Statistics and Application 统计学与应用, **2020, 9(4), 515-524**
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2020.94055

Hans汉斯

Stochastic Restricted Two-Parameter Maximum Likelihood Estimator in Binary Logistic Regression Model

Yuan Zou, Jing Chen, Rong Li

School of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang Guizhou
Email: 1336718033@qq.com

Received: Jul. 9th, 2020; accepted: Jul. 23rd, 2020; published: Jul. 30th, 2020

Abstract

To solve the multicollinearity problem in binary logistic regression model, a new estimator, namely stochastic restricted two-parameter maximum likelihood estimator, is proposed, considering the existence of prior information of the parameters to be estimated in the model. Moreover, we obtain the necessary or sufficient conditions for the new estimator to be superior to Liu maximum likelihood estimator, Liu-Type maximum likelihood estimator, two-parameter maximum likelihood estimator, stochastic restricted maximum likelihood estimator, stochastic restricted Liu maximum likelihood estimator and stochastic restricted Liu-Type maximum likelihood estimator under the criterion of mean squared error matrix. The recommend optimal values of the biasing parameters in the new estimation are discussed and given. Furthermore, based on the optimal recommended value of biasing parameters, a Monte Carlo simulation experiment is introduced to discuss the performance of this new estimator under the mean squared error.

Keywords

Binary Logistic Regression Model, Multicollinearity, Stochastic Restricted Two-Parameter Maximum Likelihood Estimator, Mean Squared Error Matrix, Mean Squared Error

二元逻辑回归模型中的随机约束两参数极大似然估计

邹　媛，陈　景，李　荣

贵州民族大学，数据科学与信息工程学院，贵州 贵阳
Email: 1336718033@qq.com

收稿日期：2020年7月9日；录用日期：2020年7月23日；发布日期：2020年7月30日

文章引用：邹媛，陈景，李荣．二元逻辑回归模型中的随机约束两参数极大似然估计[J]．统计学与应用，2020，9(4): 515-524. DOI: 10.12677/sa.2020.94055

摘　要

针对二元逻辑回归模型中的复共线性问题，同时考虑模型中待估参数存在先验信息的情况，提出了一类新估计即随机约束两参数极大似然估计。研究得到了新估计在均方误差矩阵准则下优于Liu极大似然估计，Liu-Type极大似然估计，两参数极大似然估计，随机约束极大似然估计，随机约束Liu极大似然估计和随机约束Liu-Type极大似然估计的充要或充分条件。探讨并给出了新估计中偏参数的最优建议值。更进一步，基于偏参数的最优建议值，通过蒙特卡罗模拟方法，分析了新估计在均方误差意义下的优良性。

关键词

二元逻辑回归模型，复共线性，随机约束两参数极大似然估计，均方误差矩阵，均方误差

1. 引言

考虑二元逻辑回归模型中因变量 y_i 服从 $Be(\pi_i)$ 分布。其中，伯努利参数 π_i 依赖未知参数 β 和解释变量 x_i 的取值，表达式如下：

$$\pi_i = \Pr(y_i = 1) = \frac{\exp(x_i'\beta)}{1+\exp(x_i'\beta)}, \quad i = 1,\cdots,n \tag{1}$$

X 是 $n\times p$ 的矩阵，x_i 是 X 第 i 列。$\beta = (\beta_1,\cdots,\beta_p)'$ 为 $p\times 1$ 的未知系数矩阵。

在逻辑回归模型中，使用迭代加权最小二乘(IRLS)算法可得 β 的极大似然估计(MLE)：

$$\hat{\beta}_{MLE} = \left(X'\hat{W}X\right)^{-1} X'\hat{W}Z \tag{2}$$

其中 $Z = (Z_1,\cdots,Z_n)'$ 且 $Z_i = \log(\hat{\pi}_i) + \frac{y_i - \hat{\pi}_i}{\hat{\pi}_i(1-\hat{\pi}_i)}$，$\hat{W} = Diag\left[\hat{\pi}_i(1-\hat{\pi}_i)\right]$。

