

# Single-Index Weighted Composite Quantile Regression

Ziwei Yang, Rong Jiang

College of Science, Donghua University, Shanghai  
Email: 1715430701@qq.com

Received: Oct. 2<sup>nd</sup>, 2019; accepted: Oct. 18<sup>th</sup>, 2019; published: Oct. 25<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

Weighted composite quantile regression (WCQR), a robust estimation based on quantile regression, is becoming increasingly popular due to the nearly same efficiency as the semi-parametric maximum likelihood estimator. Recently, WCQR method has been promoted extensively to single-index model. However, the recent WCQR methods for single-index model are necessarily iterative, which seriously affects the computing speed. We propose a non-iterative estimation algorithm, and derive the asymptotic distribution of the proposed estimator. The simulation and empirical studies are conducted to illustrate the finite sample performance of the proposed methods.

## Keywords

Single-Index Model, Composite Quantile Regression, Quantile Regression

---

# 单指标模型的加权复合分位数回归

杨紫微, 姜 荣

东华大学理学院, 上海  
Email: 1715430701@qq.com

收稿日期: 2019年10月2日; 录用日期: 2019年10月18日; 发布日期: 2019年10月25日

---

## 摘 要

加权复合分位数回归(WCQR)是在分位数回归基础上发展起来的一种稳健估计, 并且其效率与半参数极大似然估计几乎相同, 因而越来越受到人们的关注。近年来, WCQR方法已经被推广到了单指标模型中, 但是目前单指标模型的WCQR方法都涉及到算法的迭代问题, 其严重影响运算速度。为解决以上问题, 本文提出一种非迭代的估计算法, 并给出估计量的渐近分布。最后通过模拟和实证研究验证了本文所提出方法的有效性。

## 关键词

单指标模型, 复合分位数回归, 分位数回归

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

单指标模型作为处理高维非参数估计和“维数灾祸”问题的常用方法, 在诸多领域得到了广泛的应用, 如 Härdle [1] (1993)研究了计量经济学中的离散选择分析和生物计量学中的剂量反应模型, 其具体形式如下:

$$Y = g_0(\mathbf{X}^T \gamma_0) + \varepsilon \quad (1.1)$$

其中  $Y$  为响应变量,  $\mathbf{X}$  是一个  $p$  维的协变量;  $g_0(\cdot)$  是未知函数;  $\gamma_0$  是未知参数。为了模型的可识别性, 本文假定  $\|\gamma_0\| = 1$  且  $\gamma_0$  的第一项为正数, 其中  $\|\cdot\|$  表示欧式范数,  $\varepsilon$  是期望为 0 的误差向量。

对模型(1.1)研究的主要任务是对未知参数  $\gamma_0$  的估计, 例如 Härdle & Stoker [2] (1989)提出了平均导数法(ADE); Carroll [3]等(1997)利用局部线性法得到未知参数并给出了它们的渐近分布; Xia & Härdle [4] (2006)提出了最小平均方差估计算法(MAVE), 该方法最初是为了降维而被 Xia 等[5] (2002)引入; Liu 等[6] (2013)提出了局部线性回归模型的参数估计法。最近, Jiang 等[7] (2016a)研究了加权复合分位数回归, 且其继承了分位数回归的稳健性。使用上述算法估计参数部分和非参部分都需要迭代, 因此许多学者研究了非迭代算法, 例如 Wang 等[8] (2010)提出了两步算法; Liang 等[9] (2010)提出了无需迭代的最小二乘估计算法; Christou & Akritas [10] (2016)提出了 Nadaraya-Watson 分位数回归算法。

本文所提出的算法与 WCQR 有着密切的联系, 而 WCQR 是在复合分位数回归(CQR)上发展起来的, Zou & Yuan [11] (2008)首次使用 CQR 来估计经典线性回归模型中的未知参数, 并证明了 CQR 的渐进效率与最小二乘比不低于 70%。CQR 是各个分位数回归上的等权之和。一般来说, 等权不是最优的, 因此 Jiang 等[12] (2012)在复合分位数回归的基础上进一步提出了数据驱动的加权 CQR 方法(WCQR), 并通过理论和数值模拟对比, 验证了 WCQR 方法优于 CQR, 只有当误差密度为 Logistic 分布或接近 Logistic 分布时, 标准 CQR 方法才具有较好的统计性质(见 Zhao & Lian [13] 2016)。

为了提高估计效率, 本文基于 WCQR 良好的理论性质提出了 NIWCQR 算法。该方法在计算速度上明显改善, 且其估计量渐近于 Jiang 等[7] (2016a)的 WCQR。因此, 本文所提出的算法是对现有方法一种有价值的补充。

本文其余部分结构如下: 在第 2 节中, 本文介绍了模型(1.1)的非迭代 WCQR 方法, 且给出主要理论结果; 在第 3 节中给出了数值模拟的结果; 第 4 节是定理的证明; 第 5 节是结论。

