Statistics and Application 统计学与应用, **2019, 8(6), 872-880**
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2019.86098

Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck with Exponential Diffusion Term

Jianhui Zhu, Litan Yan

Department of Mathematics, Donghua University, Shanghai
Email: zjhandwyh@163.com, litan-yan@hotmail.com

Received: Nov. 14th, 2019; accepted: Nov. 27th, 2019; published: Dec. 4th, 2019

Abstract

In this paper, we consider a least square estimator $\hat{\theta}_T$ for the Ornstein-Uhlenbeck processes driven by fractional Brownian motion (fBm) with Hurst index $H \geq 1/2$ and exponential diffusion term. $\mathrm{d}X_t = -\theta X_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{e}^{ct} \mathrm{d}B_t^H$, we prove the strong consistent of $\hat{\theta}_T$, and also obtain the asymptotic distribution of $\hat{\theta}_T - \theta$ when $1/2 \leq H \leq 5/8$, applying a central limit theorem for multiple Wiener integrals. This least square estimator can be used to study other estimators such as $\tilde{\theta}_T$ obtained by a function of $\int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t$.

Keywords

Parameter Estimation, Fractional Brownian Motion

带有指数型扩散项Ornstein-Uhlenback过程的参数估计

朱建慧，闫理坦

东华大学数学系，上海
Email: zjhandwyh@163.com, litan-yan@hotmail.com

收稿日期：2019年11月14日；录用日期：2019年11月27日；发布日期：2019年12月4日

文章引用：朱建慧，闫理坦. 带有指数型扩散项 Ornstein-Uhlenback 过程的参数估计[J]. 统计学与应用，2019，8(6): 872-880. DOI: 10.12677/sa.2019.86098

摘　要

在本文中，我们研究带有指数型扩散项分数布朗运动驱动的Ornstein-Uhlenbeck过程的最小二乘估计$\hat{\theta}_T$，其中Hurst指数$H \ge 1/2$。$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma e^{ct} dB_t^H$，我们讨论$\hat{\theta}_T$满足相合性以及当$1/2 \le H \le 5/8$时应用多重维纳积分的中心极限定理得到$\hat{\theta}_T - \theta$的渐进分布。这个最小二乘估计同时可以推导出其它类型的估计量，例如$\tilde{\theta}_T$可由函数$\int_0^T X_t^2 dt$进行表示。

关键词

参数估计，分数布朗运动

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

由某种噪声Z_t (Levy 过程)驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 过程可以看成郎之万微分方程的解

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma dZ_t \tag{1}$$

如果该微分方程(1)由分数布朗运动驱动，存在唯一解

$$X_t = X_0 + \sigma \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dB_s^H \tag{2}$$

这里的随机积分是 Itô 型积分或者是轨道型 Riemann-Stieltjies 积分。一个重要的问题是在过程$\{X_t, t \in [0,T]\}$被观测下，对参数θ的估计一般会使用极大似然法或者是最小二乘法。在 2010 年，Yaozhong Hu 和 David Nualart [1]对于分数布朗运动在$H \ge 1/2$时，讨论了上述参数估计的问题。在 2019 年 Yaozhong Hu、David Nualart 和 Hongjuan Zhou [2]完成了在 Hurst 指数一般意义下各种情况的讨论。Kleptsyna 和 Le Breton [3]用极大似然法得到估计量。

本文用最小二乘法研究如下方程中θ的参数估计$c \ge 0$

$$dX_t = -\theta X_t dt + \sigma e^{-ct} dZ_t \tag{3}$$

可以看出当$c = 0$时，方程(1)与方程(3)相同，并且存在唯一解

$$X_t = X_0 + \sigma e^{-\theta t} \int_0^t e^{(\theta+c)s} dB_s^H \tag{4}$$

最小二乘估计的目的是使得目标函数到达最小，受到下面二次函数的启发

$$\int_0^T \left|\dot{X}_t + \theta X_t\right|^2 dt = \int_0^T \dot{X}_t^2 dt + 2\theta \int_0^T X_t dX_t + \theta^2 \int_0^T X_t^2 dt$$

