Statistics and Application 统计学与应用**, 2020, 9(4), 578-581**
Published Online August 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2020.94061

Understanding of Kendall's Coefficient of Concordance

Tianfang Zhang, Chunfang Cheng

College of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: tifa8804@163.com

Received: Jul. 16th, 2020; accepted: Jul. 28th, 2020; published: Aug. 5th, 2020

Abstract

In nonparametric statistics, Kendall's coefficient of concordance is usually used to test the coefficient of multiple variables or the results consistent. In order to help the students to understand it more clearly, this paper proposed a simple and easy understanding method from a different perspective.

Keywords

Kendall's Coefficient of Concordance, Nonparameter, Coefficient, Variable

关于Kendall协和系数的理解

张天芳，陈春芳

江西师范大学，江西 南昌
Email: tifa8804@163.com

收稿日期：2020年7月16日；录用日期：2020年7月28日；发布日期：2020年8月5日

摘 要

在非参数统计中，检验多个变量的相关性或检验结果的一致性常用Kendall协和系数。本文主要从另一视野出发，对Kendall协和系数提出一种简洁易懂的方式，帮助学生理解Kendall协和系数。

关键词

Kendall协和系数，非参数，相关性，变量

文章引用: 张天芳，陈春芳. 关于 Kendall 协和系数的理解[J]. 统计学与应用, 2020, 9(4): 578-581.
DOI: 10.12677/sa.2020.94061

1. 引言

变量之间相关程度的度量，在参数统计中最常用的是 Pearson 矩相关系数。在非参数统计[1]中，Spearman 秩相关系数和 Kendall-τ 相关系数是常用的方法。但是它们只适用于两个变量的情形，在实际中常常需要处理多个变量之间的相关性，或多个评价的一致性，如凭手感评定毛织物的紧密程度，评论员的检验结果是否一致[2]。对这类问题，可采用 Kendall 协和系数(Kendall's coefficient of concordance) [3]来解决。Kendall 协和系数也称为 Kendall W 系数，由 M.G. Kendall 和 B. Babington Smith 于 1939 年引入，用于检验多个变量之间的相关性。它以多变量秩和检验为基础，主要用于双因素设计或区组设计问题的检验。在非参数统计教学中学生常常对 Kendall 协和系数的理解存在困难，本文旨在提供一种简洁易懂的方法，帮助学生加强理解。

2. Kendall 协和系数的基本原理

由于一致性检验问题常可以转化成区组问题，如裁判的评分是否一致，每个裁判即可看成一个区组，因此检验一致性也可理解成检验区组之间有无差异。为此我们引入区组设计的一些相关概念。设有 b 个区组，k 个处理，第 $j\left(j=1,2,\cdots,b\right)$ 个区组内的 k 个观测值分别为 $x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{kj}$，其分布函数为 $F_j\left(x-\theta_i\right)$。要检验处理之间有无差异，原假设和备择假设分别为

$H_0:\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_k$， $H_1:\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 不全相等。

其中 θ_i 为第 i 个处理的位置参数。当然，若处理间有某种趋势时，如上升趋势，备择假设为

$$H_1:\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_k,\theta_1<\theta_k\text{。}$$

为了解决这一问题，在非参数统计中，我们先要对同一区组内的观测值由小到大进行排序，再求出观测值的秩在同一处理内的平均。如表 1 所示。

Table 1. The case of k treatments and b blocks
表 1. k 个处理 b 个区组的情况

	区组 1	区组 2	...	区组 b	秩和	秩均值
处理 1	R_{11}	R_{12}	...	R_{1b}	R_{1+}	$\overline{R}_1$
处理 2	R_{k+}	R_{22}	...	R_{2b}	R_{2+}	$\overline{R}_2$
...	...	...	...	...	...	...
处理 k	R_{k1}	R_{k2}	...	R_{kb}	R_{k+}	$\overline{R}_k$

R_{ij} 为第 i 个处理第 j 个区组内的观测值 x_{ij} 在区组 j 内的排序，当同一区组内有相同的观测值(即有结)时，此时要对秩取平均。R_{i+} 为第 i 个处理的秩和，R_i 为第 i 个处理的秩平均。