在逻辑回归模型中，当解释变量高度相关时即存在复共线性问题时，MLE 的方差会膨胀。为了克服这个问题，学者们提出了很多估计来改进 MLE。例如，Schaefer 等[1]提出了岭极大似然估计(RE)。Månsson 等[2]提出了 Liu 极大似然估计(LE)，表达式为：

$$\hat{\beta}_{LE} = (C+I)^{-1}(C+dI)\hat{\beta}_{MLE} = F_d\hat{\beta}_{MLE} \tag{3}$$

其中 $C = X'\hat{W}X$，$F_d = (C+I)^{-1}(C+dI)$，$0<d<1$。

Asar [3]提出了 Liu-Type 极大似然估计(LTE)，表达式为：

$$\hat{\beta}_{LTE} = (C+kI)^{-1}(C-dI)\hat{\beta}_{MLE} = F_{kd}\hat{\beta}_{MLE} \tag{4}$$

其中 $F_{kd} = (C+kI)^{-1}(C-dI)$，$k>0, -\infty<d<+\infty$。

Huang J [4]提出了两参数极大似然估计(TPE)，表达式为：

$$\hat{\beta}_{TPE} = (C+kI)^{-1}(C+kdI)\hat{\beta}_{MLE} = F_{k-d}\hat{\beta}_{MLE} \tag{5}$$

其中 $F_{k-d}=(C+kI)^{-1}(C+kdI)$，$k>0,0<d<1$。

考虑在实际工作中，逻辑回归模型中的未知参数向量 β 有可能存在一些先验信息，这时我们可通过等式约束、不等式约束、椭球约束等来描述这些先验信息。本文将考虑带随机线性约束的情况。一般的随机线性约束为：

$$h=H\beta+u,E(u)=0,Cov(u)=\Psi \tag{6}$$

其中，H 是 $q\times(p+1)$ 的满秩已知矩阵。h 是一个 $q\times 1$ 预设值的向量。u 是一个服从均值为 0，方差矩阵为 Ψ 的 $q\times 1$ 随机向量。其中 Ψ 为已知的 $q\times q$ 阶正定矩阵。

基于随机线性约束，Nagaraja 和 Wijekoon [5]提出了随机约束极大似然估计(SRE)，表达式为：

$$\hat{\beta}_{SRE}=\hat{\beta}_{MLE}+C^{-1}H'\left(\Psi+HC^{-1}H'\right)^{-1}\left(h-H\hat{\beta}_{MLE}\right) \tag{7}$$

为了进一步改进 SRE，Varathan 和 Wijekoon 在文献[6]和[7]中分别提出了随机约束岭极大似然估计(SRRE)和随机约束 Liu 极大似然估计(SRLE)。其中 SRLE 表达式为：

$$\hat{\beta}_{SRLE}=(C+I)^{-1}(C+dI)\hat{\beta}_{SRE}=F_d\hat{\beta}_{SRE} \tag{8}$$

Wu 和 Asar [8]提出了随机约束 Liu-Type 极大似然估计(SRLTE)，表达式为：

$$\hat{\beta}_{SRLTE}=(C+kI)^{-1}(C-dI)\hat{\beta}_{SRE}=F_{kd}\hat{\beta}_{SRE} \tag{9}$$

我们结合 SRE 和 TPE 提出了一个新的估计即随机约束两参数极大似然估计(SRTPE)，其表达式为：

$$\hat{\beta}_{SRTPE}=(C+kI)^{-1}(C+kdI)\hat{\beta}_{SRE}=F_{k-d}\hat{\beta}_{SRE} \tag{10}$$

其中 $k>0,0<d<1$。

从 SRTPE 的表达式看出，SRTPE 是一种更一般的估计，它可以退化为 SRE，SRRE，SRLE：

1) $\lim\limits_{k\to 0}\hat{\beta}_{SRTPE}=\hat{\beta}_{SRE}$.

2) $\lim\limits_{d\to 1}\hat{\beta}_{SRTPE}=\hat{\beta}_{SRE}$.

3) $\lim\limits_{d\to 0}\hat{\beta}_{SRTPE}=(C+I)^{-1}\hat{\beta}_{SRE}=\hat{\beta}_{SRRE}$.

4) $\lim\limits_{k\to 1}\hat{\beta}_{SRTPE}=(C+I)^{-1}(C+dI)\hat{\beta}_{SRE}=\hat{\beta}_{SRLE}$.

