Statistics and Application 统计学与应用, 2020, 9(6), 944-957
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2020.96099

Hans汉斯

由G-布朗运动驱动的SIR传染病模型

丁　敏，郭　睿，闫理坦

东华大学，上海
Email: dmzjm@outlook.com

收稿日期：2020年11月15日；录用日期：2020年11月30日；发布日期：2020年12月7日

摘　要

本文研究了由G-布朗运动驱动的SIR传染病模型，证明了此模型具有唯一的全局正解。另外，还研究了在一定条件下模型的解分别与无病均衡点和有病均衡点的渐近行为。

关键词

传染病模型，G-布朗运动，全局正解，渐近行为

SIR Model Driven by G-Brownian Motion

Min Ding, Rui Guo, Litan Yan

Donghua University, Shanghai
Email: dmzjm@outlook.com

Received: Nov. 15th, 2020; accepted: Nov. 30th, 2020; published: Dec. 7th, 2020

Abstract

In this paper, we investigate the stochastic SIR model driven by G-Brownian motion. We show that it has a unique global positive solution. In addition, the asymptotic behavior of the model solution to the disease-free equilibrium point and the epidemic equilibrium point under certain conditions is studied.

Keywords

Stochastic SIR Model, G-Brownian Motion, Global Positive Solution, Asymptotic Behavior

文章引用: 丁敏, 郭睿, 闫理坦. 由 G-布朗运动驱动的 SIR 传染病模型[J]. 统计学与应用, 2020, 9(6): 944-957.
DOI: 10.12677/sa.2020.96099

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

SIR 传染病模型在现实生活中有着非常丰富的应用，它计算一段时间内封闭人群中感染传染病的理论人数。其中最简单的 SIR 模型应该是在 1927 年提出的 Kermack-McKendrick 模型[1]。直至 1979 年，此模型再被 Anderson and May [2]重新研究起来。其中最基本的 SIR 模型的形式如下：

$$\begin{cases}\dot{S}(t)=\Lambda-\beta S(t)I(t)-\mu S(t),\\ \dot{I}(t)=\beta S(t)I(t)-(\mu+\varepsilon+\gamma)I(t),\\ \dot{R}(t)=\gamma I(t)-\mu R(t),\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，$S(t)$ 是易受感染的人群，$I(t)$ 是已受感染的人群，$R(t)$ 是已经康复的人群。Λ 是易受感染人群的初始值，假设传染病的自然死亡率相等用常数 μ 表示；而已受感染人群 $I(t)$ 遭受到额外的死亡率记为 ε；β 和 γ 分别代表疾病传播系数和从感染中恢复的比率。如果 $R_0=\dfrac{\beta\Lambda}{\mu(\mu+\varepsilon+\gamma)}\le 1$，则模型(1.1)存在一个有病均衡点 $E_0=\left(\dfrac{\Lambda}{\mu},0,0\right)$。如果 $R_0>1$，则存在一个有病均衡点

$$E^*=\left(\frac{\mu+\varepsilon+\gamma}{\beta},\frac{\Lambda}{\mu+\varepsilon+\gamma}-\frac{\mu}{\beta},\frac{\Lambda\gamma}{\mu(\mu+\varepsilon+\gamma)}-\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

然而，在实际中，传染病模型也不可避免受到环境噪声的干扰，Jiang [3]等人研究了模型(1.1)在白噪声干扰下的模型。本人将模型中的白噪声推广到了近年来比较热门的次线性期望框架下进行研究，并且得出了比较理想的结论，研究的模型如下：

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=\left(\Lambda-\beta S(t)I(t)-\mu S(t)\right)\mathrm{d}t+c_1S(t)\mathrm{d}\langle B_1,B_1\rangle_t+\sigma_1S(t)\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}I(t)=\left(\beta S(t)I(t)-(\mu+\varepsilon+\gamma)I(t)\right)\mathrm{d}t+c_2I(t)\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_t+\sigma_2I(t)\mathrm{d}B_2(t),\\ \mathrm{d}R(t)=\left(\gamma I(t)-\mu R(t)\right)\mathrm{d}t+c_3R\mathrm{d}\langle B_3,B_3\rangle_t+\sigma_3R\mathrm{d}B_3(t),\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 B_i 是两两相互独立的 G-布朗运动，它们都满足 $\dfrac{B_i(t)}{\sqrt{t}}\overset{d}{=}N\left(0,\left[\underline{\sigma}_i^2,\overline{\sigma}_i^2\right]\right),i=1,2,3$。$c_1,c_2,c_3\ge 0$ 是 G-布朗运动二次变差过程对应的扰动强度，$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\ge 0$ 是 G-布朗运动对应的扰动强度。

2. 预备知识

这节，我们介绍一些关于次线性期望的基本概念和性质，其中的细节读者们可以参考[4] [5] [6]。如果想要了解次线性期望发展的概况可以参考[7]。

2.1. 次线性期望的一些基本的概念

定义 2.1 Ω 是一个给定的集合，$\mathcal{H}$ 是一个定义在 Ω 实值函数的线性空间并且满足：对所有的常数 $c\in\mathcal{H}$ 还满足：若 $X\in\mathcal{H}$，则 $|X|\in\mathcal{H}$。那么 $\mathcal{H}$ 就认为是一个“随机变量”的空间。而在这个空间上的次线性期望 $\mathbb{E}$ 是一个泛函 $\mathbb{E}$：$\mathcal{H}\mapsto\mathbb{R}$。对 $X,Y\in\mathcal{H}$，满足以下性质：

(1) 单调性： $\mathbb{E}[X]\geq\mathbb{E}[Y]$，若 $X\geq Y$；

(2) 保常数性： $\mathbb{E}[c]=c,\forall c\in\mathbb{R}$；

(3) 次可加性： $\mathbb{E}[X+Y]\leq\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$；

(4) 正齐次性： $\mathbb{E}[\lambda X]=\lambda\mathbb{E}[X],\forall\lambda\geq 0$；

三元组 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 称为一个次线性期望空间， $X\in\mathcal{H}$ 称为 $(\Omega,\mathcal{H})$ 上的一个随机变量。我们一般称 $Y=(Y_1,\cdots,Y_d)$， $Y_i\in\mathcal{H}$ 是 $(\Omega,\mathcal{H})$ 上的一个 d-维随机向量。

现在我们考虑一个随机变量空间 $\mathcal{H}$ 满足若 $X_i\in\mathcal{H},i=1,\cdots,d$， 则

$$\varphi(X_1,\cdots,X_d)\in\mathcal{H},\ \forall\varphi\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d)$$

这里 $C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d)$ 是在 $\mathbb{R}^d$ 上所有有界 Lipschitz 连续的函数组成的空间。

定义 2.2 一个 m-维随机向量 $Y=(Y_1,\cdots,Y_m)$ 称**独立于**另一个 n-维随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$，如果对每一个 $\varphi\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$，

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1)]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\varphi(x,Y)]_{x=X}\right]$$