虽然公式$\int_0^T \dot{X}_t^2 dt$不存在，然而当$\theta = -\dfrac{\int_0^T X_t dX_t}{\int_0^T X_t^2 dt}$时，二次函数可以达到最小。通过这样一个简单的讨论，我们初步得到了估计量的形式，把微分方程(3)代入计算得到

$$\hat{\theta}_T = \theta - \sigma \frac{\int_0^T X_t \mathrm{e}^{ct} \mathrm{d}B_t^H}{\int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t} \tag{5}$$

如果我们把上述随机积分 $\int_0^T X_t \mathrm{d}X_t$ 看作 Riemann-Stieltjies 积分，则 $\hat{\theta}_T = -\frac{X_T^2}{2\int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t}$。这个估计量在后面的证明中知道不满足相合性。基于这个原因，在(5)中的随机积分 $\int_0^T X_t \mathrm{e}^{ct} \mathrm{d}B_t^H$ 理解为散度型积分或者 Itô-Skorohod 积分。这样当 T 趋于无穷时，$\hat{\theta}_T$ 几乎必然收敛于 θ。其次证明，在 $1/2 \le H \le 5/8$ 情况下得到 $\hat{\theta}_T - \theta$ 的渐进分布。另一个推导的估计量 $\tilde{\theta}_T$ 的相合性由下面的引理 3.3 收敛得到

$$\frac{2c}{\mathrm{e}^{2cT}} \int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t \to \sigma^2 (\theta + c)^{-2H} H\Gamma(2H) \ a.s. \tag{6}$$

所以 $\tilde{\theta}_T$ 的表达式为

$$\tilde{\theta}_T = \left(\frac{2c}{\sigma^2 \mathrm{e}^{2cT} H\Gamma(2H)} \int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t \right)^{-\frac{1}{2H}} - c \tag{7}$$

最后证明 $\tilde{\theta}_T - \theta$ 的渐进分布。从方差角度来看 $\theta + c < 2H\theta$ 时，$\tilde{\theta}_T$ 比 $\hat{\theta}_T$ 好。

2. 预备知识

首先引进一些针对分数布朗运动涉及到的 Malliavin 分析[4]做阐述。分数布朗运动 B_t^H 定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}^H, P)$ 上，它的协方差函数为

$$E\left(B_s^H B_t^H\right) = R_H(s,t) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}\right) \tag{8}$$

定义在 $[0,T]$ 上的实值阶梯函数集合为 $\mathcal{E}$，并且在给定内积 $\left\langle \mathbf{1}_{[0,s]}, \mathbf{1}_{[0,t]} \right\rangle_{\mathcal{H}} = R_H(s,t)$ 下的闭包为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$。这样线性对偶映射 $\mathbf{1}_{[0,t]} \to B_t^H$ 可以拓展到 $\varphi \to B^H(\varphi)$。当 $H = 1/2$ 时，$\mathcal{H} = L^2([0,T])$；当 $H \ge 1/2$ 时，$\mathcal{H} \supset L^{\frac{1}{H}}([0,T])$。任意 $\varphi, \psi \in L^{\frac{1}{H}}([0,T])$，$\alpha_H = H(2H-1)$，有

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \alpha_H \int_0^T \int_0^T \varphi_s \psi_t |t-s|^{2H-2} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{9}$$

公式(9)是公式(8)的推广形式，之后的所有内积都可以理解为公式(9)。令 S 是光滑圆柱随机变量 $F = f\left(B^H(\varphi_1), \cdots, B^H(\varphi_n)\right)$，$f \in C_b^\infty(\mathcal{R}^n)$ 构成的空间。对于随机变量 F，定义它的 Malliavin 导数是 $\mathcal{H}$-值随机变量

$$DF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(B^H(\varphi_1), \cdots, B^H(\varphi_n)\right)\varphi_i \tag{10}$$

通过迭代，m 重导数 $D^m F$ 是空间 $L^2(\Omega, \mathcal{H}^{\otimes m})$ 中的元素。$\mathbb{D}^{m,2}$ 是 S 在范数 $\|\cdot\|_{m,2}$ 下的闭包。

$$\|F\|_{m,2}^2 = E\left[|F|^2\right] + \sum_{i=1}^n E\left(\|D^i F\|_{\mathcal{H}^{\otimes i}}^2\right)$$