## 2. 单指标模型的非迭代 WCQR 方法

在这一部分, 本文将提出单指标模型的非迭代 WCQR 方法(NIWCQR)。

### 2.1. NIWCQR 方法

理论上, 在单指标模型(1.1)中的参数真值  $\gamma_0$  满足下式:

$$\gamma_0 = \arg \min_{\gamma} \sum_{k=1}^K w_k E \left[ \rho_{\tau_k} \left\{ Y - Q_{\tau_k} \left( Y | X^T \gamma \right) \right\} \right] \quad (2.1)$$

其中  $Q_{\tau_k} \left( Y | X^T \gamma \right) = c_k + g \left( X^T \gamma \right)$ ,  $W = (w_1, \dots, w_K)^T$  是与  $X$  相互独立的权重向量, 且  $\|W\|=1$ ,  $c_k = F^{-1}(\tau_k)$ , 其中  $F(\cdot)$  代表模型误差  $\varepsilon$  的累积分布函数。  $\rho_{\tau_k}(r) = \tau_k r - rI(r < 0)$  ( $k=1, \dots, K$ ) 是  $k$  分位点上的损失函数, 其中  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K < 1$ 。

为解决  $\gamma_0$  的参数估计, 一般都需要进行迭代, 本文定义  $H_{\tau_k}(t|\gamma) = E[Q_{\tau_k}(Y|X)|X^T\gamma=t]$  其中,  $Q_{\tau_k}(Y|X) = \inf\{y: P(Y \leq y | X = X) \geq \tau_k\}$  ( $k=1, \dots, K$ ), 因此, 在单指标模型中

$$Q_{\tau_k}(Y|X^T\gamma_0) = Q_{\tau_k}(Y|X) = H_{\tau_k}(X^T\gamma_0|\gamma_0), \quad k=1, \dots, K,$$

那么  $\gamma_0$  满足下式

$$\gamma_0 = \arg \min_{\gamma} \sum_{k=1}^K w_k E \left[ \rho_{\tau_k} \left\{ Y - H_{\tau_k} \left( X^T \gamma | \gamma \right) \right\} \right] \quad (2.2)$$

$\{Y_i, X_i\}_{i=1}^n$  是来自  $\{Y, X\}$  独立同分布的样本, 则(2.2)式右边的表达式可近似转化为

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k \rho_{\tau_k} \left\{ Y_i - H_{\tau_k} \left( X_i^T \gamma | \gamma \right) \right\}$ 。对于每一个  $k$  我们可以得到  $H_{\tau_k}(\cdot|\gamma)$  的 Nadaraya-Watson 估计值  $\hat{H}_{\tau_k}(t|\gamma)$  (见 Christou & Akrites [10] (2016))

$$\hat{H}_{\tau_k}(t|\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{Q}_{\tau_k}(Y|X_i) K_{h_k}(X_i^T \gamma - t)}{\sum_{i=1}^n K_{h_k}(X_i^T \gamma - t)} \quad (2.3)$$

其中  $K_{h_k}(\cdot) = k(\cdot/h_k)$ ,  $K(\cdot)$  是核函数,  $h_k$  是窗宽, 且一般  $Q_{\tau_k}(Y|X) = \inf\{y: P(Y \leq y | X = X) \geq \tau_k\}$  ( $k=1, \dots, K$ ) 是未知的, 因此需要一个估计值来替代  $Q_{\tau_k}(Y|X)$ , 则由 D-vine copula (Kraus & Czado [14] (2017))方法可得

$$\hat{Q}_{\tau_k}(Y|X) = \hat{F}_Y^{-1} \left( \hat{C}_{F_{Y_1}, \dots, F_{Y_p}}^{-1} \left( \tau | \hat{F}_1(x_1), \dots, \hat{F}_p(x_p) \right) \right), \quad k=1, \dots, K$$

其中  $\hat{F}_Y(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(Y_i \leq y)$ ,  $\hat{F}_j(x_j) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(X_{ij} \leq x_j)$  ( $j=1, \dots, p$ ) 具体细节可参考 Kraus & Czado [10] (2017)的 3.2 节。在(2.3)式中得到  $\hat{H}_{\tau_k}(t|\gamma)$  后, 未知参数  $\gamma$  的估计值可简化为

$$\bar{\gamma} = \arg \min_{\gamma} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k \rho_{\tau_k} \left\{ Y_i - \hat{H}_{\tau_k} \left( X_i^T \gamma | \gamma \right) \right\} \quad (2.4)$$

在模型(1.1)得到参数  $\gamma_0$  的估计值  $\hat{\gamma}$  的基础上, 再根据 Jiang [15] (2016b)的局部加权复合分位数回归 (LWCQR) 估计出  $g_0(\cdot)$  的值, 即对任一内点  $u$

$$\left( \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_K, \hat{b} \right) = \arg \min_{(a_1, \dots, a_K, b)} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \left\{ Y_i - a_k - b \left( X_i^T \hat{\gamma} - u \right) \right\} K_h \left( X_i^T \hat{\gamma} - u \right) \quad (2.5)$$