2. 提出估计的性质

接下来我们将在均方误差矩阵(MSEM)准则下，对新提出的新估计 SRTPE 与 TPE，LTE，LE，SRE，SRLE 和 SRLTE 进行比较。其中参数 β 的估计 $\hat{\beta}$ 的 MSEM 为：

$$MSEM(\hat{\beta})=E\left[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right]=Cov(\hat{\beta})+Bias(\hat{\beta})Bias'(\hat{\beta}) \tag{11}$$

这里 $Cov(\hat{\beta})$ 是方差矩阵，$Bias(\hat{\beta})$ 是估计 $\hat{\beta}$ 的偏差。一般的，当 $\Delta=MSEM(\hat{\beta}_1)-MSEM(\hat{\beta}_2)\geq 0$ 时，我们称估计 $\hat{\beta}_2$ 在 MSEM 准则下优于 $\hat{\beta}_1$。

现在，我们将根据以下三个引理来证明我们所得的定理。引理如下：

引理 1. (Rao 和 Toutenburg [9])设矩阵 A 和 B 是 $n\times n$ 阶矩阵，且 $A>0$，$B\geq 0$。则 $A+B>0$。

引理 2. (Rao [10])设 M 和 N 都为 $n\times n$ 阶正定矩阵，则 $M>N$ 当且仅当 $\lambda_{\max}\left(NM^{-1}\right)<1$。

引理 3. (Trenkler 和 Toutenburg [11])令参数向量 β 的两个估计 $\hat{\beta}_j=A_jy$，$j=1,2$。设

$\Delta = Cov\left(\hat{\beta}_1\right) - Cov\left(\hat{\beta}_2\right) > 0$。则 $MSEM\left(\hat{\beta}_1\right) - MSEM\left(\hat{\beta}_2\right) > 0$ 当且仅当 $u_2'\left(\Delta + u_1u_1'\right)^{-1} u_2 \le 1$。其中，$u_j$ 为 $\hat{\beta}_j$ 的偏差。

定理 1. SRTPE 在 MSEM 准则下总是优于 TPE。

证明： 由公式(11)可得 TPE 和 SRTPE 的 MSEM 如下，

$$MSEM\left(\hat{\beta}_{TPE}\right) = F_{k-d}C^{-1}F_{k-d} + m_1m_1'$$

$$MSEM\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right) = F_{k-d}\left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} F_{k-d} + m_1m_1'$$

其中 $m_1 = k(d-1)(C+kI)^{-1}\beta$。现在我们考虑它们的差，令

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= MSEM\left(\hat{\beta}_{TPE}\right) - MSEM\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right)\\ &= F_{k-d}C^{-1}F_{k-d} + m_1m_1' - F_{k-d}\left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} F_{k-d} - m_1m_1'\\ &= F_{k-d}\left\{C^{-1} - \left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}\right\}F_{k-d}\end{aligned}$$

由于：

$$\left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} = C^{-1} - C^{-1}H'\left(\Psi + HC^{-1}H'\right)^{-1} HC^{-1}$$

则

$$C^{-1}H'\left(\Psi + HC^{-1}H'\right)^{-1} HC^{-1} = C^{-1} - \left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} \ge 0$$

又因为矩阵 $F_{k-d} = (C+kI)^{-1}(C+kdI) > 0$，因此

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= F_{k-d}\left\{C^{-1} - \left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}\right\}F_{k-d}\\ &= F_{k-d}\left\{C^{-1}H'\left(\Psi + HC^{-1}H'\right)^{-1} HC^{-1}\right\}F_{k-d}\\ &= MSEM\left(\hat{\beta}_{TPE}\right) - MSEM\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right) \ge 0\end{aligned}$$

证明完成。

定理 2. 当 $\lambda_{\max}\left\{F_{k-d}\left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} F_{k-d}\left(F_{kd}C^{-1}F_{kd}\right)^{-1}\right\} < 1$ 时，新估计 SRTPE 在 MSEM 准则下优于 LTE 当且仅当 $m_1'\left(D_2 + m_2m_2'\right)^{-1} m_1 \le 1$。其中 $D_2 = F_{kd}C^{-1}F_{kd} - F_{k-d}\left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} F_{k-d}$，$m_2 = (d+k)(C+kI)^{-1}\beta$。