令 X_1 和 X_2 是定义在各自的次线性期望空间 $(\Omega_1,\mathcal{H}_1,\mathbb{E}_1)$，$(\Omega_2,\mathcal{H}_2,\mathbb{E}_2)$ 上的 n-维随机向量。我们称它们是**同分布**的，记为 $X_1\overset{d}{=}X_2$，若对每个 $\varphi\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^n)$ 都有

$$\mathbb{E}_1[\varphi(X_1)]=\mathbb{E}_2[\varphi(X_2)]$$

若 $X,\bar{X}$ 是两个在 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 上的 n-维随机向量，如果 $\bar{X}$ 与 X 同分布并且独立于 X，则称 $\bar{X}$ 是 X 的**独立拷贝**。

定义 2.3 (G-正态分布) 一个在次线性空间 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 上的 d-维随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_d)$ 称为 G-正态分布，若对每个 $a,b\geq 0$ 我们有

$$aX+b\bar{X}\overset{d}{=}\sqrt{a^2+b^2}X$$

其中 $\bar{X}$ 是 X 的独立拷贝。

现在我们给出一个 G-正态分布随机向量 X 的一个描述性性质。

引理 2.1 X 是一个 d-维正态随机向量，则 X 的分布由下式刻画：

$$u(t,x)=\mathbb{E}\left[\phi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right],\ \phi\in C_{b,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}^d).$$

$u(t,x)$ 定义在 $[0,\infty]\times\mathbb{R}^d$ 上是如下 G-热方程的唯一粘性解[8]：

$$\begin{cases}\partial_t u-G(D^2u)=0,\\ u(0,x)=\varphi(x),\end{cases}\tag{2.1.1}$$

其中 D^2u 是 u 的 Hessian 矩阵， $G:\mathbb{S}(d)\to\mathbb{R}^d$ 定义为：

$$G(A):=\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(AX,X)\right],\ A\in\mathbb{S}(d),$$

$S(d)$ 是一个 $d\times d$ 对称矩阵空间。在标量情况下， $G(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\bar{\sigma}^2\alpha^+-\underline{\sigma}^2\alpha^-\right)$， $\alpha\in\mathbb{R}$，其中，

$$\bar{\sigma}^2:=\mathbb{E}[X^2],\underline{\sigma}^2:=-\mathbb{E}[-X^2]$$

定义 2.4 (G-布朗运动) 一个在次线性期望空间 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 上的 d-维随机过程 $(B_t)_{t\geq 0}$ 称为 G-布朗运动，

若满足下列性质：

(i) $B_0(\omega)=0$；

(ii) 对每个 $t,s\ge 0$，$B_{t+s}-B_t$ 和 B_s 是同分布的并且 $B_{t+s}-B_t$ 独立于 $\left(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n}\right)$，对每个 $n\in\mathbb{N}$，$0\le t_1\le\cdots\le t_n\le t$；

(iii) $\lim\limits_{t\downarrow 0}\mathbb{E}\left[\left|B_t\right|^3\right]t^{-1}=0$；

此外，如果 $\mathbb{E}\left[B_t\right]=\mathbb{E}\left[-B_t\right]=0$，则 $\left(B_t\right)_{t\ge 0}$ 称为一个对称的 G-布朗运动。

下面的引理给出了对称 G-布朗运动的刻画。

引理 2.2 令 $\left(B_t\right)_{t\ge 0}$ 是一个在次线性期望空间 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 上的 $\mathbb{R}^d$-值对称 G-布朗运动。则对每一个固定的 $\varphi\in C_{b,\mathrm{Lip}}\left(\mathbb{R}^d\right)$，函数 $u(t,x):=\mathbb{E}\left[\varphi\left(x+B_t\right)\right],(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 是下列偏微分方程的粘性解

$$u(t,x):=\mathbb{E}\left[\varphi\left(x+B_t\right)\right],(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$$

这里

$$G(A)=\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left\langle AB_1,B_1\right\rangle\right],A\in\mathbb{S}(d)$$

特别地，B_1 是 G-正态分布并且 $B_t\overset{d}{=}\sqrt{t}B_1$。

引理 2.3 设 $\left(B_t\right)_{t\ge 0}$ 为定义在次线性期望空间 $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ 上的一个对称的一维布朗运动，则

$$\frac{B_t}{\sqrt{t}}\overset{d}{=}N\left(0,\left[\underline{\sigma}^2,\bar{\sigma}^2\right]\right)$$

其中 $\bar{\sigma}^2:=\mathbb{E}\left[X^2\right],\underline{\sigma}^2:=-\mathbb{E}\left[-X^2\right]$。

2.2. G-随机积分

对 $T\in\mathbb{R}_+$，一个 $[0,T]$ 的划分 π_T 是一个有序且有限的子集 $\pi_T=t_1,\cdots,t_N$ 使得 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$。令 $p\ge 1$ 是固定的，定义

$$M_G^{p,0}(0,T)=\left\{\eta_t(\omega)=\sum_{j=1}^{N}\xi_{j-1}(\omega)I_{\left[t_{j-1},t_j\right)}(t);\xi_{j-1}\in L_G^p\left(\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right),t_{j-1}<t_j,j=1,2,\cdots,N,t_0=0,t_N=T,N\ge 1\right\}$$

其中，$L_G^p\left(\mathcal{F}_t\right)=\xi\in L_G^1\left(\mathcal{F}_t\right);\mathbb{E}\left(|\xi|^p\right)<\infty$。对于 $\eta_t=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\omega)I_{\left[t_j,t_j+1\right)}(t)\in M_G^{p,0}(0,T)$，设

$$\hat{\mathbb{E}}_T(\eta):=\frac{1}{T}\int_0^T\mathbb{E}\left(\eta_t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{E}\left(\xi_j\right)\left(t_{j+1}-t_j\right).$$

则 $\hat{\mathbb{E}}_T:M_G^{p,0}(0,T)\mapsto\mathbb{R}$ 形成一个次线性期望空间。对每个 $p\ge 1$，$M_G^p(0,T)$ 记为 $M_G^{p,0}(0,T)$ 的完备化空间在模 $\|\eta\|_{M_G^p(0,T)}=\frac{1}{T}\left(\int_0^T\mathbb{E}\left(\left|\eta_t\right|^p\right)\mathrm{d}t\right)^{1/p}$ 的意义下。

对每个 $\eta\in M_G^{2,0}(0,T)$ 有如下形式：

$$\eta_t(\omega)=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\omega)I_{\left[t_j,t_{j+1}\right)}(t),$$

定义：

$$I(\eta)=\int_0^T\eta(s)\mathrm{d}B_s^{\mathbf{a}}:=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j\left(B_{t_{j+1}}^{\mathbf{a}}-B_{t_j}^{\mathbf{a}}\right).$$

映射 $I: M_G^{2,0}(0,T) \mapsto L_G^2(\mathcal{F}_T)$ 可被连续延拓到 $I: M_G^2(0,T) \mapsto L_G^2(\mathcal{F}_T)$。对每个 $\eta \in M_G^2(0,T)$，G-随机积分定义为

$$\int_0^T \eta(s) \mathrm{d}B_s^{\mathbf{a}} := I(\eta) \tag{2.2.1}$$

2.3. G-布朗运动的二次变差过程

定义映射 $M_G^{0,1}(0,T) \mapsto L_G^1(\mathcal{F}_T)$ 如下：

$$Q_{0,T}(\eta) = \int_0^T \eta(s) \mathrm{d}\langle B^{\mathbf{a}}\rangle_s := \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \left(\langle B^{\mathbf{a}}\rangle_{t_{k+1}} - \langle B^{\mathbf{a}}\rangle_{t_k}\right).$$