进而  $\hat{g}(u|\hat{\gamma}) = \sum_{k=1}^K v_k \hat{a}_k$ , 其中权重向量  $V = (v_1, \dots, v_K)^T$  满足  $\sum_{k=1}^K v_k = 1$ ,  $\sum_{k=1}^K v_k c_k = 0$ ,

## 2.2. 渐近性

假设  $f(\cdot)$  是模型误差  $\varepsilon$  的密度函数,  $f_U(\cdot)$  是  $U = X^T \gamma_0$  的边缘密度函数,  $K(\cdot)$  是一个对称的核函数,

定义  $\mu_j = \int u^j K(u) du$ ,  $v_j = \int u^j K^2(u) du$ ,  $R_1(\mathbf{W}) = \left\{ \sum_{k=1}^K w_k f(c_k) \right\}^{-2} \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K w_k w_{k'} \tau_{kk'}$ ,

$R_2(\mathbf{V}) = \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \frac{v_k v_{k'} \tau_{kk'}}{f(c_k) f(c_{k'})}$  且  $\tau_{kk'} = \tau_k \Lambda \tau_{k'} - \tau_k \tau_{k'}$ ,  $h_{\max} = \max_{1 \leq k \leq K} \{h_k\}$ ,  $h_{\min} = \min_{1 \leq k \leq K} \{h_k\}$ 。

**定理 2.1** 假设定理证明中的条件 C1-C4 成立,  $S$  是非奇异的,  $n \rightarrow \infty$ ,  $nh_{\max}^4 \rightarrow 0$ ,  $nh_{\min} \rightarrow \infty$ , 则

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma} - \gamma_0) \xrightarrow{L} N(0, S^{-1} R_1(\mathbf{W}))$$

其中  $\xrightarrow{L}$  代表依分布收敛, 且  $S = E \left\{ g_0'(\mathbf{X}^T \gamma_0)^2 \left[ \mathbf{X} - E(\mathbf{X} | \mathbf{X}^T \gamma_0) \right] \left[ \mathbf{X} - E(\mathbf{X} | \mathbf{X}^T \gamma_0) \right]^T \right\}$ 。

从定理 2.1 中, 易得出  $\hat{\gamma}$  的渐近方差只依赖于  $R_1(\mathbf{W})$  中的  $\mathbf{W}$ 。因此,  $\hat{\gamma}$  的最佳权重为

$$\mathbf{W}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{W}} R_1(\mathbf{W}) = (f^T \Omega^{-2} f)^{-1/2} \Omega^{-1} f \quad (2.6)$$

其中  $f = (f(c_1), \dots, f(c_K))^T$  且  $\Omega$  是一个  $K \times K$  阶矩阵,  $(k, k')$  处的元素  $\Omega_{kk'} = \tau_{kk'}$ 。则(2.4)式中的最优权重  $R_1(\mathbf{W}_{opt}) = (f^T \Omega^{-1} f)^{-1}$  且

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma} - \gamma_0) \xrightarrow{L} N(0, S^{-1} (f^T \Omega^{-1} f)^{-1}) \quad (2.7)$$

**定理 2.2** 假设定理证明中的条件 C1-C4 成立, 如果  $n \rightarrow \infty$ ,  $h \rightarrow 0$ ,  $nh \rightarrow \infty$ , 则对任一内点  $u$  有

$$\sqrt{nh} \left\{ \hat{g}(u | \hat{\gamma}) - g_0(u) - \frac{1}{2} g_0''(u) \mu_2 h^2 \right\} \xrightarrow{L} N \left( 0, \frac{V_0 R_2(\mathbf{V})}{f_U(u)} \right)$$

容易看出,  $\hat{g}(u | \hat{\gamma})$  中的偏差不受权重向量  $\mathbf{V}$  的影响, 而方差项只依赖于  $\mathbf{V}$ , 即最优权重  $\mathbf{V}$  与  $\hat{g}(u | \hat{\gamma})$  的最小渐近方差有关, 则

$$\mathbf{V}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{V}} R_2(\mathbf{V}) = \frac{(\mathbf{r}^T A^{-1} \mathbf{r}) A^{-1} \mathbf{1} - (\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{r}) A^{-1} \mathbf{r}}{(\mathbf{r}^T A^{-1} \mathbf{r})(\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{1}) - (\mathbf{1}^T A^{-1} \mathbf{r})^2} \quad (2.8)$$

其中  $\mathbf{r}$  是  $K$  维列向量, 第  $k$  个元素为  $c_k$ , 且  $\mathbf{1}$  是一个  $K$  维的单位列向量,  $A$  是一个  $K \times K$  维的矩阵, 在  $(k, k')$  处的元素为  $\tau_{kk'} / (f(c_k) f(c_{k'}))$  ( $k, k' = 1, \dots, K$ )。故在最优化权值下  $\hat{g}(u | \hat{\gamma})$  的渐近方差为  $f_U^{-1}(u) v_0 R_2(\mathbf{V}_{opt})$ 。

