

# Application of Mathematical Method in Population Growth Model under New Situation

Zhongrui Tian\*, Jie Yu, Shumin Zhang

Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu  
Email: \*tzrryan@163.com, 1191124960@qq.com, 269812538@qq.com

Received: Jul. 8<sup>th</sup>, 2020; accepted: Jul. 22<sup>nd</sup>, 2020; published: Jul. 29<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

Under the new situation, the size of the population has undergone new changes, and the limitations of the classic population forecasting model are becoming greater and greater. For this reason, we use mathematical methods to improve the traditional forecasting model to better fit the current population growth situation. First, we consider the impact of the opening of the second child policy on population changes, and further improve the logistic population model. Then, we also consider the impact of economic factors on population changes, and further improve the logistic population model. Finally, we comprehensively consider the impact of two factors on population changes, list the corresponding differential equations, and establish a population prediction model.

## Keywords

Second Child Policy, Economic Factors, Population Forecast

---

# 新形势下数学方法在人口增长模型中的应用

田中锐\*, 俞 洁, 张淑敏

扬州大学, 江苏 扬州  
Email: \*tzrryan@163.com, 1191124960@qq.com, 269812538@qq.com

收稿日期: 2020年7月8日; 录用日期: 2020年7月22日; 发布日期: 2020年7月29日

---

## 摘 要

新形势下, 人口的规模发生了新的变化, 经典的人口预测模型的局限性越来越大, 为此我们用数学方法

\*通讯作者。

将传统的预测模型加以改进，从而更能契合当今人口增长形势。首先，我们考虑到二孩政策的开放对人口变动的影响，进一步将logistic人口模型加以改进。然后，我们又考虑到经济因素对人口变动的影响，进一步再将logistic人口模型加以改进。最后，我们综合考虑两个因素对人口变动的影响，列出了对应的微分方程组，建立了人口预测模型。

## 关键词

二孩政策，经济因素，人口预测

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

人口问题是影响人口生存和发展的各种问题。一直以来，人口问题都与一个地区和国家的经济发展、社会稳定、生态环境等方面紧密相关，备受世界各国的关注。我国作为最大的发展中国家，人口问题也同样突出。作为世界上人口最多的国家，我国面临着人均资源不足，环境承载力弱等问题，这些问题将严重制约人民生活的改善和国家经济的发展。新中国成立以来，我国相继出台了一系列相关政策来应对我国的人口问题，探究人口增长规律，实现对人口数量的准确预测有着十分重要的意义。苏州作为长江经济带重要组成部分，研究其人口的变化，对同类型城市乃至全国人口预测都有一定的借鉴意义。

## 2. 预测目的

人口预测的意义在于，通过数学方法在人口模型中的运用，它能使我们预见未来人口的发展趋势。通过人口预测希望解决的问题主要集中在以下几个方面：

国家政策的决定。对人口变化趋势的分析，国家可以做出正确的决策，例如制定人口规划、人口生育等政策，采取相应的措施后，人口的规模及结构可以得到很好的改善。

劳动力人口的数量。劳动力的提高是国家建设和发展的前提，它能促进国家的经济发展、为国家的创新提供强有力的支撑。因此，对劳动力人口的预测具有重大的意义。

解决老龄化问题。当前我国老龄化问题严重，因此预测老年人口是十分必要的。在准确预测出人口老龄化的程度以及老年人口数量和分布后，政府可采取具有针对性而有效的措施来解决养老问题。

资源配给问题。一个城市有着自身的人口最大容纳量，因为城市的占地面积、学校教育资源、居住人口的容纳量都是有一定限度的。对人口的规模的预测可以使政府对一些资源的配给做出相应的改变，使资源得到充分的利用。

## 3. 预测方法

Logistic 模型：Logistic 人口增长模型比较适用于样本量非常大的情况，该方法考虑到了环境对人口的承载力，但是由于没有考虑到人口的年龄结构，预测效果不佳，当人口出现负增长时，该模型无法预测。1998年[1]缪海涛运用 Logistic 曲线拟合建立了河南省人口模型，并进一步探讨了该省的人口发展和未来趋势。他首先通过河南省 1980 至 1995 年度的人口数原始数据及模拟值来研究人口总量的变动情况，接着运用数学方法建立了客观的人口模型，以便准确地反映该省人口发展规律，并对人口总量展开科学预测。其中，