那么 $Q_{0,T}$ 可被唯一延拓到 $M_G^1(0,T)$，我们仍然记这个映射为

$$\int_0^T \eta(s) \mathrm{d}\langle B^{\mathbf{a}}\rangle_s = Q_{0,T}(\eta),\quad \eta \in M_G^1(0,T).$$

性质 2.1 对每个 $\eta \in M_G^2(0,T)$，我们有

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t \mathrm{d}B_t^{\mathbf{a}}\right] = 0 \tag{2.2.2}$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \eta_t \mathrm{d}B_t^{\mathbf{a}}\right)^2\right] \le \sigma_{\mathbf{aa}^{\mathrm{T}}}^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t \eta_t^2 \mathrm{d}t\right] \tag{2.2.3}$$

这里，$(B_t)_{t\ge0}$ 是一个 d-维的 G-布朗运动。对每个给定的 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$，我们记 $B_t^{\mathbf{a}} := \langle \mathbf{a}, B_t\rangle$，则 $(B_t)_{t\ge0}$ 是一维的 $G_{\mathbf{a}}$-布朗运动，$G_t^{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{\mathbf{aa}^{\mathrm{T}}}^2 \alpha^+ - \sigma_{-\mathbf{aa}^{\mathrm{T}}}^2 \alpha^-\right)$，其中 $\sigma_{\mathbf{aa}^{\mathrm{T}}}^2 = 2G(\mathbf{aa}^{\mathrm{T}})$，$\sigma_{-\mathbf{aa}^{\mathrm{T}}}^2 = -2G(-\mathbf{aa}^{\mathrm{T}})$。

令 $\mathbf{a} = (a_1,\cdots,a_d)^{\mathrm{T}}$，$\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1,\cdots,\bar{a}_d)^{\mathrm{T}}$ 是给定的两个在 $\mathbb{R}^d$ 上的向量，则 $B^{\mathbf{a}}$ 和 $B^{\bar{a}}$ 的协变差过程定义为 $\langle B^{\mathbf{a}}, B^{\bar{\mathbf{a}}}\rangle_t := \frac{1}{4}\left(\langle B^{\mathbf{a}} + B^{\bar{\mathbf{a}}}\rangle_t - \langle B^{\mathbf{a}} - B^{\bar{\mathbf{a}}}\rangle_t\right)$。

2.4. 关于二次变差的随机积分

定义一个映射 $M_G^{0,1}(0,T) \mapsto L_G^1(\mathcal{F}_T)$ 如下：

$$Q_{0,T}(\eta) = \int_0^T \eta(s) \mathrm{d}\langle B^{\mathbf{a}}\rangle_s := \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \left(\langle B^{\mathbf{a}}\rangle_{t_{k+1}} - \langle B^{\mathbf{a}}\rangle_{t_k}\right)$$

则 $Q_{0,T}$ 可以唯一地延拓到 $M_G^1(0,T)$，我们仍然记这个映射为

$$\int_0^T \eta(s) \mathrm{d}\langle B^{\mathbf{a}}\rangle_s = Q_{0,T}(\eta),\quad \eta \in M_G^1(0,T)$$

定理 2.1 (G-itô 公式) 令 α^v，β^{vj}，$\eta^{vij} \in M_G^2(0,T)$，$v = 1,\cdots,n$，$i,j = 1,\cdots,d$ 是有界的过程并且考虑

$$X_t^v = X_0^v + \int_0^t \alpha_s^v \mathrm{d}s + \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \eta_s^{vij} \mathrm{d}\langle B^i, B^j\rangle_s + \sum_{j=1}^d \int_0^t \beta_s^{vj} \mathrm{d}B_s^j$$

其中 X_0^v，$v = 1,\cdots,n$ 是一个常数。$\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ 是一个实值函数并且导数有界使得 $\partial_{x^\mu x^v}^2 \phi_{\mu,v=1}^n$ 是一致 Lipschitz 连续的，那么对每个 $t \in [0,T]$，在 $L_G^2(\mathcal{F}_t)$ 中

$$\begin{aligned}\phi(X_t) - \phi(X_s) &= \sum_{v=1}^n \sum_{j=1}^d \int_s^t \partial_{x^v} \phi(X_u) \beta_u^{vj} \mathrm{d}B_u^j + \sum_{v=1}^n \int_s^t \partial_{x_v} \phi(X_u) \alpha_u^v \mathrm{d}u \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mu,v=1}^n \sum_{i,j=1}^d \int_s^t \partial_{x^\mu x^v}^2 \phi(X_u) \beta_u^{\mu i} \beta_u^{vj} \mathrm{d}\langle B^i, B^j\rangle_u\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

注意：在 Gao [9]中，该定理的条件更弱一些。

性质 2.2 令 $\eta \in M_G^2(0,T)$，则

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \eta_t \mathrm{d}B_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 \mathrm{d}\langle B\rangle_t\right]$$

性质 2.3 对每个 $\eta \in M_G^1(0,T)$，

$$\mathbb{E}\left[\left|Q_{0,T}(\eta)\right|\right] \le \bar{\sigma}^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T |\eta_t| \mathrm{d}t\right]$$

2.5. 拟必然分析理论

P 是一个在 Ω 上的 Wiener 测度。记 $\mathcal{A}_{0,\infty}^{\Gamma}$ 是在 $[0,+\infty]$ 所有 Γ -值的 $\mathcal{F}_t, t \ge 0$ 适应过程组成的集合即 $\theta_t, t \ge 0 \in \mathcal{A}_{0,\infty}^{\Gamma}$ 当且仅当 θ_t 是 $\mathcal{F}_t := \sigma(\omega_s, s \le t)$ 可测的并且 $\theta_t \in \Gamma$ 对每个 $t \ge 0$。令 P_θ 是过程 $\int_0^t \theta_s \mathrm{d}\omega_s, t \ge 0$ 在 Wiener 测度 P 下的一个分布。

定义 2.5 (Choquet 容度)我们记 $\mathcal{P} = P_\theta : \theta \in \mathcal{A}_{0,\infty}^{\Gamma}$ 并且定义 $\bar{C}(A) := \sup\limits_{\theta \in \mathcal{A}_{0,\infty}^{\Gamma}} P_\theta(A), A \in \mathcal{B}(\Omega)$，则 $\mathcal{P}$ 是紧的并且 $\bar{C}(\cdot)$ 是一个 Choquet 溶度。

定义 2.6 (拟必然)集合 A 称为 polar 集，若 $\bar{C}(A) = 0$。如果一个性质是在 A^C 上满足，那么我们这个性质是拟必然成立的。

3. 主要结论

接下来介绍几个我们研究的主要结果。

3.1. 全局正解的存在唯一性

定理 3.1 对任意给定初值 $(S(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^3$，模型(1.2)存在一个唯一解 $(S(t), I(t), R(t))$，$t \ge 0$，并且对所有 $t \ge 0$，它的解是拟必然(q.s.)正的。