**注 2.2** 定理 2.1 提出的估计实现了与半参数最大似然估计几乎相同的效率, (Jiang [7] (2016a))。特别地, 当  $w = (1, \dots, 1)$  时, WCQR 方法是标准的 CQR 方法, 见 Jiang [12] (2012)。定理 2.2 的结果及最佳带宽  $h$  的选择参考 Jiang [15] (2016b)。

**注 2.3** 从(2.6)和(2.8)可以看出最佳权重向量  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{V}$  相对比较复杂, 且涉及误差密度函数  $f(c_k)$  ( $k = 1, \dots, K$ )。一般  $f(c_k)$  是未知的, 而非参数密度估计方法可以提供  $f$  的一致估计  $\hat{f}$ , 如基于估计误差  $\hat{\varepsilon}$  的核平滑估计, 具体细节可以参考 Jiang [7] (2016a) 的 2.3 节。

### 3. 模拟研究

在本节中, 我们首先使用蒙特卡罗模拟研究来评估所提出程序的有限样本性能, 然后通过实际数据分析证明所提出方法的实用性。Tian [16] (2016) 提出了新的 AIC 和 BIC 的定义来确定复合分位数中  $K$  的值, 然而, 具有不同  $K$  的 CQR 方法的在模拟中的表现非常相似。此外, 从 Jiang [7] (2016a) 的表 1 和表 2 可以看出  $K = 9$  是对 WCQR 方法的一个很好的选择。因此, 我们在模拟中选择  $K = 9$ 。本文中所有的程序都是基于 R 语言编写的。在本节中, 包含了 7 种方法进行比较, 除本文中的方法, 还有以下 6 种:

- 1) MAVE 方法(参考 Xia & Härdle [4] (2006));
  - 2)  $\tau = 0.5$  的分位数回归(QR<sub>0.5</sub>) (参考 Wu 等[6] 2010);
  - 3) WCQR 方法其中  $K = 9$  (WCQR<sub>9</sub>) (参考 Jiang et al. [7] 2016a);
  - 4) 非迭代的最小二乘估计(NILSE) (参考 Wang & Wu [17] (2013));
  - 5) 非迭代的  $\tau = 0.5$  的分位数回归(NIQR<sub>0.5</sub>) (参考 Christou & Akritas [10] 2016);
  - 6) 非迭代的复合分位数回归方法其中  $K = 9$  (NICQR<sub>9</sub>), 其中  $W \equiv 1$ 。
- 其中(1)~(3)方法需要迭代, (4)~(6)的估计过程不需要迭代。

### 3.1. 模拟例子

样本数  $n = 200$  的数据集由以下模型产生

$$Y = \sin\{\pi(X^T \gamma_0)\} + 0.2\varepsilon \tag{3.1}$$

其中  $X$  是在  $[0, 1]^{10}$  上的均匀分布, 并且  $\gamma_{0,j} = 1/\sqrt{10}, j = 1, \dots, 10$ 。在本例的数值模拟中, 考虑了误差  $\varepsilon$  的三种分布, 且所有的模拟运行 500 次。

**Table 1.** Simulation results of model (3.1)

**表 1.** 模型(3.1)的模拟结果

$\varepsilon \sim N(0,1)$	MSE	$t$	ASE
MAVE	0.0370	220.37	0.00091
QR <sub>0.5</sub>	0.0678	325.02	0.00162
WCQR <sub>9</sub>	0.0461	451.31	0.00148
NILSE	0.0399	307.37	0.00114
NIQR <sub>0.5</sub>	0.0652	316.75	0.00152
NICQR <sub>9</sub>	0.0703	365.73	0.00252
NIWCQR <sub>9</sub>	0.0451	374.88	0.00147
$\varepsilon \sim U(-2,2)$			
MAVE	0.0505	277.21	0.00145
QR <sub>0.5</sub>	0.0498	314.36	0.00131
WCQR <sub>9</sub>	0.0458	345.35	0.00106
NILSE	0.0516	303.22	0.00188
NIQR <sub>0.5</sub>	0.0489	300.01	0.00128
NICQR <sub>9</sub>	0.0496	304.93	0.00130
NIWCQR <sub>9</sub>	0.0479	318.93	0.00111
$\varepsilon \sim \chi^2(3)$			
MAVE	0.05980	276.08	0.08693
QR <sub>0.5</sub>	0.05838	319.00	0.07117
WCQR <sub>9</sub>	0.05051	365.56	0.04422
NILSE	0.06086	292.01	0.10690
NIQR <sub>0.5</sub>	0.05908	281.16	0.06330
NICQR <sub>9</sub>	0.06453	282.34	0.07788
NIWCQR <sub>9</sub>	0.05670	293.67	0.04625

表 1 中包含了均值平方误差 ( $MSE = \sqrt{(\hat{\gamma} - \gamma_0)^T (\hat{\gamma} - \gamma_0)}$ ) 与平均计算时间  $t$ , 从表中可以看出, NIWCQR 方法的估计值渐近于 WCQR, 并且非迭代的算法比相应的迭代算法效率高。