证明： 由公式(11)可得 LTE 的 MSEM 为

$$MSEM\left(\hat{\beta}_{LTE}\right) = F_{kd}C^{-1}F_{kd} + m_2m_2'$$

接下来我们考虑 LTE 与 SRTPE 的 MSEM 的差

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= MSEM\left(\hat{\beta}_{LTE}\right) - MSEM\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right)\\ &= F_{kd}C^{-1}F_{kd} + m_2m_2' - F_{k-d}\left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} F_{k-d} - m_1m_1'\\ &= D_2 + m_2m_2' - m_1m_1'\end{aligned}$$

因为 $F_{kd}C^{-1}F_{kd} > 0$，$F_{k-d}\left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} F_{k-d} > 0$，根据引理 2，当 $\lambda_{\max}\left\{F_{k-d}\left(C + H'\Psi^{-1}H\right)^{-1} F_{k-d}\left(F_{kd}C^{-1}F_{kd}\right)^{-1}\right\} < 1$ 时，$D_2 > 0$。再根据引理 3，当 $m_1'\left(D_2 + m_2m_2'\right)^{-1} m_1 \le 1$ 时，

$\Delta_2 \ge 0$。定理得证。

定理 3. 当 $\lambda_{\max}\left\{F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}\left(F_dC^{-1}F_d\right)^{-1}\right\}<1$ 时，新估计 SRTPE 在 MSEM 准则下优于 LE 当且仅当 $m_1'\left(D_3+m_3m_3'\right)^{-1}m_1\le 1$。其中 $D_3=F_dC^{-1}F_d-F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}$，$m_3=(d-1)(C+I)^{-1}\beta$。

证明：由公式(11)可得 LE 的 MSEM 为

$$MSEM\left(\hat{\beta}_{LE}\right)=F_dC^{-1}F_d+m_3m_3'$$

考虑 LE 与 SRTPE 的 MSEM 的差

$$\begin{aligned}\Delta_3&=MSEM\left(\hat{\beta}_{LE}\right)-MSEM\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right)\\&=F_dC^{-1}F_d+m_3m_3'-F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}-m_1m_1'\\&=D_3+m_3m_3'-m_1m_1'\end{aligned}$$

因为 $F_dC^{-1}F_d>0$，$F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}>0$，根据引理 2，

当 $\lambda_{\max}\left\{F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}\left(F_dC^{-1}F_d\right)^{-1}\right\}<1$ 时，$D_3>0$。再根据引理 3 有，当 $m_1'\left(D_3+m_3m_3'\right)^{-1}m_1\le 1$ 时，$\Delta_3\ge 0$。得证。

定理 4. SRTPE 在 MSEM 准则下优于 SRE 当且仅当 $\lambda_{\max}\left(M_1D_4^{-1}\right)<1$。其中 $D_4=\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}$，$M_1=F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}+m_1m_1'$。

证明：由公式(11)可得 SRE 的 MSEM 为

$$MSEM\left(\hat{\beta}_{SRE}\right)=\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}$$

考虑 SRE 与 SRTPE 的 MSEM 的差

$$\begin{aligned}\Delta_4&=MSEM\left(\hat{\beta}_{SRE}\right)-MSEM\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right)\\&=\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}-\left\{F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}+m_1m_1'\right\}\\&=D_4-M_1\end{aligned}$$

由于 $M_1=F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}+m_1m_1'$，因为 $F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}>0$，$m_1m_1'\ge 0$，所以根据引理 1 可知 $M_1>0$。又因为 $D_4>0$，根据引理 2 有当 $\lambda_{\max}\left(M_1D_4^{-1}\right)<1$ 时，$D_4>M_1$ 即 $\Delta_4=D_4-M_1>0$。定理 4 得证。

定理 5. 当 $\lambda_{\max}\left\{F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}\left[F_d\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_d\right]^{-1}\right\}<1$ 时，SRTPE 在 MSEM 准则下优于 SRLE 当且仅当 $m_1'\left(D_5+m_3m_3'\right)^{-1}m_1\le 1$。其中，$D_5=F_d\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_d-F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}$。

证明：由公式(11)可得 SRLE 的 MSEM 为

$$MSEM\left(\hat{\beta}_{SRLE}\right)=F_d\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_d+m_3m_3'$$