证明：因为方程的系数是局部李普希思连续的，对任意给定的初值 $(S(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^3$ 在 $t \in [0, \tau_e)$ 存在一个唯一局部解 $(S(t), I(t), R(t))$，这里 τ_e 是一个爆破时。为了证明解是全局的，我们只需要证明 $\tau_e = \infty$ q.s.。首先，我们证明 $S(t)$ 和 $I(t)$ 不会在有限时间里爆破到无穷的值。设 $k_0 > 0$ 充分大使得 $S(0) \in \left[\frac{1}{k_0}, k_0\right]$ 和 $I(0) \in \left[\frac{1}{k_0}, k_0\right]$ 同时成立。对每一个整数 $k \ge k_0$，定义停时：

$$\tau_k = \inf\left\{t \in [0, \tau_e) : S(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right) \text{或} I(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k\right)\right\} \tag{3.1.1}$$

在本篇论文的范畴内我们假定 $\inf \varnothing = \infty$。显然，$\tau_k$ 是随着 $k \to \infty$ 递增的。设 $\tau_\infty = \lim\limits_{k \to \infty} \tau_k$，所以 $\tau_\infty \le \tau_e$ q.s.。如果 $\tau_\infty = \infty$ q.s.成立，则 $\tau_e = \infty$ q.s.和 $(S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2$ q.s.对 $t \ge 0$ 成立。换句话说，为了完成证明我们只需证明 $\tau_e = \infty$ q.s.。下面运用反证法，假设 $\tau_e = \infty$ q.s.不成立，那么存在一组常数 $T > 0$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$ 使得：

$$\bar{C}\{\tau_\infty \le T\} > \varepsilon$$

因此存在一个整数 $k_1 \ge k_0$ 使得：

$$\bar{C}\{\tau_k \le T\} \ge \varepsilon \text{ 对一切 } k \ge k_1 \text{ 成立。} \tag{3.1.2}$$

接下来我们将使用李雅普诺夫(Lyapunov)分析方法，我们定义一个 C^2-函数 $V : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ 如下：

$$V(S,I)=\left(S-a-a\log\frac{S}{a}\right)+\left(I-1-\log I\right) \tag{3.1.3}$$

这里 a 是一个正常数，稍后会给出定义。这个函数的非负性可以由如下不等式推出：

$$u-1-\log u\geq 0\text{，对 }u>0\text{ 成立}$$

现在令 $k\geq k_0$，$T>0$ 是任意的，应用 itô 公式，我们得到：

$$\begin{aligned}
&V(S(t),I(t))\\
&=V(S(0),I(0))+\int_0^t\left(1-\frac{a}{S(s)}\right)\sigma_1 S(s)\mathrm{d}B_1(s)+\int_0^t\left(1-\frac{1}{I(s)}\right)\sigma_2 I(s)\mathrm{d}B_2(s)\\
&\quad+\int_0^t\left(1-\frac{a}{S(s)}\right)(\mathrm{A}-\beta S(s)I(s)-\mu S(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\left(1-\frac{1}{I(s)}\right)c_2 I(s)\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_s\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{a}{S^2(s)}c_1^2S^2(s)\mathrm{d}\langle B_1,B_1\rangle_s+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1}{I^2(s)}c_2^2I^2(s)\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_s\\
&=\int_0^t(\Lambda+a\mu+\mu+\varepsilon+\gamma)-(\mu+\beta)S(s)-\frac{a\Lambda}{S(s)}+\left[a\beta-(\mu+\varepsilon+\gamma)\right]I(s)\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_0^t\sigma_1(S(s)-a)\mathrm{d}B_1(s)+\int_0^t\sigma_2(I(s)-1)\mathrm{d}B_2(s)+V(S(0),I(0))\\
&\quad+\int_0^t c_1S(s)-ac_1+\frac{1}{2}c_1^2a\mathrm{d}\langle B_1,B_1\rangle_s+\int_0^t c_2I(s)-c_2+\frac{1}{2}c_2^2\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_s
\end{aligned}$$

选择 $a=\dfrac{\mu+\varepsilon+\gamma}{\beta}$ 使得 $\left[a\beta-(\mu+\varepsilon+\gamma)\right]I=0$，令 $K=\ \Lambda+a\mu+\varepsilon+\mu+\gamma$ 则

$$\begin{aligned}
&V(S(t),I(t))\\
&\leq V(S(0),I(0))+Kt+\int_0^t\sigma_1(S(s)-a)\mathrm{d}B_1(s)+\int_0^t\sigma_2(I(s)-1)\mathrm{d}B_2(s)\\
&\quad+\int_0^t c_1S(s)-ac_1+\frac{1}{2}c_1^2a\mathrm{d}\langle B_1,B_1\rangle_s+\int_0^t c_2I(s)-c_2+\frac{1}{2}c_2^2\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_s
\end{aligned}$$

我们现在用 $\tau_k\wedge T$ 代替 t，并且两边取 G-期望：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[V(S(\tau_k\wedge T),I(\tau_k\wedge T))\right]\\
&\leq V(S(0),I(0))+\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_k\wedge T}c_1S(s)-ac_1+\frac{1}{2}c_1^2a\mathrm{d}\langle B_1,B_1\rangle_s\right]\\
&\quad+\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_k\wedge T}c_2I(s)-c_2+\frac{1}{2}c_2^2\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_s\right]+\mathbb{E}\left[K(\tau_k\wedge T)\right]\\
&\leq V(S(0),I(0))+\mathbb{E}\left[\left(ac_1+\frac{1}{2}c_1^2a\right)\langle B_1,B_1\rangle_T\right]+\mathbb{E}\left[\left(c_2+\frac{1}{2}\right)\langle B_2,B_2\rangle_T\right]\\
&\quad+\mathbb{E}\left[\int_0^T c_1|S(s)|\mathbf{1}_{\tau_k}\mathrm{d}\langle B_1,B_1\rangle_s\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T c_2|I(s)|\mathbf{1}_{\tau_k}\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_s\right]+KT\\
&\leq V(S(0),I(0))+\overline{\sigma_1}^2\left(ac_1+\frac{1}{2}c_1^2a\right)T+\overline{\sigma_2}^2\left(c_2+\frac{1}{2}\right)T+KT\\
&\quad+\overline{\sigma_1}^2\mathbb{E}\left[\int_0^T c_1|S(s)|\mathbf{1}_{\tau_e}\mathrm{d}s\right]+\overline{\sigma_2}^2\mathbb{E}\left[\int_0^T c_2|I(s)|\mathbf{1}_{\tau_e}\mathrm{d}s\right]:=C+\overline{K}T
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

这里，

$$C = V\left(S(0), I(0)\right) + \overline{\sigma_1}^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T c_1 \left|S(s)\right| \mathbf{1}_{\tau_e} \mathrm{d}s\right] + \overline{\sigma_2}^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T c_2 \left|I(s)\right| \mathbf{1}_{\tau_e} \mathrm{d}s\right]$$

$$\bar{K} = K + \overline{\sigma_1}^2 \left(ac_1 + \frac{1}{2}c_1^2 a\right) + \overline{\sigma_2}^2 \left(c_2 + \frac{1}{2}\right)$$