本文用平均误差 (ASE) 来评判  $\hat{g}(\cdot)$  的优劣,  $ASE = \frac{1}{n_{grid}} \sum_{i=1}^{n_{grid}} \{\hat{g}(u_i) - g(u_i)\}^2$ , 其中  $u_i, i = 1, \dots, n_{grid}$ ,  $n_{grid} = 200$ 。从表 1 可以看出, 本文提出所算法的 ASE 渐近于迭代算法的 ASE。

### 3.2. 实际例子: 波士顿房价

作为一个应用, 我们把本文所提出的方法 (NIWCQR) 应用到波士顿房价数据中。波士顿房价数据包含了 14 个变量, 506 个观测值, 其中 medv 作为因变量。目前, 已经有许多学者研究过此数据集, 并发现 medv 与 RM, TAX, PTRATIO, LSTAT 的关系 (见 Wu 等 [17], (2010))。在本例中, 我们将关注 4 个协变量:

RM: 每家住户的平均房间数;

TAX: 全部价值物业税 (美元) \$10,000;

PTRATIO: 街区学生与教师的比例;

LSTAT: 地位较低的人口 (%)。

我们先对 TAX 和 LSTAT 进行对数变换, 且中心化。本文将使用下面的单指标模型来拟合数据集

$$\text{medv} = g\{\gamma_1 \text{RM} + \gamma_2 \log(\text{TAX}) + \gamma_3 \text{PTRATIO} + \gamma_4 \log(\text{LSTAT})\} + \varepsilon$$

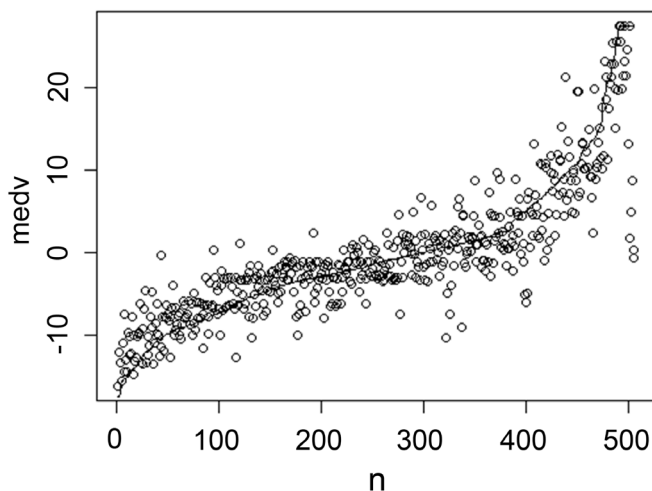
在本实例中使用了平均绝对误差 (MAE) 来评价七种估计方法的优劣, 其中,  $MAE = \frac{1}{506} \sum_{i=1}^{506} |y_i - \hat{y}_i|$ ,  $\hat{y}_i$  是  $y_i$  的估计值。在表 2 中我们总结了上述模型的估计系数。值得注意的是, 在四个协变量中 PTRATIO 对房价的影响最小, 而 LSTAT 对房价的影响最大。表 2 还给出了所有估计方法的 MAE 和  $t$  (计算时间)。

**Table 2.** Estimated Single Index Factor for Boston House Prices and MSE

**表 2.** 波士顿房价的单指标系数估计和 MSE

Method	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	MAE	$t$
MAVE	0.22836	-0.2072	-0.0630	-0.9492	2.991	16.18
QR <sub>0.5</sub>	0.29990	-0.4223	-0.0640	-0.8530	2.888	40.30
WCQR <sub>9</sub>	0.27548	-0.3771	-0.0687	-0.8739	2.718	105.53
NILSE	0.20368	-0.2054	-0.0628	-0.9551	3.367	28.01
NIQR <sub>0.5</sub>	0.25849	-0.4071	-0.0610	-0.8739	2.916	29.95
NICQR <sub>9</sub>	0.21062	-0.3988	-0.0586	-0.8896	2.772	27.61
NIWCQR <sub>9</sub>	0.24061	-0.4167	-0.0629	-0.8742	2.696	31.00

从表 2 可以看出, 本文的方法(NIWCQR<sub>0</sub>)在拟合波士顿房价上的效果比其他的非迭代方法好, 并且 NIWCQR 的计算效率比 WCQR 高。图 1 显示了估计的  $g(\cdot)$  以及真实的数据。从图 1 中可以看出 NIWCQR<sub>0</sub> 非常地接近真实值。



**Figure 1.** Estimated single index composite quantile regression for Boston housing data. The dots are the observations and the curve is the estimated link function  
**图 1.** 波士顿房价的单指标复合分位数回归。圈是观察值, 曲线是估计的连接函数

#### 4. 定理证明

为了证明所提出估计量的渐近性质, 需要以下条件。

C1. 核函数  $K(\cdot)$  是一个对称的有界密度函数, 并且有 Lipschitz 连续的二阶微分。

C2.  $U = \mathbf{X}^T \gamma$  的密度函数是正的并且在  $\gamma_0$  的一个领域内对  $\gamma$  一致连续。  $\mathbf{X}^T \gamma_0$  的密度函数连续有界。