Malliavin 导数 D 的伴随算子 δ 称为散度算子。随机变量 $u \in L^2(\Omega, \mathcal{H})$ 属于散度算子定义域 $Dom(\delta)$ 当且仅当任意 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ 时，$\left|E\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}\right| \le c_u \|F\|_{L^2}$。如果 $u \in L^2(\Omega, \mathcal{H})$，随机变量 $\delta(u)$ 是由对偶关系得到，任意 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$，有 $E(F\delta(u)) = E\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}$。

在估计量的渐进分布计算时用到多重维纳随机积分的中心极限定理[5] [6]。

引理 2.1：在 p 重维纳噪声中的随机序列 $F_n, n\ge 1$ 满足 $\lim_{n\to\infty} E\left(F_n^2\right)=\sigma^2$，则以下两个条件等价：

1) F_n 依分布收敛于 $N\left(0,\sigma^2\right)$

2) $\left\|DF_n\right\|_{\mathcal{H}}^2$ 是 L^2 收敛于常数。

3. 估计量 $\hat{\theta}_T$ 的相合性与渐进性

3.1. 相合性

微分方程唯一解 X_t 与估计量 $\hat{\theta}_T$ 密切联系，它的 Malliavin 导数 $D_s X_t$ 可以由定义(11)计算得到。现在引理 3.1 提供了估计量 $\hat{\theta}_T$ 另一种表现方式。

引理 3.1：假设 $H\ge 1/2$，则

$$\hat{\theta}_T=-\frac{X_T^2}{2\int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t}+\frac{\sigma^2\alpha_H\int_0^T\int_0^t \mathrm{e}^{2ct}\xi^{2H-2}\mathrm{e}^{-(\theta+c)\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t}{\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t} \tag{11}$$

证明：利用散度积分和 Riemann-Stieltjies 积分之间的联系，计算得到

$$\begin{aligned}\int_0^T X_t\mathrm{e}^{ct}\circ\mathrm{d}B_t^H &= \int_0^T X_t\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}B_t^H+\alpha_H\int_0^T\int_0^t D_s\left(X_t e^{ct}\right)(t-s)^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &=\int_0^T X_t\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}B_t^H+\alpha_H\sigma\int_0^T\int_0^t \mathrm{e}^{(c-\theta)t+(\theta+c)s}(t-s)^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\ &=\int_0^T X_t\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}B_t^H+\alpha_H\sigma\int_0^T\int_0^t \mathrm{e}^{2ct}\xi^{2H-2}\mathrm{e}^{-(\theta+c)\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{12}$$

另一方面，把微分方程(3)代入 Riemann-Stieltjies 积分，计算得到

$$\sigma\int_0^T X_t\mathrm{e}^{ct}\circ\mathrm{d}B_t^H=\int_0^T X_t\circ\mathrm{d}B_t^H+\theta\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}X_T^2+\theta\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t \tag{13}$$

结合(12)和(13)代入公式(5)即可得到结论。

下面将叙述四个引理，并得到相合性定理。

引理 3.2：假设 $H\ge 1/2$，则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u+s)}|u-s|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}u=\Gamma(2H-1) \tag{14}$$

证明：通过变量替换 $u-s=x$，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(u+s)}|u-s|^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}u &= 2\int_0^\infty\int_0^u \mathrm{e}^{-(u+s)}(u-s)^{2H-2}\mathrm{d}s\mathrm{d}u\\ &=2\int_0^\infty\int_0^u \mathrm{e}^{-2u+x}x^{2H-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}u\\ &=2\int_0^\infty\int_x^\infty \mathrm{e}^{-2u+x}x^{2H-2}\mathrm{d}u\mathrm{d}x\\ &=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{2H-2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Gamma 函数计算完毕，在之后的运算中会多次用到，有关计算将省略。

引理 3.3：假设 $H\ge 1/2$，则当 T 趋于无穷时

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sigma^2\mathrm{e}^{-2\theta t}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{\theta s}\mathrm{d}B_s^H\right)^2\mathrm{d}t\to\sigma^2\theta^{-2H}H\Gamma(2H)\ \ a.s.$$