它主要运用的是逻辑斯特曲线, 又称 Pearl-Reed 曲线。这是人口预测的一种直接、有效的推算工具, 该曲线的最大特点就是克服了一般人口发展方程及其他模型预测人口时人口数会无限增长的弱点。但不足的是, 这一模型忽略了人口迁移变动因素。1999 年[2], 任运平、杨建雅两人对 Logistic 模型予以了适当改进, 得到了一个较好的人口估计模型。他们参照美国 1790 年至 1995 年的人口统计数据, 考虑了人的创造能力对自然环境的补偿作用, 按每两个人可以为一个人提供必要的生活条件, 分析了计算结果与当时特定的历史原因(经济危机和世界大战), 发现有相当高的拟合程度。2010 年[3], 付艳茹在其硕士论文中运用了 Matlab 软件, 以中国 1990~2008 年历年人口统计资料为数据环境, 仿真实测出适于近期人口预测多项式模型和傅立叶级数模型, 实现动态建模, 生成具有高准确性的人口预测数据, 并通过实测修正参数来确保人口预测的准确度。同年[4], 何春通过对比分析马尔萨斯人口模型和 Logistic 人口增长模型所造成的误差, 得出马尔萨斯人口模型更适用于预测不太长时间内广州市的人口, 因而, 要根据具体的数据选择合适的模型。2019 年 8 月[5], 高梅、康宝生和曹黎侠结合 1985-2015 年西安人口数据, 对出生率、死亡率等进行分析, 利用马尔萨斯人口模型和 Logistic 模型, 展开对西安市未来 20 年的人口的预测, 从而有效地规划未来的城市发展。同时, 他们也对比了不同的模型, 研究了各自的优缺点。他们发现这两个模型都能较好地进行预测。前者更适合短期的人口预测, 后者更适合长期的人口预测, 从而达到更高的测量精度。9 月时[6], 李同兴, 吕东琴, 王颜在 Logistic 人口增长模型的基础上, 结合欧拉向前差分法和极限法, 通过剖析极限人口与资源系数间的联系, 研究如何调节人口与资源环境之间的关系, 从而实现可持续发展。

GM(1,1)模型: 灰色预测适用于人口变化不大的情况, 在人口变化较大时, 选择组合回归模型分析。但是灰色模型的使用缺乏大量的真实的历史数据, 虽然是通过合理的技术处理得出结果, 但是这一特点决定了, 该方法适用于小样本数据即短期人口预测。1999 年[7], 刘兆德和刘西雷利用 GM(1,1)模型, 根据 1945 年~1995 年的山东省的人口统计数据, 结合计划生育和改革开放这种政策因素对人口的影响, 分成独立的时间序列, 对 2000 年, 2005 年和 2010 年的人口数量做了预测并进一步分析, 说明这种模型在人口预测上是有效的。2010 年[8], 赵先超, 周跃云, 张旺, 孔祥斋分析当今社会的人口问题对资源、环境和经济等方面的影响, 利用 GM(1,1)灰色增长模型, 以 2000 年至 2005 年的人口规模为依据, 预测了湖南省 2001 年至 2008 年的人口数量, 并与实际值进行比较, 发现该模型能够高精度地对人口进行预测, 从而进一步地对湖南省 2009 年至 2020 年开展人口预测。最后对预测结果进行分析, 探究如何解决人口发展带来的一系列问题, 并给出相应的对策。2013 年[9], 王莉根据厦门市 2000 年~2010 年统计的人口数据, 由于当地的外来常住人口比例与户籍人口比例接近 1:1, 借助 GM(1,1)模型, 预测了户籍人口和常住人口这两部分人口在 2000 年至 2010 年的发展, 发现实际值与预测值之间的相对误差较小, 并补充了未来 10 年的人口预测。同时, 结合地域和经济等因素对人口的影响, 虽适当改变了方法, 但仍需进一步改善。2017 年[10], 吕静妍、孙培成、孙柏芳研究了全面二孩政策对我国人口的影响。通过灰色预测等模型的建立与求解, 分析了出生率、死亡率、性别比等因素, 得出随着二孩政策的开放、社会抚养比的增大, 人口老龄化的情况会有所改善。但是, 此次研究忽略了新时期下, 经济因素对人口变动的影响。2019 年[11], 杨梦冉对当今社会显著的人口老龄化问题做了分析。以上海市为例, 基于 2007 年~2016 年老年人口相关数据, 发现上海市老龄化程度逐日增加并明显高于全国水平。结合已有数据, 通过误差计算可知灰色 GM(1,1)预测模型的预测等级较高, 可实施该模型对 2017 年至 2021 年 65 岁及以上老年人口数量进行预测, 从而给出减缓人口老龄化趋势的解决方案。2020 年[12], 李鲁同样也利用这个模型对安徽省的人口老龄化进行预测和分析。在这个模型的基础上, 将 MATLAB 作为辅助工具, 以 2008 奶奶至 2017 年 65 岁及以上人口数据为依据, 检测该模型的可行性。通过误差检验发现该模型可有效预测, 并展开对 2008 年至 2013 年的老龄化人口预测, 结果显示安徽省的老龄化趋势会逐步增加且处于全国水平。