其次，计算处理间的方差 $SSB=b\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{R_i}-\overline{R}\right)$，再计算同一处理内的方差 $SSE=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\left(R_{ij}-\overline{R}_i\right)^2$ 以及总方差 $SST=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\left(R_{ij}-\overline{R}\right)^2$。特别强调的是，此处组间的方差是处理间的方差，组内的方差为同一处理内的方差。

我们将对总方差(SST)进行分解，得到 $SST = SSB + SSE$，当同一区组内没有相同的观测值时，总方差

$$SST = \frac{bk\left(k^2-1\right)}{12}, \tag{1}$$

为常数。若处理间的方差 SSB 增大，处理内的方差 SSE 会减小。当处理内的方差 SSE 减小到一定程度时，即可认为评论员对同一处理的打分具有一致性，显然，此时处理间的方差足够大。可借用 Friedman 所提出的 Friedman 检验统计量[2]，即

$$Q = \frac{12}{k\left(k+1\right)} SSB \tag{2}$$

来判断原假设是否成立。当 Q 比较大时，拒绝原假设，认为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 不全相等。由以上的分析我们知道，拒绝原假设时，处理间的方差足够大，意味着处理内的方差足够小，即评论员的打分一致，所以在一致性检验中，原假设和备择假设转变为

H_0：评价不一致；H_1：评价具有一致性。

这是在教学中学生最容易混淆的。类似于相关系数的值规范在[−1, 1]之间，我们也对 Q 进行规范，将(1)和(2)带入下列式子中，得到

$$W = \frac{SSB}{SST} = \frac{Q}{b\left(k-1\right)}, \tag{3}$$

即为 M.G. Kendall 和 B. Babington Smith 提出的 Kendall 协和系数。W 的取值范围为[0, 1]，越接近 1 说明相关性越大，评价越一致，在实际中我们可以借助软件计算 p 值，也可以直接采用 SPSS 进行判断。

3. 案例分析

案例：请 6 位电影评家对 4 部电影打分，评分结果见表 2：试问三个评家的评价结果是否具有一致性？$\alpha = 0.05$。

Table 2. The scores by the 6 film critics
表 2. 6 个影评家的评分结果

电影	影评家 1	影评家 2	影评家 3	影评家 4	影评家 5	影评家 6
1	1	2	1	2	1	1
2	3	3	2	1	3	2
3	4	1	3	4	2	4
4	2	4	4	3	4	3

此时，区组为影评家，处理为电影，参数 $k = 4, b = 6$。检验步骤为：

1) 原假设 H0:看法不一致；备择假设 H1:看法一致，
2) 用 kenddal-W 检验计算 $Q = 12*SSB/4*5 = 8.4$，或 $W = 8.4/6*3 = 0.467$，
3) 查 Friedman 检验统计量表，$k = 4$，$b = 6$ 得到 $\alpha = 0.05$ 时的临界值为 7.6，或计算 $p = P\left(W \ge 0.467\right) = 0.038$，
4) 拒绝原假设，认为看法一致。

采用 SPSS 进行操作，步骤如下：

1) 输入变量为电影 1，电影 2，电影 3，电影 4，

2) 接下来在个案中录入各影评家的评分，共 6 行，

3) 统计－非参数检验－k 个相关样本－检验变量－检验类型：kendall W 检验，结果见表 3，与手算结果一致。

Table 3. Test statistics
表 3. 检验统计量

N	6
Kendall W[a]	0.467
卡方	8.400
df	3
渐近显著性	0.038

a. Kendall 协同系数。

4. 总结

本文针对学生在课堂上对 Kendall 协和系数理解较为困难，从方差分析的角度解释 Kendall 协和系数，帮助学生理解 Kendall 协和系数的来源，由此知道为何看法一致放在备择假设中。并从实例出发，帮助学生解答有关一致性检验的问题。

基金项目

本项目由国家自然科学基金(基金号：11961035，11661076)支持。

参考文献

[1] 吴喜之. 非参数统计[M]. 第二版. 北京: 中国统计出版社, 2011.

[2] 王静龙, 梁小筠. 非参数统计分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.

[3] Randles, R.H. and Wolfe, D.A. (1979) Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics. John Wiley & Sons, New York.