和

$$\frac{2c}{\mathrm{e}^{2cT}}\int_0^T X_t^2\mathrm{d}t\to\sigma^2(\theta+c)^{-2H}\ H\Gamma(2H)\ \ a.s.$$

证明：现在考虑随机过程$\{Y_t, t\geq 0\}$

$$Y_t = \sigma e^{-\theta t}\int_{-\infty}^{t} e^{\theta s} dB_s^H \tag{15}$$

该过程是高斯平稳遍历过程。根据遍历性定理[7]

$$\frac{1}{T}\int_0^T Y_t^2 dt \to E\left(Y_0^2\right)$$

这里我们知道当$H=1/2$时，$E\left(Y_0^2\right)=\sigma^2/2\theta$；当$H>1/2$时，用分数布朗运动的内积公式

$$E\left(Y_0^2\right)=\alpha_H\sigma^2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(u+s)}|u-s|^{2H-2} ds du$$

把公式(15)与公式(2) (4)对比发现只有较少的区别，这样暗示了该引理的结论。

引理 3.4 [7]：如果随机过程$(Y_t, t\geq 0)$满足：$E(Y_0)=0$，$E(Y_sY_t)=r(t)=1-C|t|^{\alpha}+o(t^{\alpha}), \alpha>0$和$\sup_{0\leq t\leq 1}|t|^{-\alpha}\left(1-r^2(t)\right)>0$，则

$$P\left\{\limsup_{t\to\infty}(2\log t)^{1/2}\left(Y_t-(2\log t)^{1/2}\right)\Big/\log\log t\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}\right\}=1$$

引理 3.5 [1]：假设$H\geq 1/2$，随机过程Y_t为公式(17)，当T趋于无穷，任意$\alpha>0$

$$\frac{Y_T}{T^{\alpha}}\to 0 \ \ a.s.$$

则

$$\frac{X_T}{e^{cT}T^{\alpha}}\to 0 \ \ a.s.$$

定理 3.1：假设$H\geq 1/2$，则当T趋于无穷时

$$\hat{\theta}_T\to\theta \ \ a.s.$$

证明：从引理 3.3 知道

$$\lim_{T\to\infty}\frac{X_T^2}{\int_0^T X_t^2 dt}=2c$$

引理 3.1 中看出只要计算$\hat{\theta}_T$的第二部分收敛

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\int_0^t e^{2ct}\xi^{2H-2}e^{-(\theta+c)\xi}d\xi dt}{\int_0^T X_t^2 dt}&=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\xi^{2H-2}e^{-\theta\xi}d\xi}{2c\int_0^T X_t^2 dt\Big/e^{2cT}}\\&=\frac{(\theta+c)^{1-2H}\Gamma(2H-1)}{\sigma^2(\theta+c)^{-2H}H\Gamma(2H)}\\&=\frac{\theta+c}{\sigma^2\alpha_H}\end{aligned}$$

定理证毕。

3.2. 渐进性

引理 3.6 [1]：下面两个无穷积分存在：

$$C_{\theta,H}=\int_{[0,\infty)^3} e^{-\theta x_1-\theta|x_2-x_3|}x_3^{2H-2}|x_1-x_2|^{2H-2} dx_1dx_2dx_3 \tag{16}$$

和

$$C_{\theta,H,c}=\int_{[0,\infty)^3}\mathrm{e}^{-\theta x_1-\theta|x_2-x_3|}\mathrm{e}^{-c(x_1+x_2+x_3)}x_3^{2H-2}\left|x_1-x_2\right|^{2H-2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3,\ c>0 \tag{17}$$

证明：可以看出 $0<C_{\theta,H,c}<C_{\theta,H}$，若公式(16)存在，则公式(17)也存在。

$$C_{\theta,H}=\theta^{1-4H}\int_{[0,\infty)^3}\mathrm{e}^{-x-|y-z|}z^{2H-2}\left|x-y\right|^{2H-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\theta^{1-4H}d_H$$