最后结合现状与预测结果,给出了减轻人口老龄化带来的影响的三个实施要点。

**Leslie 人口模型:** Leslie 人口模型是对整个群体按年龄进行层次划分,构建与年龄相联系的人口模型,其适用范围广,但是由于该模型为离散型模型,需根据不同地区的人口特点,进行不同方面的改进,才可使得预测的结果更加准确有效。在运用此模型时,列出 Leslie 矩阵,即可对人口年龄分布进行迭代,且无论一开始的人口分布向量如何,人口比例在迭代无数次之后总趋近于特征向量,当人口增长率趋于特征值时,就可预测人口增长速度,对于计生有重要意义。1982 年[13],曾宗永和梁中宇借 Leslie 矩阵法,用四川省彭县清平公社的人口调查资料作典型,预测出了川西平原农村人口的发展趋势和稳定人口分析,对四川省在人口中采取的人口流产、引产等计划生育补救措施作了初步评价。1990 年[14],外国学者提出了一种描述具有多个发展阶段的时间历程的新模型,该模型是多个 Leslie 过程的组合,同时给出了参数估计的方法,大大减少了扩展 Leslie 矩阵的主要参数。2002 年[15],外国学者基于改良版的 Leslie-Gower 方案,深入地数值进行分析,建立并证明了关于系统有界性、吸引集的存在性、均衡的存在性和局部或全局稳定性的定理,为人口预测提供了依据。2009 年[16],张曙光和陈永强针对我国人口发展的新特点,建立了改进的 Leslie 离散型人口模型并用 Matlab 编程计算,预测出了未来人口的数量。由预测可知,我国人口在短期内呈逐渐上升的趋势,在 2040 年以后稍有下降趋势,这一结论很好的反应出了我国未来人口的增长状况,也为政府的人口控制提供了决策依据。2014 年[17],姚君、蔡吉花和焦艳会根据黑龙江省人口发展的特点,提出了改进的 Lesile 模型。另外,他们应用 Logistic 模型、Malthus 模型、Leslie 模型和改进的 Leslie 模型对黑龙江省人口总数进行预测,通过对几种模型比较,可以看出改进的 Lesile 模型预测结果相对较好。2019 年[18],于静和张建成根据人口分组模型预测出了河南省城镇老年人口发展的趋势,并且利用 Leslie 查分方程计算出了河南省城镇未来 20 年老年人口数。虽然,运用 Matlab 对所得数据进行了三次多项式函数拟合,预测结果基本符合河南省城镇的实际情况,但是该模型还存在一些缺陷,例如该模型存在一定的预测误差、未对模型本身的各个参数做动态修正、受到人口预测问题复杂性的限制以及未考虑各年龄组的迁移率等。

#### 4. 建立模型

近几年,经济增速放缓,中国经济进入新常态。在此背景下,人口出生率,流动人口数量等研究人口问题的重要变量都会作出相应改变。在本次课题研究中,小组将政策因素与经济因素综合考虑,讨论其在新形势下对人口增长产生的影响。

首先,考虑开放二孩政策对人口变动的影。开放二孩政策后,受到影响的变量有人口出生率,平均生育期望等。现以影响人口出生率为例,假设  $t_0$  为初始时间,  $R(t)$  为  $t$  时刻人口数量,  $R_m$  为环境最大容纳量,  $\rho$  为人口增长率,由 Logistic 人口模型:

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = \rho \left( 1 - \frac{R(t)}{R_m} \right) R(t) \\ R(t_0) = R_0 \end{cases}$$

可求得其通解为(记为 1 式):

$$\begin{cases} R(t) = \frac{\rho R_m}{\rho - R_m (C e^t)^{-\rho}} \\ C = \left( \frac{\rho}{R_m} - \frac{\rho}{R_0} \right)^{-\frac{1}{\rho}} e^{-t_0} \end{cases}$$