C3. 函数  $g_0(\cdot)$  是连续有界的二次可微函数。

C4. 模型的误差  $\varepsilon$  的密度函数  $f(\cdot)$  是正的。

**注 A.1** 条件 C1-C4 是单指标模型中的一般条件, 见 Wu 等[18] (2010), Jiang 等[7] [15] (2016a, 2016b)。

引理 1: 假设条件 C1-C2 成立, 并且  $nh_{\max}^4 \rightarrow 0$ , 则对于任意的  $\gamma$  有

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma | \gamma) - H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma | \gamma)] = o_p(1)$$

证明:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma | \gamma) - H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma | \gamma)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\hat{Q}_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\sum_{j=1}^n K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma | \gamma) \\ &= \frac{1}{n^{3/2} h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\hat{Q}_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\hat{f}_{\gamma}(\mathbf{X}_i^T \gamma)} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma | \gamma) \end{aligned}$$



$$= \left\{ \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\hat{Q}_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} - \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \right\} \\ + \left\{ \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma | \gamma) \right\} \equiv T_1 + T_2$$

其中  $\hat{f}_\gamma(t) = (nh_k)^{-1} \sum_{i=1}^n K_{h_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma - t)$  并且

$$T_1 = \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\hat{Q}_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \\ - \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \\ T_2 = \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^T \gamma | \gamma)$$

我们先证明  $T_1 = o_p(1)$ ,

$$T_1 = \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\hat{Q}_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} - \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \\ + \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} - \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \\ = \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \hat{Q}_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) - Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) \right] \frac{K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \\ + \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\} \left[ \frac{1}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} - \frac{1}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \right] \\ \equiv T_{11} + T_{12}$$

其中

$$T_{11} = \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \hat{Q}_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) - Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) \right] \frac{K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\}}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \\ T_{12} = \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^T \gamma \right\} \left[ \frac{1}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} - \frac{1}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^T \gamma)} \right]$$

由  $\sup_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} \left| \hat{Q}_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) - Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}) \right| = o_p(n^{-1/2})$  可得  $T_{11} = o_p(1)$ , 见 Rémillard 等[19] (2017)。在  $C_2$  和  $nh_{\max}^4 = o_p(1)$ ,  $T_{12} = o_p(1)$  的条件下,  $T_1 = o_p(1)$ 。



接下来证明  $T_2 = o_p(1)$ 。

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^\top \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^\top \gamma)} - \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma | \gamma) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^\top \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^\top \gamma)} \\
 &\quad + \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma | \gamma) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^\top \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^\top \gamma)} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma | \gamma) \\
 &= \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) - H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma | \gamma) \right] \frac{K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^\top \gamma \right\}}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^\top \gamma)} \\
 &\quad + \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma | \gamma) K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^\top \gamma \right\} \left[ \frac{1}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^\top \gamma)} - \frac{1}{\hat{f}_\gamma(\mathbf{X}_i^\top \gamma)} \right] \\
 &= \frac{1}{n^{3/2}h_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ Q_{\tau_k}(\mathbf{Y} | \mathbf{X}_j) - H_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma | \gamma) \right] \frac{K_{h_k} \left\{ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)^\top \gamma \right\}}{f_\gamma(\mathbf{X}_i^\top \gamma)} + o_p(1)
 \end{aligned}$$

由 U-统计性质和已知条件  $nh_{\max}^4 = o(1)$ , 我们可以得到  $T_2 = o_p(1)$ 。

**定理 2.1 的证明:** 假设  $\gamma^* = \sqrt{n}(\hat{\gamma} - \gamma_0)$ ,  $\gamma^* = \sqrt{n}(\gamma - \gamma_0)$ , 则最小化下式可以得到  $\hat{\gamma}^*$ ,

$$L_n(\gamma^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k \left\{ \rho_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^* - \tilde{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0)) - \rho_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) \right\}$$

其中  $\tilde{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) = \hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma | \gamma) - \hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma_0 | \gamma_0)$ , 并且

$$Y_{i,\tau_k}^* = Y_i - \hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma_0 | \gamma_0) + O_p(n^{-1})$$

这时  $L_n(\gamma^*)$  可以写成

$$L_n(\gamma^*) = E[L_n(\gamma^*) | \mathcal{X}] - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k \left\{ \rho'_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) - E[\rho'_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) | \mathcal{X}] \right\} \tilde{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) + R_n(\gamma^*)$$

其中  $\mathcal{X}$  是设计矩阵,  $R_n(\gamma^*)$  是余项。类似 Fan 等[20] (1994)中的证明方法, 我们可以得到  $R_n(\gamma^*) = o_p(1)$ 。则

$$\begin{aligned}
 E[L_n(\gamma^*) | \mathcal{X}] &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k E \left[ \rho_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^* - \tilde{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0)) - \rho_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) | \mathcal{X} \right] \\
 &= - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k E \left[ \rho'_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) | \mathcal{X} \right] \tilde{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k E \left[ \rho''_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) | \mathcal{X} \right] \tilde{H}_{\tau_k}^2(\mathbf{X}_i | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) + o_p(1)
 \end{aligned}$$