令 $\Omega_k = \tau_k \le T$ 并且由(3.1.2) $\bar{C}(\Omega_k) \ge \varepsilon$。注意到对每个 $\varepsilon \in \Omega_k$，$S(\tau_k, \omega)$ 或者 $I(\tau_k, \omega)$ 要么等于 k 要么等于 $\frac{1}{k}$，因此 $V\left(S(\tau_k, \omega), I(\tau_k, \omega)\right)$ 不会小于以下其中一个：

$$k - 1 - \log k \text{ 或者 } \frac{1}{k} - 1 + \log k$$

由(3.1.4)得：

$$\begin{aligned} C + \bar{K}T &\ge \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\Omega_k} V\left(S(\tau_k), I(\tau_k)\right)\right] \\ &= \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^P \left[\mathbf{1}_{\Omega_k} V\left(S(\tau_k), I(\tau_k)\right)\right] \\ &\ge \varepsilon\left[k - 1 - \log k\right] \wedge \left[\frac{1}{k} - 1 + \log k\right] \end{aligned}$$

这里 $\mathbf{1}_{\Omega_k}$ 是 Ω_k 的示性函数，令 $k \to \infty$，我们有

$$\infty > C + \bar{K}T = \infty$$

这样就推出了矛盾，我们有 $\tau_\infty = \infty$，因此 $S(t)$ 和 $I(t)$ 不会再有限时间内爆破 q.s.另外 $R(t)$ 可表示为：

$$\begin{aligned} R(t) = \mathrm{e}^{-\mu t + \sigma_3 B_3(t) - \frac{1}{2}c_3 \langle B_3, B_3 \rangle_t} &\left[R(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\mu s + \frac{1}{2}\beta \langle B_3, B_3 \rangle_s - \sigma_3 B_3(s)} \gamma I(s) \mathrm{d}s \right. \\ &\left. + \int_0^t c_3 \mathrm{e}^{\mu s + \frac{1}{2}\beta \langle B_3, B_3 \rangle_s - \sigma_3 B_3(s)} \mathrm{d}\langle B_3, B_3 \rangle_s \right] \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

因此模型(1.2)的解是全局唯一正解。 □

3.2. 模型解关于无病均衡点的渐近行为

由前言提到，对于确定性模型存在一个无病均衡点 $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$ 并且如果 $R_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu + \varepsilon + \gamma)} \le 1$，则它是全局稳定的。然而对于我们的随机模型而言，我们的解不会收敛到 E_0，但是我们可以研究解在 E_0 附近的渐近行为。

定理 3.2 若 $R_0 = \frac{\beta\Lambda}{\mu(\mu + \varepsilon + \gamma)} < 1$ 并且下列条件满足：

$$2\mu > 4c_1\overline{\sigma_1}^2 + 2\overline{\sigma_1}^2 \sigma_1^2 + \frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2 \sigma_1\sigma_2 + c_2\sigma_2^2 u$$

$$2(\mu + \varepsilon + \gamma) > 2c_1\overline{\sigma_1}^2 + 2c_2\overline{\sigma_2}^2 + c_2\sigma_2^2 + \overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2,\ \mu > c_3\overline{\sigma_3}^2$$

则对给定初值 $\left(S(0), I(0), R(0)\right) \in \mathbb{R}_+^3$，模型(1.2)的解有以下性质

$$\begin{aligned} &\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(S(s) - \frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 + I(s)^2 + R(s)\right] \mathrm{d}s \\ &\le \left(2c_1\overline{\sigma_1}^2 + 2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2\right)\frac{\Lambda^2}{\mu^2 K_1} + \overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2\frac{\Lambda}{\mu K_1} + \frac{1}{2K_1}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2K_1}\overline{\sigma_2}^2 d_1 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

这里

$$K_1=\min\left\{2\mu-4c_1\overline{\sigma_1}^2-2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2-c_2\sigma_2^2,d_2\mu-\overline{\sigma_3}^2d_2c_3,\right.$$
$$\left.2(\mu+\varepsilon+\gamma)-2c_1\overline{\sigma_1}^2-2c_2\overline{\sigma_2}^2-c_2\sigma_2^2-\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1\right\}$$

证明：首先我们作一个变换 $u=S-\frac{\Lambda}{\mu}$， $v=I$， $w=R$，则模型(1.2)可以写成

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t)=\left(-\mu u(t)-\beta u(t)v(t)-\beta\frac{\Lambda}{\mu}v(t)\right)\mathrm{d}t+\sigma_1\left(u(t)+\frac{\Lambda}{\mu}\right)\mathrm{d}B_1(t)+c_1\left(u(t)+\frac{\Lambda}{\mu}\right)\mathrm{d}\langle B_1,B_1\rangle_t,\\ \mathrm{d}v(t)=\left[\beta u(t)v(t)-\left(\mu+\varepsilon+\gamma-\beta\frac{\Lambda}{\mu}\right)v(t)\right]\mathrm{d}t+\sigma_2v(t)\mathrm{d}B_2(t)+c_2v(t)\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_t,\\ \mathrm{d}w(t)=(\gamma v(t)-\mu w(t))\mathrm{d}t+\sigma_3w(t)\mathrm{d}B_3(t)+c_3w(t)\mathrm{d}\langle B_3,B_3\rangle_t,\end{cases}$$

并且 $u\in R$， $v>0$， $w>0$。定义一个函数：$V(u,v,w)=(u+v)^2+d_1v+d_2w$
这里 d_1， d_2 是一个正常数稍后给出定义，V 是一个正定函数且由 itô 公式：

$$\begin{aligned}V(u,v,w)&=V(u(0),v(0),w(0))+\int_0^t LV\mathrm{d}s+\int_0^t 2\sigma_1\left(u(s)+\frac{\Lambda}{\mu}\right)(u(s)+v(s))\mathrm{d}B_1(s)\\&+\int_0^t\sigma_2(2u(s)+2v(s)+d_1)v(s)\mathrm{d}B_2(s)+\int_0^t d_2\sigma_3w(s)\mathrm{d}B_3(s)\\&+\int_0^t(2u(s)+2v(s)+d_1)c_2v(s)+\sigma_2^2v(s)^2\,\mathrm{d}\langle B_2,B_2\rangle_s\\&+\int_0^t 2\sigma_1\sigma_2\left(u(s)+\frac{\Lambda}{\mu}\right)v(s)\mathrm{d}\langle B_1,B_2\rangle_s\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}LV&=2(u+v)[-\mu u-(\mu+\varepsilon+\gamma)v]+d_1\left[\beta uv-\left(\mu+\varepsilon+\gamma-\beta\frac{\Lambda}{\mu}\right)v\right]+d_2(\gamma v-\mu w)\\&=-2\mu u^2-2(\mu+\varepsilon+\gamma)v^2-d_2\mu w+[d_1\beta-2(2\mu+\varepsilon+\gamma)]uv+\left[d_2\gamma-d_1\beta\frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{1}{R_0}-1\right)\right]v\end{aligned}$$

然后我们取期望并通过性质 2.1 和基本不等式得：

$$\begin{aligned}&0\le\mathbb{E}V(u,v,w)\le\mathbb{E}V(u(0),v(0),w(0))\\&+\mathbb{E}\int_0^t\left(4c_1\overline{\sigma_1}^2+2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2-2\mu+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2+c_2\sigma_2^2\right)u^2\\&+\left[2c_1\overline{\sigma_1}^2+2c_2\overline{\sigma_2}^2+c_2\sigma_2^2+\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2-2(\mu+\varepsilon+\gamma)+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1\right]v^2\\&+[d_1\beta-2(2\mu+\varepsilon+\gamma)]uv+\left[d_2\gamma-d_1\beta\frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{1}{R_0}-1\right)\right]v+\left(\overline{\sigma_3}^2d_2c_3-d_2\mu\right)w\mathrm{d}s\\&+\left(2c_1\overline{\sigma_1}^2+2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2\right)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}t+\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2\frac{\Lambda}{\mu}t+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2t+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1t\end{aligned}$$