考虑 SRLE 与 SRTPE 的 MSEM 的差

$$\begin{aligned}\Delta_5&=MSEM\left(\hat{\beta}_{SRLE}\right)-MSEM\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right)\\&=F_d\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_d+m_3m_3'-F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}-m_1m_1'\\&=D_5+m_3m_3'-m_1m_1'\end{aligned}$$

因为 $F_d\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_d>0$，$F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}>0$，通过引理2，当 $\lambda_{\max}\left\{F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}\left(F_d\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_d\right)^{-1}\right\}<1$ 时，$D_5>0$。再根据引理3，当 $m_1'\left(D_5+m_3m_3'\right)^{-1}m_1\le 1$ 时，$\Delta_5\ge 0$。定理得证。

定理 6. 当 $\lambda_{\max}\left\{F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}\left(F_{kd}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{kd}\right)^{-1}\right\}<1$ 时，SRTPE 在 MSEM 准则下优于 SRLTE 当且仅当 $m_1'\left(D_6+m_2m_2'\right)^{-1}m_1\le 1$。

其中 $D_6=F_{kd}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{kd}-F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}$。

证明： 由公式(11)可得 SRLTE 的 MSEM 如下

$$MSEM\left(\hat{\beta}_{SRLTE}\right)=F_{kd}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{kd}+m_2m_2'$$

考虑 SRLTE 与 SRTPE 的 MSEM 的差

$$\begin{aligned}\Delta_6&=MSEM\left(\hat{\beta}_{SRLTE}\right)-MSEM\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right)\\&=F_{kd}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{kd}+m_2m_2'-F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}-m_1m_1'\\&=D_6+m_2m_2'-m_1m_1'\end{aligned}$$

因为 $F_{kd}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{kd}>0$，$F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}>0$，通过引理2有，当 $\lambda_{\max}\left\{F_{k-d}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{k-d}\left(F_{kd}\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}F_{kd}\right)^{-1}\right\}<1$ 时，$D_6>0$。根据引理3，当 $m_1'\left(D_6+m_2m_2'\right)^{-1}m_1\le 1$ 时，$\Delta_6\ge 0$。定理得证。

3. 偏参数 k 和 d 的选取

因为随机约束两参数极大似然估计与定理中的各估计在均方误差准则下的比较结果依赖参数 β 的偏参数 k 和 d 的选择。所以合适的选取偏参数 k 和 d 可以使模拟得到可行的结果。为了得到可行的 k 和 d 的值。我们对矩阵 C 进行分解使得 $C=Q\Lambda Q'$。其中，Q 是矩阵 C 的特征向量的列向量组成的矩阵，$\Lambda=diag\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_p\right)$，$\lambda_i$ 是 C 的第 i 个特征值。我们令

$$f\left(k,d\right)=MSE\left(\hat{\beta}_{SRTPE}\right)=\sum_{i=1}^{p}\frac{\left(\lambda_i+kd\right)^2b_{ii}+k^2\left(d-1\right)^2\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+k\right)^2} \tag{12}$$

其中 $\left(C+H'\Psi^{-1}H\right)^{-1}=Qdiag\left(b_{11},\cdots,b_{pp}\right)Q'$，$\hat{\alpha}=Q'\hat{\beta}_{MLE}$。

可以看出函数 $f\left(k,d\right)$ 是一个关于参数 d 的二次函数。因此，为了求使 $f\left(k,d\right)$ 最小的 d 的值，我们固定 k，并对 $f\left(k,d\right)$ 求关于 d 的偏导得

$$\frac{\partial f\left(k,d\right)}{\partial d}=\sum_{i=1}^{p}\frac{2k\left(\lambda_i+kd\right)b_{ii}+2k^2\left(d-1\right)\alpha_i^2}{\left(\lambda_i+k\right)^2} \tag{13}$$

令上述等式(13)等于零，我们得到了 d 的一个建议最优值 $\hat{d}_{opt}$，结果如下：

$$\hat{d}_{opt}=\frac{\sum_{i=1}^{p}\frac{ka_i^2-\lambda_ib_{ii}}{\left(\lambda_i+k\right)^2}}{\sum_{i=1}^{p}\frac{k\left(b_{ii}+a_i^2\right)}{\left(\lambda_i+k\right)^2}} \tag{14}$$