并且  $E[\rho''_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) | \mathcal{X}] = f_\varepsilon(c_k) + o_p(n^{-1/2})$ 。通过引理 1, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 L_n(\gamma^*) &= - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{i=1}^n \rho'_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) \tilde{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K w_k f_\varepsilon(c_k) \sum_{i=1}^n \tilde{H}_{\tau_k}^2(\mathbf{X}_i | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) + o_p(1) \\
 &= - \sum_{k=1}^K w_k \sum_{i=1}^n \rho'_{\tau_k}(Y_{i,\tau_k}^*) \left[ \hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top (\gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) - \hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma_0 | \gamma_0) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K w_k f_\varepsilon(c_k) \sum_{i=1}^n \left[ \hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top (\gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) | \gamma^*/\sqrt{n} + \gamma_0) - \hat{H}_{\tau_k}(\mathbf{X}_i^\top \gamma_0 | \gamma_0) \right] + o_p(1)
 \end{aligned}$$

由引理 1, 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[ \hat{H}_{\tau_k} \left( \mathbf{X}_i^T \left( \gamma^* / \sqrt{n} + \gamma_0 \right) \mid \gamma^* / \sqrt{n} + \gamma_0 \right) - \hat{H}_{\tau_k} \left( \mathbf{X}_i^T \gamma_0 \mid \gamma_0 \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ H_{\tau_k} \left( \mathbf{X}_i^T \left( \gamma^* / \sqrt{n} + \gamma_0 \right) \mid \gamma^* / \sqrt{n} + \gamma_0 \right) - H_{\tau_k} \left( \mathbf{X}_i^T \gamma_0 \mid \gamma_0 \right) \right] + o_p \left( n^{-1/2} \right) \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} & H_{\tau_k} \left( \mathbf{X}_i^T \left( \gamma^* / \sqrt{n} + \gamma_0 \right) \mid \gamma^* / \sqrt{n} + \gamma_0 \right) - H_{\tau_k} \left( \mathbf{X}_i^T \gamma_0 \mid \gamma_0 \right) \\ &= \frac{\gamma^*}{\sqrt{n}} \frac{\partial H_{\tau_k} \left( \mathbf{X}_i^T \gamma \mid \gamma \right)}{\partial \gamma} \Bigg|_{\gamma_0} + o_p \left( n^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{g}'_0 \left( \mathbf{X}_i^T \gamma_0 \right) \left( \mathbf{X}_i - E \left[ \mathbf{X} \mid \mathbf{X}^T \gamma_0 \right] \right)^T \gamma^* + o_p \left( n^{-1} \right) \end{aligned}$$

因此,

$$L_n \left( \gamma^* \right) = -W_n \gamma^* + \frac{1}{2} \left\{ \gamma^* \right\}^T \left\{ \sum_{k=1}^K w_k f_{\varepsilon} \left( c_k \right) \right\} S_n \gamma^* + o_p \left( 1 \right)$$

其中

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K w_k \rho'_{\tau_k} \left( Y_{i,\tau_k}^* \right) \mathbf{g}' \left( \mathbf{X}_i^T \gamma_0 \right) \left( \mathbf{X}_i - E \left[ \mathbf{X} \mid \mathbf{X}^T \gamma_0 \right] \right)^T \\ S_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{g}' \left( \mathbf{X}_i^T \gamma_0 \right) \right\}^2 \left( \mathbf{X}_i - E \left[ \mathbf{X} \mid \mathbf{X}^T \gamma_0 \right] \right) \left( \mathbf{X}_i - E \left[ \mathbf{X} \mid \mathbf{X}^T \gamma_0 \right] \right)^T \end{aligned}$$

易得  $S_n = S + o_p(1)$ , 因此

$$L_n \left( \gamma^* \right) = -W_n \gamma^* + \frac{1}{2} \left\{ \gamma^* \right\}^T \left\{ \sum_{k=1}^K w_k f_{\varepsilon} \left( c_k \right) \right\} S \gamma^* + o_p \left( 1 \right)$$

根据 Pollard [21] (1991)的凸引理, 可得  $L_n \left( \gamma^* \right)$  的二次近似对任意紧集  $\Theta$  中的  $\gamma^*$  保持一致。因此, 可得下式

$$\hat{\gamma}^* = - \left\{ \sum_{k=1}^K w_k f_{\varepsilon} \left( c_k \right) \right\}^{-1} S^{-1} W_n + o_p \left( 1 \right)$$

由于 Cramér-Wald 定理和中心极限定理对于  $W_n$  成立且  $\text{Var} \left( W_n \right) \rightarrow \sum_{k=1}^q \sum_{k'=1}^q w_k w_{k'} \tau_{kk'}$ , 因此定理得证。