变量替换 $w=y-x$

$$\begin{aligned}d_H&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-x}^\infty\mathrm{e}^{-x-|x+w-z|}z^{2H-2}\left|w\right|^{2H-2}\mathrm{d}w\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{z-x}^\infty\mathrm{e}^{-(2x+w-z)}z^{2H-2}\left|w\right|^{2H-2}\mathrm{d}w\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&\quad+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-x}^{z-x}\mathrm{e}^{-(z-w)}z^{2H-2}\left|w\right|^{2H-2}\mathrm{d}w\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=f_H+(2H-1/2)\Gamma(2H-1)^2\end{aligned}$$

变量替换 $z-w=x$，把等式 $(w+x)^{2H-2}\Gamma(2-2H)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\xi(w+x)}\xi^{1-2H}\mathrm{d}\xi$ 代入 f_H

$$\begin{aligned}f_H&=\int_0^\infty\int_0^z(1+z-w)\mathrm{e}^{-(z-w)}z^{2H-2}w^{2H-2}\mathrm{d}w\mathrm{d}z\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty(1+x)\mathrm{e}^{-x}(w+x)^{2H-2}w^{2H-2}\mathrm{d}w\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\Gamma(2-2H)}\int_{[0,\infty)}(1+x)\mathrm{e}^{-x-\xi(w+x)}w^{2H-2}\xi^{1-2H}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}w\mathrm{d}x\\&=(4H-1)\frac{\Gamma(2H-1)\Gamma(3-4H)\Gamma(4H-2)}{\Gamma(2-2H)}\end{aligned}$$

引理 3.7 [1]：假设 X_t 为公式(4)，则有

$$E\left[\int_s^T\mathrm{e}^{-(\theta-c)\xi}\mathrm{d}B_\xi^H\int_t^T\mathrm{e}^{-(\theta-c)\eta}\mathrm{d}B_\eta^H\right]\le\mathrm{e}^{(\theta-c)(s+t)}C_{\theta-c,H}\left|t-s\right|^{2H-2} \tag{18}$$

和

$$E\left[X_sX_t\right]\le\sigma^2\mathrm{e}^{c(s+t)}C_{\theta+c}\left|t-s\right|^{2H-2} \tag{19}$$

定理 3.2：假设 $1/2\le H<5/8$，则 $\hat{\theta}_T-\theta\xrightarrow{\mathcal{L}}N\left(0,J_{\theta,c}\right)$。

证明：只需要证明满足引理 3.1 的条件即可。由于引理 3.6 只给出 $C_{\theta,H,c}$ 存在，未能给出 $J_{\theta,c}$ 具体数值，但可以通过 $C_{\theta,H}$ 判断大致取值范围。

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_T-\theta&=-\sigma\frac{\int_0^TX_t\mathrm{e}^{ct}\mathrm{d}B_t^H}{\int_0^TX_t^2\mathrm{d}t}\\&=-\sigma^2\frac{\int_0^T\int_0^t\mathrm{e}^{-\theta(t-s)}\mathrm{e}^{t+s}\mathrm{d}B_t^H}{\int_0^TX_t^2\mathrm{d}t}\\&=-\frac{F_T}{\int_0^TX_t^2\mathrm{d}t\big/\mathrm{e}^{2cT}}\end{aligned}$$

F_T 是二重随机积分

$$F_T=\frac{\sigma^2}{2\mathrm{e}^{2cT}}I_2\left(\mathrm{e}^{-\theta(t-s)}\mathrm{e}^{t+s}\right)$$

下面证明当 T 趋于无穷时，$E\left(F_T^2\right)$ 收敛于常数以及 $\|DF_T\|_{\mathcal{H}}^2$ 是 L^2 收敛于常数。

$$E\left(F_T^2\right)=\frac{\sigma^4\alpha_H^2}{2e^{2cT}}I_T$$

其中，

$$I_T=\int_{[0,T]^4}e^{-\theta|s_2-u_2|-\theta|s_1-u_1|}e^{c(s_1+s_2+u_1+u_2)}|s_2-s_1|^{2H-2}|u_2-u_1|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