同样的，为了求偏参数 k 的值使得 $f(k,d)$ 最小，我们对函数 $f(k,d)$ 关于 k 求偏导得到

$$\frac{\partial f(k,d)}{\partial k}=\sum_{i=1}^{p}\frac{2\lambda_i b_{ii}(\lambda_i+kd)(d-1)+2k\lambda_i(d-1)^2\alpha_i^2}{(\lambda_i+k)^3} \tag{15}$$

令上述等式(15)等于零，即分子为 0 得到

$$k=\frac{\alpha_i^2}{\lambda_i b_{ii}}-d\left(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{\alpha_i^2}{\lambda_i b_{ii}}\right) \tag{16}$$

当 d 固定时(16)中 k 的最优值依赖 α_i^2，根据 Hoerl 和 Kennard [12]和 Kibria [13]提出的方法，我们用它的无偏估计来替代：

$$\hat{k}=\frac{\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i b_{ii}}-d\left(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i b_{ii}}\right) \tag{17}$$

Hoerl 等[14]提出了使用 k 的调和平均值来替代 k 的估计，Kibria [13]提出了使用 k 的算术平均值来替代 k 的估计，Hoerl 和 Kennard [12]提出了使用 k 的几何平均值来替代 k 的估计。再根据我们得出的 k 值得到偏参数 k 的三种取值分别定义如下：

$$\hat{k}_{HM}=\frac{p}{\sum_{i=1}^{p}\left\{\frac{\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i b_{ii}}-d\left(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i b_{ii}}\right)\right\}} \tag{18}$$

$$\hat{k}_{AM}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\frac{\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i b_{ii}}-d\left(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i b_{ii}}\right)} \tag{19}$$

$$\hat{k}_{GM}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i b_{ii}}-d\left(\frac{1}{\lambda_i}+\frac{\hat{\alpha}_i^2}{\lambda_i b_{ii}}\right)\right\}^{1/p}} \tag{20}$$

最后我们使用 Özkale 和 Kaçiranlar [15]提出的迭代方法对模拟的 k 和 d 进行取值：

步骤一：根据文献 Özkale 和 Kaçiranlar [15]中的定理 3.1 计算 $\hat{d}<\min\left\{\left(1+\frac{\hat{\alpha}_i^2}{b_{ii}}\right)\Big/\left(\frac{\hat{\alpha}_i^2}{b_{ii}}\right)\right\}$ 的值；

步骤二：用步骤一中 $\hat{d}$ 的值来估计 $\hat{k}_{HM}$， $\hat{k}_{AM}$， $\hat{k}_{GM}$ 的值；

步骤三：用步骤二中的 $\hat{k}_{HM}$， $\hat{k}_{AM}$， $\hat{k}_{GM}$ 的值来计算(14)式中 $\hat{d}_{opt}$ 的值；

步骤四：如果 $\hat{d}_{opt}<0$，则 $\hat{d}_{opt}=\hat{d}$。其中 $0<\hat{d}_{opt}<1$， $0<\hat{d}<1$。

4. 蒙特卡罗模拟

接下来我们用蒙特卡罗模拟来验证估计 MLE，LE，LTE，TP，SRE，SRLE，SRLTE 和 SRTPE 在 MSE 准则下的优良性。由文献 McDonald 和 Galarneau [16]使用下面等式生成解释变量：

$$x_{ij}=\left(1-\rho^2\right)^{1/2}z_{ij}+\rho z_{i,p+1},\quad i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,p \tag{21}$$

其中，z_{ij} 是独立标准正态伪随机数，ρ^2 表示任意两个解释变量的相关性。在模拟实验中，我们取 $p=4$，样本数 $n=100$， ρ 考虑 0.85，0.9 和 0.95 三种不同的情况。 y_i 由 $\pi_i=\frac{\exp(x_i'\beta)}{1+\exp(x_i'\beta)}$ 服从伯努利二项分布

而产生。对于 $\beta_1,\cdots,\beta_p$ 满足 $\sum_{j=1}^{p}\beta_j^2=1$。

此外，等式(6)中的约束矩阵我们的选取如下：

$$H=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix} \text{和 } \Psi=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{22}$$

模拟次数重复 2000 次，估计 MLE，LE，LTE，TPE，SRE，SRLE，SRLTE 和 SRTPE 的 MSE 使用下面等式得到：

$$MSE\left(\tilde{\beta}\right)=\frac{\sum_{r=1}^{2000}\left(\tilde{\beta}_r-\beta\right)'\left(\tilde{\beta}_r-\beta\right)}{2000} \tag{23}$$