**定理 2.2 的证明:** 此证明类似于 Jiang 等[15] (2016b)定理 1 的证明。

## 5. 结论

基于单指标模型, 我们提出了一种 NIWCQR 方法, 它是一种非迭代的估计算法, 因此我们可以更快地得到估计值。

## 参考文献

- [1] Härdle, W., Hall, P. and Ichimura, H. (1993) Optimal Smoothing in Single-Index Models. *The Annals of Statistics*, **21**, 157-178. <https://doi.org/10.1214/aos/1176349020>
- [2] Härdle, W. and Stoker, T. (1989) Investing Smooth Multiple Regression by the Method of Average Derivatives. *Jour-*

- nal of the American Statistical Association*, **84**, 986-995. <https://doi.org/10.1080/01621459.1989.10478863>
- [3] Carroll, R.J., Fan, J., Gijbels, I. and Wand, M.P. (1997) Generalized Partially Linear Single-Index Models, *Journal of the American Statistical Association*, **92**, 477-489. <https://doi.org/10.1080/01621459.1997.10474001>
- [4] Xia, Y. and Härdle, W. (2006) Semi-Parametric Estimation of Partially Linear Single-Index Models. *Journal of Multivariate Analysis*, **97**, 1162-1184. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2005.11.005>
- [5] Xia, Y., Tong, H., Li, W.K. and Zhu, L. (2002) An Adaptive Estimation of Dimension Reduction Space. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **64**, 363-410. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.03411>
- [6] Liu, J., Zhang, R., Zhao, W. and Lv, Y. (2013) A Robust and Efficient Estimation Method for Single Index Models. *Journal of Multivariate Analysis*, **122**, 226-238. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2013.08.007>
- [7] Jiang, R., Qian, W.M. and Zhou, Z.G. (2016) Weighted Composite Quantile Regression for Single-Index Models. *Journal of Multivariate Analysis*, **148**, 34-48. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2016.02.015>
- [8] Wang, J.L., Xue, L.G., Zhu, L.X. and Chong, Y.S. (2010) Estimation for a Partial-Linear Single-Index Model. *The Annals of Statistics*, **1**, 246-274. <https://doi.org/10.1214/09-AOS712>
- [9] Liang, H., Liu, X., Li, R.Z. and Tsai, C.L. (2010) Estimation and Testing for Partially Linear Single-Index Models. *The Annals of Statistics*, **6**, 3811-3836. <https://doi.org/10.1214/10-AOS835>
- [10] Christou, E. and Akritas, M.G. (2016) Single Index Quantile Regression for Heteroscedastic Data. *Journal of Multivariate Analysis*, **150**, 169-182. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2016.05.010>
- [11] Zou, H. and Yuan, M. (2008) Composite Quantile Regression and the Oracle Model Selection Theory. *Annals of Statistics*, **36**, 1108-1126. <https://doi.org/10.1214/07-AOS507>
- [12] Jiang, R., Zhou, Z.G., Qian, W.M. and Shao, W.Q. (2012) Single-Index Composite Quantile Regression. *Journal of the Korean Statistical Society*, **3**, 323-332. <https://doi.org/10.1016/j.jkss.2011.11.001>
- [13] Zhao, K. and Lian, H. (2016) A Note on the Efficiency of Composite Quantile Regression. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **86**, 1334-1341. <https://doi.org/10.1080/00949655.2015.1062096>
- [14] Kraus, D. and Czado, C. (2017) D-Vine Copula Based Quantile Regression. *Computational Statistics and Data Analysis*, **110**, 1-18. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.12.009>
- [15] Jiang, R., Qian, W.M. and Zhou, Z.G. (2016) Single-Index Composite Quantile Regression with Heteroscedasticity and General Error Distributions. *Statistical Papers*, **57**, 185-203. <https://doi.org/10.1007/s00362-014-0646-y>
- [16] Tian, Y., Zhu, Q. and Tian, M. (2016) Estimation of Linear Composite Quantile Regression Using EM Algorithm. *Statistics and Probability Letters*, **117**, 183-191. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2016.05.019>
- [17] Wang, Q. and Wu, R. (2013) Shrinkage Estimation of Partially Linear Single-Index Models. *Statistics and Probability Letters*, **83**, 2324-2331. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2013.06.019>
- [18] Wu, T.Z., Yu, K. and Yu, Y. (2010) Single-Index Quantile Regression. *Journal of Multivariate Analysis*, **101**, 1607-1621. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2010.02.003>
- [19] Rémillard, B., Nasri, B. and Bouezmami, T. (2017) On Copula-Based Conditional Quantile Estimators. *Statistics and Probability Letters*, **128**, 14-20. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2017.04.014>
- [20] Fan, J., Hu, T.C. and Truong, Y.K. (1994) Robust Nonparametric Function Estimation. *Scandinavian Journal of Statistics*, **21**, 433-446.
- [21] Pollard, D. (1991) Asymptotics for Least Absolute Deviation Regression Estimators. *Econometric Theory*, **7**, 186-199. <https://doi.org/10.1017/S0266466600004394>