我们选择 d_1 使得 $d_1\beta-2(2\mu+\varepsilon+\gamma)=0$ 即 $d_1=\frac{2(2\mu+\varepsilon+\gamma)}{\beta}$，除此之外，注意到 $R_0<1$，我们可以选

择 $d_2>0$ 使得 $d_2\gamma-d_1\beta\frac{\Lambda}{\mu}\left(\frac{1}{R_0}-1\right)=0$，则 $d_2=\frac{2\Lambda(1-R_0)(2\mu+\varepsilon+\gamma)}{\mu\gamma R_0}$。因此我们得到：

$$
\begin{aligned}
&0\le\mathbb{E}V(u,v,w)\le\mathbb{E}V(u(0),v(0),w(0))\\
&+\mathbb{E}\int_0^t\left(4c_1\overline{\sigma_1}^2+2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2-2\mu+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2+c_2\sigma_2^2\right)u^2\\
&+\left[2c_1\overline{\sigma_1}^2+2c_2\overline{\sigma_2}^2+c_2\sigma_2^2+\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2-2(\mu+\varepsilon+\gamma)+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1\right]v^2\\
&+\left(\overline{\sigma_3}^2d_2c_3-d_2\mu\right)w\mathrm{d}s+\left(2c_1\overline{\sigma_1}^2+2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2\right)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}t\\
&+\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2\frac{\Lambda}{\mu}t+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2t+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1t
\end{aligned}
$$

这说明了：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^t\left(2\mu-4c_1\overline{\sigma_1}^2-2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2-c_2\sigma_2^2\right)u^2+\left(d_2\mu-\overline{\sigma_3}^2d_2c_3\right)w\\
&+\left[2(\mu+\varepsilon+\gamma)-2c_1\overline{\sigma_1}^2-2c_2\overline{\sigma_2}^2-c_2\sigma_2^2-\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1\right]v^2\mathrm{d}s\\
&\le\mathbb{E}V(u(0),v(0),w(0))+\left(2c_1\overline{\sigma_1}^2+2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2\right)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}t+\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2\frac{\Lambda}{\mu}t\\
&+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2t+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1t
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathbb{E}\int_0^t\left(2\mu-4c_1\overline{\sigma_1}^2-2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2-c_2\sigma_2^2\right)u^2+\left(d_2\mu-\overline{\sigma_3}^2d_2c_3\right)w\\
&+\left[2(\mu+\varepsilon+\gamma)-2c_1\overline{\sigma_1}^2-2c_2\overline{\sigma_2}^2-c_2\sigma_2^2-\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1\right]v^2\mathrm{d}s\\
&\le\left(2c_1\overline{\sigma_1}^2+2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2\right)\frac{\Lambda^2}{\mu^2}+\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2\frac{\Lambda}{\mu}+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1
\end{aligned}
$$

如果令

$$
\begin{aligned}
K_1=\min\Big\{&2\mu-4c_1\overline{\sigma_1}^2-2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2-c_2\sigma_2^2,d_2\mu-\overline{\sigma_3}^2d_2c_3,\\
&2(\mu+\varepsilon+\gamma)-2c_1\overline{\sigma_1}^2-2c_2\overline{\sigma_2}^2-c_2\sigma_2^2-\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2d_1\Big\}
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathbb{E}\left[\int_0^t\left(S(s)-\frac{\Lambda}{\mu}\right)^2+I(s)^2+R(s)\right]\mathrm{d}s\\
&\le\left(2c_1\overline{\sigma_1}^2+2\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2\right)\frac{\Lambda^2}{\mu^2K_1}+\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2\frac{\Lambda}{\mu K_1}+\frac{1}{2K_1}\overline{\sigma_{12}}^2\sigma_1\sigma_2+\frac{1}{2K_1}\overline{\sigma_2}^2d_1
\end{aligned}
$$

□

DOI: 10.12677/sa.2020.96099

3.3. 模型解关于有病均衡点的渐近行为

现在我们假设 $R_0>1$，我们介绍了确定性模型有病均衡点是 $E^*=\left(\dfrac{\mu+\varepsilon+\gamma}{\beta},\dfrac{\Lambda}{\mu+\varepsilon+\gamma}-\dfrac{\mu}{\beta},\dfrac{\Lambda\gamma}{\mu(\mu+\varepsilon+\gamma)}-\dfrac{\gamma}{\beta}\right)$，然而在模型(1.2)中并不存在有病均衡点，但是我们可以研究是否其解在有病均衡点附近，下面的定理给出了肯定的答案。

定理 3.3 如果 $R_0=\dfrac{\beta\Lambda}{\mu(\mu+\varepsilon+\gamma)}>1$，并且下列条件满足：

$$\mu>\frac{3}{2}\overline{\sigma_1}^2c_1+\frac{1}{2}\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2c_2+\frac{\sigma_{12}\sigma_1^2}{4},\ \mu>2\overline{\sigma_3}^2c_3+\overline{\sigma_3}^2\sigma_3^2$$

$$2(\mu+\varepsilon+\gamma)>\sigma_1^2c_1+3\overline{\sigma_2}^2c_2+\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2+\overline{\sigma_2}^2c_2a+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}\sigma_2^2,\left(a=\frac{2\mu+\varepsilon+\gamma}{\beta}\right)$$

则对任意给定初值 $(S(0),I(0),R(0))\in\mathbb{R}_+^3$，模型(1.2)的解有如下性质：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathbb{E}\int_0^t\left(S-\frac{f_1}{2e_1}S^*\right)^2+\left(I-\frac{f_2}{2e_2}I^*\right)^2+\left(R-\frac{f_3}{2e_3}R^*\right)^2\mathrm{d}s\le\frac{K_\sigma}{M},$$

这里：$0<p<\dfrac{2(\mu+\varepsilon+\gamma)-\left(\sigma_1^2c_1+3\overline{\sigma_2}^2c_2+\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2+ac_2\overline{\sigma_2}^2+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}\sigma_2^2\right)}{\gamma^2}$，

$$K_\sigma=C_1+C_2+C_3+\frac{\overline{\sigma_1}^2c_2^2\left(I^*\right)^2}{2\sigma_1^2}+\overline{\sigma_2}^2\left(\frac{\sigma_2^2aI^*}{2}+ac_2+\frac{\overline{\sigma_2}^2c_2S^*}{4}\right),M=\min\{e_1,e_2,e_3\}$$

$$e_1=\mu-\frac{3}{2}\overline{\sigma_1}^2c_1-\frac{1}{2}\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2-\frac{\overline{\sigma_2}^2c_2}{2}-\frac{\sigma_{12}\sigma_1^2}{4},\ f_1=2\mu-\overline{\sigma_1}^2c_1,\ C_1=\frac{f_1^2S^*}{4e_1}\left(S^*\right)^2+\frac{\overline{\sigma_1}^2c_1}{4}\left(S^*\right)^2,$$

