$$\le\gamma_{m_k}\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|\left(y_{2^{k-1}},\cdots,y_{2^k-1}\right)-T_{n_k}\left(y_{2^{k-1}},\cdots,y_{2^k-1}\right)\right\|_{l_q^{m_k}}>\lambda_{n_k,\delta_k}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},v_{m_k}\right)\right.\right\}$$

$$\le\delta_k$$

令 $G=\bigcup_k G_k, T_n=\sum_k T_{n_k}$ ，则 $\operatorname{rank} T_n\le n$ ，$\mu(G)\le\sum_k\mu(G_k)\le\sum_k\delta_k\le\delta$，从而有：

$$\begin{aligned}\lambda_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_p\to l_q,\mu\right)&\ll\sup_{x\in l_p/G}\left\|x-T_nx\right\|_q\\&\ll\sup_{x\in\{n_kx\}/\{G_k\}}\sum_k\left\|x-I'_{n_k}x\right\|_q\\&\ll\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x\in\{n_kx\}/G_k}\left\|x-I'_{n_k}x\right\|_q\\&\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\left(r+\frac{\rho}{2}\right)k}\cdot\lambda_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\end{aligned}$$

定理 1 的下界估计：

对 $\forall k\in\mathbb{N}$，有

$$\mu\left\{x\in l_2\cap E^{m_k}:\left\|x-T'_{n_k}x\right\|_q>\lambda_{n,\delta}\right\}\le\delta$$

其中 $\lambda_{n,\delta}=\lambda_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right)$。

设 $G'_k=\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|y-T_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}>\sigma'^{-\frac{1}{2}}\lambda_{n,\delta}\right.\right\}$，则有

$$\begin{aligned}\gamma\left(G'_k\right)&=\gamma\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|y-T_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}>\sigma'^{-\frac{1}{2}}\lambda_{n,\delta}\right.\right\}\\&=\gamma\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|\sigma'^{-\frac{1}{2}}y-\sigma'^{-\frac{1}{2}}T_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}>\lambda_{n,\delta}\right.\right\}\\&\le\gamma\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|\left(y_{2^{k-1}}\sigma'^{-\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma'^{-\frac{1}{2}}\right)-T_{n_k}\left(y_{2^{k-1}}\sigma'^{-\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma'^{-\frac{1}{2}}\right)\right\|_{l_q^{m_k}}>\lambda_{n,\delta}\right.\right\}\\&=\mu\left\{x\in F_k\cap l_q^{m_k}:\left\|x-T'_{n_k}x\right\|_q>\lambda_{n,\delta}\right\}\le\delta\end{aligned}$$

即：

$$\lambda_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\gamma\right)\ge 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot\lambda_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$$

综上，定理 1 得证。

定理 2 的证明：

首先建立数列：

$$n_k=\begin{cases} m_k & k\le k' \\ \left[2^{\beta(k-k')}\cdot n\right] & k>k' \end{cases},\quad \delta=\begin{cases} 0 & k\le k' \\ 2^{k-k'}\delta & k>k' \end{cases}$$

其中 $k'=\left[\log_2^n\right]+1$ 且 $0<\beta<\rho-\frac{1}{q}$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\ll\sum_{0<k\le k'}2^{k-1}+n\sum_{k>k'}2^{\beta(k'-k)}\ll n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\ll\delta\sum_{k>k'}2^{k'-k}\ll\delta$$

定理 2 的上界估计：

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right) &\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot\lambda_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\\
&\ll\sum_{k>k'}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot\left[m_k^{\frac{1}{q}}\left(\left(1+\frac{1}{n_k}\ln\frac{1}{\delta_k}\right)\ln\frac{em_k}{n_k}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\ll\sum_{k>k'}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot\left[m_k^{\frac{1}{q}}\left(\ln\frac{em_k}{n_k}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\left[\sum_{k>k'}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}m^{\frac{1}{q}}\cdot\frac{1}{n_k}\ln\frac{1}{\delta_k}\ln\frac{em_k}{n_k}\right]^{\frac{1}{2}}\text{。}\\
&\ll 2^{k'\left(-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}\right)}\cdot 2^{\left(-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}\right)}+2^{k'\left(-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}\right)}\sqrt{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}\\
&\ll 2^{-\left(-\frac{\rho-1}{2}-r+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}=2^{-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}
\end{aligned}$$

定理 2 的下界估计：

设 $k=\left[\log_2^n\right]+3$，则 $m_k\ge 2n$，且 $2^k\gg n$，于是

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right) &\ge 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot\lambda_{n_k,\delta_k}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\\
&\gg 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot m_k^{\frac{1}{q}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{m_k}\right)\ln\frac{1}{\delta_k}}\\
&\gg 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k+\frac{k}{q}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{1}{\delta}}\\
&\gg n^{-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}
\end{aligned}$$

于是得到

$$\lambda_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right)\succ\prec n^{-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}$$

综上，定理 2 得证。

参考文献

[1] Traub, J.F., Wasilkowski, G.W. and Wozniakowski, H. (1988) Information-Based Complexity. Academic Press, Bos-

ton.

[2] Kolmogorov, A.N. (1936) Uber Die Beste Annaherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse. *Annals of Mathematics*, **37**, 107-111． https://doi.org/10.2307/1968691

[3] Stechkin, S.R. (1954) On Best Approximation of Given Classes of Functions by Arbitrary Polynomials. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **9**, 133-134. (In Russian)

[4] Tikhomirov, V.M. (1960) Diameters of Sets in Function Spaces and the Theory of Best Approximations. *Russian Mathematical Surveys*, **15**, 75． https://doi.org/10.1070/RM1960v015n03ABEH004093

[5] Pietsch, A. (1974) S-Numbers of Operators in Banach Spaces. *Studia Mathematica*, **51**, 201-223. https://doi.org/10.4064/sm-51-3-201-223

[6] Stesin, M.I. (1975) Aleksandrov Widths of Finite-Dimensional Sets and Classes of Smooth Functions. *Doklady Akademii Nauk*, **220**, 1278-1281.

[7] Ismagilov, R.S. (1974) Diameters of Sets in Normed Linear Spaces and Approximation of Functions by Trigonometric Polynomials. *Russian Mathematical Surveys*, **29**, 161-178. https://doi.org/10.1070/RM1974v029n03ABEH001287

[8] Pinkus, A. (1985) n-Widths in Approximation Theory. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1

[9] 王桐心. 无穷维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度[D]. 成都: 西华大学, 2018.