结果如下：

Table 1. Estimated MSE values of the MLE, LE, LTE, TP, SRE, SRLE, SRLTE, SRTPE when $\rho=0.85$

表 1. 当 $\rho=0.85$ 时，估计 MLE，LE，LTE，TP，SRE，SRLE，SRLTE，SRTPE 的 MSE

(k, d)	$\left(\hat{k}_{HM},\hat{d}_{opt}\right)$	$\left(\hat{k}_{AM},\hat{d}_{opt}\right)$	$\left(\hat{k}_{GM},\hat{d}_{opt}\right)$
	(25.0455, 0.2641)	(337.2983, 0.5669)	(89.9426, 0.4944)
MLE	1.1252	1.1252	1.1252
LE	0.6757	0.8544	0.8144
LTE	0.2797	0.8772	0.6700
TP	0.2619	0.5198	0.4508
SRE	0.7150	0.7150	0.7150
SRLE	0.4406	0.5500	0.5256
SRLTE	0.2755	0.8771	0.6696
SRTPE	0.2293	0.3949	0.3522

Table 2. Estimated MSE values of the MLE, LE, LTE, TP, SRE, SRLE, SRLTE, SRTPE when $\rho=0.9$

表 2. 当 $\rho=0.9$ 时，估计 MLE，LE，LTE，TP，SRE，SRLE，SRLTE，SRTPE 的 MSE

(k, d)	$\left(\hat{k}_{HM},\hat{d}_{opt}\right)$	$\left(\hat{k}_{AM},\hat{d}_{opt}\right)$	$\left(\hat{k}_{GM},\hat{d}_{opt}\right)$
	(39.0918, 0.2062)	(25144.4000, 0.5090)	(665.5201, 0.4910)
MLE	1.7130	1.7130	1.7130
LE	0.8765	1.1187	1.0710
LTE	0.3829	0.9122	0.7731
TP	0.3522	0.6547	0.5877
SRE	0.9154	0.9154	0.9154
SRLE	0.4893	0.6134	0.5891
SRLTE	0.3814	0.9121	0.7730
SRTPE	0.2902	0.4571	0.4216

Table 3. Estimated MSE values of the MLE, LE, LTE, TP, SRE, SRLE, SRLTE, SRTPE when $\rho = 0.95$
表 3. 当 $\rho = 0.95$ 时，估计 MLE，LE，LTE，TP，SRE，SRLE，SRLTE，SRTPE 的 MSE

(k, d)	$(\hat{k}_{HM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{AM}, \hat{d}_{opt})$	$(\hat{k}_{GM}, \hat{d}_{opt})$
	(41.3281, 0.1702)	(4475.3980, 0.4372)	(259.2845, 0.3898)
MLE	3.5490	3.5490	3.5490
LE	1.0249	1.5793	1.4230
LTE	0.3972	0.8998	0.7285
TP	0.3962	0.8992	0.7383
SRE	1.3014	1.3014	1.3014
SRLE	0.4224	0.6179	0.5632
SRLTE	0.3960	0.8998	0.7285
SRTPE	0.3192	0.5315	0.4690

由表 1~3 可知，对建议的 k 和 d 值和给定的 ρ 为 0.85，0.9 和 0.95 三个取值，随机约束两参数极大似然估计的 MSE 均小于其他估计的 MSE，即此时随机约束两参数极大似然估计在均方误差意义下优于其他各估计。同时，由表 1~3 可知，对给定的 ρ 为 0.85，0.9 和 0.95，均有在 k 取 $\hat{k}_{HM}$ 时 SRTPE，SRLTE，SRLE，LTE，LE 和 TPE 的 MSE 小于 k 取 $\hat{k}_{AM}$ 和 $\hat{k}_{GM}$ 时的 MSE，即此时 $\hat{k}_{HM}$ 优于 $\hat{k}_{AM}$ 和 $\hat{k}_{GM}$。由表 1~3 还可以看出，对建议的 k 和 d 值，随机约束两参数极大似然估计的 MSE 随着 ρ 的增大而增大，即解释变量之间的相关性增加，则新估计的 MSE 值会增加。