二孩政策的放开,将会导致人口出生率的上升,即人口增长率的上升,假设增幅为 $\Delta\rho$ ,则 Logistic 人口模型可改进为:

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = (\rho + \Delta\rho) \left(1 - \frac{R(t)}{R_m}\right) R(t) \\ R(t_0) = R_0 \end{cases}$$

可求得其通解为(记为 2 式):

$$\begin{cases} R(t) = \frac{(\rho + \Delta\rho) R_m}{(\rho + \Delta\rho) - R_m (C e^t)^{-(\rho + \Delta\rho)}} \\ C = \left(\frac{\rho + \Delta\rho}{R_m} - \frac{\rho + \Delta\rho}{R_0}\right)^{-\frac{1}{(\rho + \Delta\rho)}} e^{-t_0} \end{cases}$$

再考虑经济因素对人口变动的影晌。经济变动会影响到相当多的变量,例如流动人口数量,平均生育期望,死亡率等。这里暂时只考虑对流动人口的影响。假设以城镇居民可支配收入衡量某地经济水平, $m_i$ 表示*i*地区城镇居民可支配收入,定义: $k_{ij} = -\frac{m_j - m_i}{m_i}$ , $k_{ij}$ 为*i*地区与它邻接*j*地区相对经济比率, $r$ 为经济影响率, $r = \sum_{j=1}^n k_{ij}$  ( $n=1,2,\dots$ ),假设经济影响率与流动人口呈线性关系,比例常数为 $p$ ,则 Logistic 人口模型可改进为:

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = \rho \left(1 - \frac{R(t)}{R_m}\right) R(t) + pr \left(1 - \frac{R(t)}{R_m}\right) \\ R(t_0) = R_0 \end{cases}$$

求得其通解为(记为 3 式):

$$\begin{cases} R(t) = \frac{\rho R_m (C e^t)^{-\frac{R_m + pr}{\rho}} + pr}{\rho (C e^t)^{-\frac{R_m + pr}{\rho}} - \rho} \\ C = \left(\frac{\rho R_0 + pr}{\rho R_0 - \rho R_m}\right)^{-\frac{R_m + pr}{\rho}} e^{-t_0} \end{cases}$$

将二孩政策开放导致人口出生率提升与经济因素导致流动人口变化综合考虑,可得方程组:

$$\begin{cases} \frac{dR(t)}{dt} = (\rho + \Delta\rho) \left(1 - \frac{R(t)}{R_m}\right) R(t) + pr \left(1 - \frac{R(t)}{R_m}\right) \\ R(t_0) = R_0 \end{cases}$$

求得其通解为(记为 4 式):

$$\begin{cases} R(t) = \frac{(\rho + \Delta\rho) R_m (C e^t)^{-\frac{R_m + pr}{\rho + \Delta\rho}} + pr}{(\rho + \Delta\rho) (C e^t)^{-\frac{R_m + pr}{\rho + \Delta\rho}} - (\rho + \Delta\rho)} \\ C = \left(\frac{(\rho + \Delta\rho) R_0 + pr}{(\rho + \Delta\rho) R_0 - (\rho + \Delta\rho) R_m}\right)^{-\frac{R_m + pr}{\rho + \Delta\rho}} e^{-t_0} \end{cases}$$

## 5. 模型验证

现以苏州市为例, 对上述 4 式适用性加以验证, 查阅往年资料, 将数据进行拟合, 可计算出模型中的参数值, 如表 1 所示:

**Table 1.** Parameters Table  
**表 1.** 参数表

参数	数值
$\rho$	1.66%
$\Delta\rho$	0.06%
$R_m$	8000(万)
$p$	2.4
$r$	3.2

以 2010 年为初始时间, 查找到 2010 年苏州市总人口为 1046.85 万人, 将各项数据代入到 4 式中, 利用 matlab 将模型预测的人口数据求出, 得到表 2:

**Table 2.** Forecast data and actual data  
**表 2.** 预测数据与实际数据

年份	模型预测人口数(万人)	实际人口数(万人)	误差(%)
2011	1181.67	1051.87	12.34
2012	1182.13	1054.91	12.06
2013	1179.94	1057.87	11.54
2014	1169.51	1060.40	10.29
2015	1161.81	1061.60	8.07
2016	1150.24	1064.74	8.03
2017	1153.65	1068.36	8.02

从表中数据可看出, 此模型预测人口数与实际人口数的误差值随着时间变大而逐渐减小, 由于此模型还未考虑更复杂的因素对人口变化的影响, 所以误差值在 8% 左右是相当合理的。