可以由公式(18)知道，极限存在

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\frac{I_T}{e^{4cT}}\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{ce^{3cT}}\int_{[0,T]^3}e^{-\theta(T-u_1)-\theta|s_1-u_1|}e^{c(s_1+u_1+u_2)}(T-s_1)^{2H-2}|u_2-u_1|^{2H-2}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}s_1\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{c}\int_{[0,T]^3}e^{-\theta x_1-\theta|x_2-x_3|}e^{-c(x_1+x_2+x_3)}x_3^{2H-2}|x_1-x_2|^{2H-2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\&=\frac{C_{\theta,H,c}}{c}\end{aligned}$$

另一方面，对 F_T 求 Malliavin 导数

$$\begin{aligned}D_sF_T&=\frac{\sigma^2}{2e^{2cT}}\left(\int_0^s e^{(c-\theta)s}e^{(\theta+c)w}\mathrm{d}B_w^H+\int_s^T e^{(c+\theta)s}e^{(c-\theta)w}\mathrm{d}B_w^H\right)\\&=\frac{\sigma}{2e^{2cT}}\left(e^{cs}X_s+\sigma e^{(c+\theta)s}\int_s^T e^{(c-\theta)w}\mathrm{d}B_w^H\right)\end{aligned}$$

计算 $H>1/2$ 时的范数

$$\begin{aligned}\|DF_T\|_{\mathcal{H}}^2&=\frac{\sigma^2\alpha_H}{4e^{4cT}}\int_0^T\int_0^T\Big(X_uX_se^{c(u+s)}+2\sigma X_ue^{(\theta+c)s}\int_s^T e^{(c-\theta)w}\mathrm{d}B_w^H\\&\quad+\sigma^2e^{(c+\theta)(u+s)}\int_s^T e^{(c-\theta)w}\mathrm{d}B_w^H\int_u^T e^{(c-\theta)w}\mathrm{d}B_w^H\Big)|u-s|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&=\frac{\sigma^2\alpha_H}{4e^{4cT}}\left(C_T^{(1)}+C_T^{(2)}+C_T^{(3)}\right)\end{aligned}$$

只需要计算第一项，另外两项相同计算过程

$$\begin{aligned}V_T&=E\left(\left|C_T^{(1)}-E\left(C_T^{(1)}\right)\right|^2\right)\\&=2\int_{[0,T]^4}E(X_sX_t)E(X_uX_v)e^{c(s+t+u+v)}|u-s|^{2H-2}|v-t|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}s\mathrm{d}t\end{aligned}$$

引理 3.7 结论中公式(18)和(19)代入

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{V_T}{e^{8cT}}&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{ce^{8cT}}\int_{[0,T]^3}E(X_TX_t)E(X_uX_v)e^{c(T+t+u+v)}(T-u)^{2H-2}|v-t|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}t\\&\le C\int_{[0,T]^3}(T-t)^{2H-2}|u-v|^{2H-2}(T-u)^{2H-2}|v-t|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}t\\&\le CT^{8H-5}\int_{[0,1]^3}(1-t)^{2H-2}|u-v|^{2H-2}(1-u)^{2H-2}|v-t|^{2H-2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}t\end{aligned}$$

这样最终得到

$$\begin{aligned}E\left[\left(\|DF_T\|_{\mathcal{H}}^2-E\left(\|DF_T\|_{\mathcal{H}}^2\right)\right)^2\right]&=\frac{\sigma^2\alpha_H}{4e^{4cT}}E\left(\left|C_T^{(1)}+C_T^{(2)}+C_T^{(3)}-E\left(C_T^{(1)}+C_T^{(2)}+C_T^{(3)}\right)\right|^2\right)\\&\le 9\frac{\sigma^2\alpha_H}{4e^{4cT}}\sum_{i=1}^3E\left(\left|C_T^{(i)}-E\left(C_T^{(i)}\right)\right|^2\right)\to 0\end{aligned}$$

事实上还有

$$\lim_{T\to\infty} E\left(\left\|DF_T\right\|_{\mathcal{H}}^2\right) = p\lim_{T\to\infty} E\left(F_T^2\right)$$