5. 总结

本文中，我们在二元逻辑回归模型中提出了一个新的估计即随机约束两参数极大似然估计。为了研究所提出估计的性质，理论上，我们在 MSEM 准则下对 Liu 极大似然估计，Liu-Type 极大似然估计，两参数极大似然估计，随机约束极大似然估计，随机约束 Liu 极大似然估计，随机约束 Liu-Type 极大似然估计和随机约束两参数极大似然估计进行了比较，并得出了在 MSEM 准则下随机约束两参数极大似然估计优于 SRLTE，SRLE，SRE，LTE，LE 和 TPE 的充要或充分条件。实验上，我们用了蒙特卡罗模拟实验来比较了几个估计的优良性，验证了对建议的 k 和 d 值和给定的 ρ 为 0.85，0.9 和 0.95 情况下，新估计在 MSE 准则下优于 SRLTE，SRLE，SRE，LTE，LE 和 TPE。

参考文献

[1] Schaefer, R.L., Roi, L.D. and Wolfe, R.A. (1984) A Ridge Logistic Estimator. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **13**, 99-113. https://doi.org/10.1080/03610928408828664

[2] Månsson, K., Kibria, B.M.G. and Shukur, G. (2012) On Liu Estimators for the Logit Regression Model. *Economic Modelling*, **29**, 1483-1488. https://doi.org/10.1016/j.econmod.2011.11.015

[3] Asar, Y. (2017) Some New Methods to Solve Multicollinearity in Logistic Regression. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **46**, 2576-2586. https://doi.org/10.1080/03610918.2015.1053925

[4] Huang, J. (2012) A Simulation Research on a Biased Estimator in Logistic Regression Model. *Communications in Computer and Information Science*, **316**, 389-395. https://doi.org/10.1007/978-3-642-34289-9_43

[5] Nagarajah, V. and Wijekoon, P. (2015) Stochastic Restricted Maximum Likelihood Estimator in Logistic Regression Model. *Open Journal of Statistics*, **5**, 837-851. https://doi.org/10.4236/ojs.2015.57082

[6] Varathan, N. and Wijekoon, P. (2016) Ridge Estimator in Logistic Regression under Stochastic Linear Restrictions. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, **15**, 1-14. https://doi.org/10.9734/BJMCS/2016/24585

[7] Varathan, N. and Wijekoon, P. (2016) Logistic Liu Estimator under Stochastic Linear Restrictions. *Statistical Papers*, **60**, 945-962. https://doi.org/10.1007/s00362-016-0856-6

[8] Wu, J. and Asar, Y. (2017) On the Stochastic Restricted Liu-Type Maximum Likelihood Estimator in Logistic Regression. *Communications*, **68**, 643-653.

[9] Rao, C.R. and Toutenburg, H. (1995) Linear Models: Least Squares and Alternatives. 2nd Edition, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0024-1

[10] Rao, C.R., Toutenburg, H., Shalabh and Heumann, C. (2008) Linear Models and Generalizations. Springer, Berlin.

[11] Trenkler, G. and Toutenburg, H. (1990) Mean Square Error Matrix Comparisons between Biased Estimators: An Overview of Recent Results. *Statistical Papers*, **31**, 165-179. https://doi.org/10.1007/BF02924687

[12] Hoerl, A.E. and Kennard, R.W. (1970) Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems. *Technometrics*, **12**, 55-67. https://doi.org/10.1080/00401706.1970.10488634

[13] Kibria, B.M.G. (2003) Performance of Some New Ridge Regression Estimators. *Communication in Statistics—Simulation and Computation*, **32**, 419-435. https://doi.org/10.1081/SAC-120017499

[14] Hoerl, A.E., Kannard, R.W. and Baldwin, K.F. (1975) Ridge Regression: Some Simulations. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **4**, 105-123. https://doi.org/10.1080/03610927508827232

[15] Özkale, M.R. and Kaçiranlar, S. (2007) The Restricted and Unrestricted Two-Parameter Estimators. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **36**, 2707-2725. https://doi.org/10.1080/03610920701386877

[16] McDonald, G.C. and Galarneau, D.I. (1975) A Monte Carlo Evaluation of Some Ridge-Type Estimators. *Journal of the American Statistical Association*, **70**, 407-416. https://doi.org/10.1080/01621459.1975.10479882