## 6. 结论

本文通过综合考虑经济、政策(二孩政策)、出生率、死亡率、迁出率等因素对人口数量变化的影响, 结合马尔萨斯、Logistic 人口阻滞等模型, 借鉴它们的优点, 改善它们的缺点, 并根据实际情况借助已学的微分方程、经济学理论等知识对模型加以改进, 对我国人口增长预测提供了一个合理的借鉴方法。

由于此模型还未考虑更加复杂的因素对人口变化的影响, 所以预测值与真实值之间还存在一定的误差, 并且此模型中的各个参数值也会随着不同的城市状况而改变, 所以此模型也有着自身的局限性。

## 致 谢

首先感谢扬州大学数学科学学院对本论文的经费资助, 也要感谢我的队友俞洁与张淑敏同学, 是我们三个人一起努力历时四个月完成了这一篇论文, 最后, 最要感谢的是我们的指导老师扬州大学数学科

学院凡震彬教授, 没有您对我们论文方向的指导与不厌其烦的解疑, 就没有这篇论文最后的完成。在此, 衷心对你们表达感谢!

## 基金项目

本文系 2019 年扬州大学大学生科创基金项目, 得到“江苏高校品牌专业建设工程资助项目(数学与应用数学, PPZY2015B109)”经费资助, 项目编号: X20190215。

## 参考文献

- [1] 缪海涛. 河南省人口发展模型分析[J]. 南京人口管理干部学院学报, 1998(1): 63-65.
- [2] 任运平, 杨建雅. Logistic 人口模型的改进[J]. 河东学刊: 运城高专学报, 1999(A6): 23-24.
- [3] 付艳茹. 基于 MATLAB 的人口预测研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2010.
- [4] 何春. 马尔萨斯人口模型在广州市人口预测中的应用[J]. 广东工业大学学报, 2010, 27(3): 31-34.
- [5] 高梅, 康宝生, 曹黎侠. 数学模型在西安市人口预测中的应用[J]. 西安工业大学学报, 2019, 39(4): 373-377.
- [6] 李同兴, 吕东琴, 王颜. Logistic 人口增长模型中资源系数研究[J]. 高等数学研究, 2019(5): 32-35.
- [7] 刘兆德, 刘西雷. 人口规模预测的 GM(1,1)模型应用初探[J]. 资源开发与市场, 1999, 15(1): 25.
- [8] 赵先超, 周跃云, 张旺, 孔祥斋. 基于 GM(1,1)灰色模型的湖南省人口规模预测研究[J]. 玉林师范学院学报, 2010, 31(2): 11-15.
- [9] 王莉. 灰色 GM(1,1)模型在厦门市人口预测中的应用[J]. 厦门理工学院学报, 2013, 21(2): 6-9.
- [10] 吕静妍, 孙培成, 孙柏芳. 全面二孩政策对我国人口结构的影响[J]. 荆楚学术, 2017(7).
- [11] 杨梦冉. 基于 GM(1,1)模型的上海市人口老龄化趋势预测[J]. 经济研究导刊, 2019(18): 48-49+134.
- [12] 李鲁. 安徽省老龄化预测与分析——基于灰色 GM(1,1)模型[J]. 洛阳理工学院学报: 社会科学版, 2010(1): 25-31+79.
- [13] 曾宗永, 梁中宇. 用 Leslie 矩阵法预测人口——四川省彭县清平公社 1978 年人口资料分析[J]. 生态学报, 1982, 2(3): 303-310.
- [14] Söndgerath, D. and Richter, O. (1990) An Extension of the Leslie Matrix Model for Describing Population Dynamics of Species with Several Development Stages. *Biometrics*, **46**, 595-607. <https://doi.org/10.2307/2532081>
- [15] Aziz-Alaoui, M.A. (2002) Study of a Leslie-Gower-Type Tritrophic Population Model. *Chaos, Solitons & Fractals*, **14**, 1275-1293. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(02\)00079-6](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00079-6)
- [16] 张曙光, 陈永强. Leslie 离散型人口模型在我国人口预测中的应用[J]. 自然科学报, 2009, 28(2): 30-31+35.
- [17] 姚君, 蔡吉花, 焦艳会. 改进的 Leslie 离散型人口模型在黑龙江省人口预测中的应用[J]. 高师理科学刊, 2014, 34(4): 22-25.
- [18] 于静, 张建成. 基于 Leslie 分组人口模型对河南省城镇老龄人口的预测研究[J]. 科技创新与应用, 2019(32): 60-625.