$$e_2=\mu+\varepsilon+\gamma-\frac{p\gamma^2}{2\mu}-\frac{\overline{\sigma_1}^2c_1}{2}-\frac{3}{2}\overline{\sigma_2}^2c_2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2-\overline{\sigma_2}^2ac_2-\frac{1}{4}\overline{\sigma_{12}}\sigma_2^2$$

$$f_2=2(\mu+\varepsilon+\gamma)-\frac{p\gamma^2}{\mu}-\overline{\sigma_2}^2c_2,C_2=\frac{f_2^2}{4e_2}\left(I^*\right)^2+\frac{p\gamma^2}{2\mu}\left(I^*\right)^2+\frac{\overline{\sigma_1}^2c_2^2}{2\sigma_1^2}\left(I^*\right)^2\frac{\overline{\sigma_2}^2c_2^2}{2\sigma_2^2}\left(I^*\right)^2$$

$$e_3=\frac{p\mu}{2}-\overline{\sigma_3}^2pc_3-\frac{1}{2}\overline{\sigma_3}^2p\sigma_3^2,\ f_3=p\left(\mu-\overline{\sigma_3}^2c_3\right),C_3=\frac{f_3^2}{4e_3}\left(R^*\right)^2+\frac{1}{4}pc_3\overline{\sigma_3}^2\left(R^*\right)^2$$

证明：定义一个 C^2-函数 V：$\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}_+$：

$$V(x)=\frac{1}{2}\left(S-S^*+I-I^*\right)^2+a\left(I-I^*-I^*\log\frac{I}{I^*}\right)+\frac{1}{2}p\left(R-R^*\right)^2\tag{3.3.1}$$

这里 $a>0$，$p>0$，稍后会给出定义。为了方便，我们将(3.3.1)拆成两个函数：

$$V_1(x)=\frac{1}{2}\left(S-S^*+I-I^*\right)^2+a\left(I-I^*-I^*\log\frac{I}{I^*}\right),V_2(x)=\frac{1}{2}p\left(R-R^*\right)^2$$

由 itô 公式我们算得：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}V_1\left(S,I,R\right)\\
&=LV_1\mathrm{d}t+\left(S-S^*+I-I^*\right)\sigma_1S\mathrm{d}B_1+\left[\left(S-S^*+I-I^*\right)+a\left(1-\frac{I^*}{I}\right)\right]\sigma_2I\mathrm{d}B_2\\
&\quad+\left[\left(S-S^*+I-I^*\right)c_1S+\frac{1}{2}\sigma_1^2S^2\right]\mathrm{d}\left\langle B_1\right\rangle+\sigma_1\sigma_2SI\mathrm{d}\left\langle B_1,B_2\right\rangle\\
&\quad+\left[\left(S-S^*+I-I^*+a-\frac{aI^*}{I}\right)c_2I+\frac{1}{2}\left(1+aI^*\frac{1}{I^2}\right)\sigma_2^2I^2\right]\mathrm{d}\left\langle B_2\right\rangle
\end{aligned}
$$

同理：

$$
\mathrm{d}V_2\left(S,I,R\right)=LV_2\mathrm{d}t+p\left(R-R^*\right)\sigma_3R\mathrm{d}B_3+\left[p\left(R-R^*\right)c_3R+\frac{1}{2}p\sigma_3^2R^2\right]\mathrm{d}\left\langle B_3\right\rangle
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
LV_1&=\left(S-S^*+I-I^*\right)\left[-\mu\left(S-S^*\right)-\left(\mu+\varepsilon+\gamma\right)\left(I-I^*\right)\right]+a\left(I-I^*\right)\left[\beta S-\left(\mu+\varepsilon+\gamma\right)\right]\\
&=-\mu\left(S-S^*\right)^2-\left(\mu+\varepsilon+\gamma\right)\left(I-I^*\right)^2-\left(2\mu+\varepsilon+\gamma\right)\left(S-S^*\right)\left(I-I^*\right)+a\left(I-I^*\right)\left[\beta S-\beta S^*\right]\\
&=-\mu\left(S-S^*\right)^2-\left(\mu+\varepsilon+\gamma\right)\left(I-I^*\right)^2+\left(a\beta-2\mu-\varepsilon-\gamma\right)\left(S-S^*\right)\left(I-I^*\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
LV_2&=p\left(R-R^*\right)\left(\gamma I-\mu R\right)=p\left(R-R^*\right)\left[\gamma\left(I-I^*\right)-\mu\left(R-R^*\right)\right]\\
&=p\gamma\left(I-I^*\right)\left(R-R^*\right)-p\mu\left(R-R^*\right)^2\le\frac{p\gamma^2}{2\mu}\left(I-I^*\right)^2-\frac{p\mu}{2}\left(R-R^*\right)^2
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V&=\mathrm{d}V_1+\mathrm{d}V_2\\
&=\left(LV_1+LV_2\right)\mathrm{d}t+\left(S-S^*+I-I^*\right)\sigma_1S\mathrm{d}B_1+p\left(R-R^*\right)\sigma_3R\mathrm{d}B_3\\
&\quad+\left[\left(S-S^*+I-I^*\right)+a\left(1-\frac{I^*}{I}\right)\right]\sigma_2I\mathrm{d}B_2+\left[\left(S-S^*+I-I^*\right)c_1S+\frac{1}{2}\sigma_1^2S^2\right]\mathrm{d}\left\langle B_1\right\rangle\\
&\quad+\left[\left(S-S^*+I-I^*+a-\frac{aI^*}{I}\right)c_2I+\frac{1}{2}\left(1+aI^*\frac{1}{I^2}\right)\sigma_2^2I^2\right]\mathrm{d}\left\langle B_2\right\rangle\\
&\quad+\left[p\left(R-R^*\right)c_3R+\frac{1}{2}p\sigma_3^2R^2\right]\mathrm{d}\left\langle B_3\right\rangle+\sigma_1\sigma_2SI\mathrm{d}\left\langle B_1,B_2\right\rangle
\end{aligned}
$$