其中 p 为随机积分积分重数，这里 $p=2$ 。

4. 估计量 $\tilde{\theta}_T$ 的渐进性

估计量 $\tilde{\theta}_T$ 由引理 3.3 启发得到，相合性显然。$\tilde{\theta}_T$ 与 $\hat{\theta}_T$ 之间密切联系，下面用 $\hat{\theta}_T$ 研究估计量 $\tilde{\theta}_T$ 的渐进性。再次呈现公式(7)

$$\tilde{\theta}_T = \left(\frac{2c}{\sigma^2 \mathrm{e}^{2cT} H\Gamma(2H)}\int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t\right)^{-\frac{1}{2H}} - c$$

定理 3.1：假设 $1/2 \le H < 5/8$ ， $\hat{\theta}_T - \theta \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, J_{\theta,c}\right)$ ，则

$$\tilde{\theta}_T - \theta \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, J_{\theta,c}\left(\frac{\theta+c}{2H\theta}\right)^2\right)$$

证明：利用估计量 $\hat{\theta}_T$ 公式(11)可以有

$$\int_0^T X_t^2 \mathrm{d}t = \frac{\sigma^2 \alpha_H \int_0^T \int_0^t \mathrm{e}^{2ct} \xi^{2H-2} \mathrm{e}^{-(\theta+c)\xi} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t - X_T^2/2}{\hat{\theta}_T}$$

代入公式(7)

$$\tilde{\theta}_T = \left(\frac{\sigma^2 H\Gamma(2H)\mathrm{e}^{2cT}}{-X_T^2 + 2c\sigma^2\alpha_H \int_0^T \int_0^t \mathrm{e}^{2ct} \xi^{2H-2} \mathrm{e}^{-(\theta+c)\xi} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}t}\right)^{\frac{1}{2H}} \hat{\theta}_T^{\frac{1}{2H}} - c = \gamma^{\frac{1}{2H}} \hat{\theta}_T^{\frac{1}{2H}} - c$$

另一方面， θ_T^* 为 $\hat{\theta}_T$ 与 θ 之间的一个随机变量

$$\hat{\theta}_T^{\frac{1}{2H}} - \theta^{\frac{1}{2H}} = \frac{1}{2H}\theta^{\frac{1}{2H}-1}\left(\hat{\theta}_T - \theta\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{\theta}_T - \theta\right)^2 \theta_T^*$$

从下面的分解看，得到相应的结论。

$$\tilde{\theta}_T - \theta = \left[\gamma^{\frac{1}{2H}} - (\theta+c)\theta^{-\frac{1}{2H}}\right]\hat{\theta}_T^{\frac{1}{2H}} + (\theta+c)\theta^{-\frac{1}{2H}}\left[\hat{\theta}_T^{\frac{1}{2H}} - \theta^{\frac{1}{2H}}\right]$$

基金项目

国家自然科学基金(No.11571071)。

参考文献

[1] Hu, Y. and Nualart, D. (2010) Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes. *Statistics and Probability Letters*, **80**, 1030-1038. https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.02.018

[2] Hu, Y., Nualart, D. and Zhou, H. (2019) Parameter Estimation for Fractional Ornstein-Uhlenbeck Processes of General Hurst Parameter. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **22**, 111-142. https://doi.org/10.1007/s11203-017-9168-2

[3] Kleptsyna, M.L. and Le Breton, A. (2002) Statistical Analysis of the Fractional Ornstein-Uhlenbeck Type Process. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **5**, 229-248. https://doi.org/10.1023/A:1021220818545

[4] Nualart, D. (1995) The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer-Verlag, Berlin.

https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2437-0

[5] Nualart, D. and Peccati, G. (2005) Central Limit Theorems for Sequences of Multiple Stochastic Integrals. *The Annals of Probability*, **33**, 177-193. https://www.jstor.org/stable/3481767 https://doi.org/10.1214/009117904000000621

[6] Nualart, D. and Ortiz-Latorre, S. (2008) Central Limit Theorems for Multiple Stochastic Integrals and Malliavin Calculus. *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 614-628. https://doi.org/10.1016/j.spa.2007.05.004

[7] Pickands, J. (1969) Asymptotic Properties of the Maximum in a Stationary Gaussian Process. *American Math Society*, **145**, 75-86. https://www.jstor.org/stable/1995059 https://doi.org/10.2307/1995059