两边同时取期望得：

$$
\begin{aligned}
0&\le\mathbb{E}V\left(S,I,R\right)\\
&=\mathbb{E}V\left(S\left(0\right),I\left(0\right),R\left(0\right)\right)+\int_0^tLV_1+LV_2\mathrm{d}s\\
&\quad+\mathbb{E}\int_0^t\left[\left(c_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)S^2-c_1S^*S+c_1SI-c_1I^*S\right]\mathrm{d}\left\langle B_1\right\rangle_s\\
&\quad+\mathbb{E}\int_0^tc_2\left(S-S^*+I-I^*\right)I+ac_2\left(I-I^*\right)+\frac{1}{2}\sigma_2^2\left(I^2+aI^*\right)\mathrm{d}\left\langle B_2\right\rangle_s\\
&\quad+\mathbb{E}\int_0^tpc_3R^2-pc_3R^*R+\frac{1}{2}p\sigma_3^2R^2\mathrm{d}\left\langle B_3\right\rangle_s+\mathbb{E}\int_0^t\sigma_1\sigma_2SI\mathrm{d}\left\langle B_1,B_2\right\rangle_s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \mathbb{E}V\left(S(0),I(0),R(0)\right)+\mathbb{E}\int_0^t LV_1+LV_2\mathrm{d}s+\overline{\sigma_1}^2\mathbb{E}\int_0^t c_1\left(S-\frac{1}{2}S^*\right)^2\\
&+\frac{1}{2}\sigma_1^2\left[S-\frac{c_2}{\sigma_1^2}I^*\right]^2+c_1SI\mathrm{d}s+\overline{\sigma_2}^2\mathbb{E}\int_0^t c_2\left(I-\frac{1}{2}S^*\right)^2\\
&+\frac{1}{2}\sigma_2^2\left(I-\frac{c_2}{\sigma_2^2}I^*\right)^2+c_2SI+ac_2I^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2aI^*+ac_2\mathrm{d}s\\
&+\overline{\sigma_3}^2\mathbb{E}\int_0^t pc_3\left(R-\frac{1}{2}R^*\right)^2+\frac{1}{2}p\sigma_3^2R^2\mathrm{d}s+\mathbb{E}\int_0^t\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}\sigma_1\sigma_2SI\mathrm{d}s\\
&\le \mathbb{E}V\left(S(0),I(0),R(0)\right)+\mathbb{E}\int_0^t-\mu\left(S-S^*\right)^2-\left(\mu+\varepsilon+\gamma\right)\left(I-I^*\right)^2\\
&+\left(a\beta-2\mu-\varepsilon-\gamma\right)\left(S-S^*\right)\left(I-I^*\right)+\frac{p\gamma^2}{2\mu}\left(I-I^*\right)^2-\frac{p\mu}{2}\left(R-R^*\right)^2\\
&+\overline{\sigma_1}^2c_1\left(S-\frac{1}{2}S^*\right)^2+\frac{\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2}{2}\left(S-\frac{c_2}{\sigma_1^2}I^*\right)^2+\overline{\sigma_1}^2c_1SI\\
&+\overline{\sigma_2}^2\sigma_2\left(1+a\right)\left(I-\frac{1}{2}I^*\right)^2+\overline{\sigma_2}^2c_2SI+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2a\sigma_2^2I^*I\\
&+\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2\left(I-\frac{c_2}{\sigma_2^2}I^*\right)^2+p\overline{\sigma_3}^2c_3\left(R-\frac{1}{2}R^*\right)^2+\overline{\sigma_3}^2p\sigma_3^2R^2+\frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}}\sigma_1\sigma_2SI\mathrm{d}s\\
&\le \mathbb{E}V\left(S(0),I(0),R(0)\right)+\mathbb{E}\int_0^t F_1(s)+F_2(s)+F_3(s)\mathrm{d}s\\
&+\frac{\overline{\sigma_1}^2c_2^2\left(I^*\right)^2}{2\sigma_1^2}t+\overline{\sigma_2}^2\left(\frac{\sigma_2^2aI^*}{2}+ac_2+\frac{\overline{\sigma_2}^2c_2S^*}{4}\right)t
\end{aligned}
$$

在上述不等式中我们取 $a=\dfrac{2\mu+\varepsilon+\gamma}{\beta}$ 并且使用了基本不等式 $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$，$F_1(s),F_2(s),F_3(s)$ 如下：

$$F_1(s)=-e_1\left(S-\frac{f_1}{2e_1}S^*\right)^2+C_1$$

$$e_1=\mu-\frac{3}{2}\overline{\sigma_1}^2c_1-\frac{1}{2}\overline{\sigma_1}^2\sigma_1^2-\frac{\overline{\sigma_2}^2c_2}{2}-\frac{\sigma_{12}\sigma_1^2}{4}$$

$$f_1=2\mu-\overline{\sigma_1}^2c_1,\ C_1=\frac{f_1^2S^*}{4e_1}\left(S^*\right)^2+\frac{\overline{\sigma_1}^2c_1}{4}\left(S^*\right)^2$$

$$F_2(s)=-e_2\left(I-\frac{f_2}{2e_2}I^*\right)^2+C_2$$

$$e_2=\mu+\varepsilon+\gamma-\frac{p\gamma^2}{2\mu}-\frac{\overline{\sigma_1}^2c_1}{2}-\frac{3}{2}\overline{\sigma_2}^2c_2-\frac{1}{2}\overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2-\overline{\sigma_2}^2ac_2-\frac{1}{4}\sigma_{12}\sigma_2^2$$

$$f_2=2\left(\mu+\varepsilon+\gamma\right)-\frac{p\gamma^2}{\mu}-\overline{\sigma_2}^2c_2$$

$$C_2=\frac{f_2^2}{4e_2}\left(I^*\right)^2+\frac{p\gamma^2}{2\mu}\left(I^*\right)^2+\frac{\overline{\sigma_1}^2c_2^2}{2\sigma_1^2}\left(I^*\right)^2\frac{\overline{\sigma_2}^2c_2^2}{2\sigma_2^2}\left(I^*\right)^2$$

$$F_3(s) = -e_3\left(R - \frac{f_3}{2e_3}R^*\right)^2 + C_3$$

$$e_3 = \frac{p\mu}{2} - \overline{\sigma_3}^2 pc_3 - \frac{1}{2}\overline{\sigma_3}^2 p\sigma_3^2,\ f_3 = p\left(\mu - \overline{\sigma_3}^2 c_3\right), C_3 = \frac{f_3^2}{4e_3}\left(R^*\right)^2 + \frac{1}{4}pc_3\overline{\sigma_3}^2\left(R^*\right)^2$$

由定理条件我们知道 $2(\mu+\varepsilon+\gamma) - \left(\sigma_1^2 c_1 + 3\overline{\sigma_2}^2 c_2 + \overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2 + ac_2\overline{\sigma_2}^2 + \frac{1}{2}\overline{\sigma_{12}\sigma_2^2}\right) > 0$，所以我们可以选择 $0 < p < \dfrac{2(\mu+\varepsilon+\gamma) - \left(\sigma_1^2 c_1 + 3\overline{\sigma_2}^2 c_2 + \overline{\sigma_2}^2\sigma_2^2 + ac_2\overline{\sigma_2}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{12}\sigma_2^2\right)}{\gamma^2}$。除此之外，其他的条件说明了 $e_i > 0,\ f_i > 0$，对 $i = 1,2,3$。

经过简单地整理我们获得

$$\mathbb{E}\int_0^t e_1\left(S - \frac{f_1}{2e_1}S^*\right)^2 + e_2\left(I - \frac{f_2}{2e_2}I^*\right)^2 + e_3\left(R - \frac{f_3}{2e_3}R\right)^2 \mathrm{d}s \le V\left(S(0), I(0), R(0)\right) + K_\sigma t$$

其中，$K_\sigma = C_1 + C_2 + C_3 + \dfrac{\overline{\sigma_1}^2 c_2^2\left(I^*\right)^2}{2\sigma_1^2} + \overline{\sigma_2}^2\left(\dfrac{\sigma_2^2 aI^*}{2} + ac_2 + \dfrac{\overline{\sigma_2}^2 c_2 S^*}{4}\right)$。

两边同时除以 t 并且令 $t \to \infty$，我们得到：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathbb{E}\int_0^t e_1\left(S - \frac{f_1}{2e_1}S^*\right)^2 + e_2\left(I - \frac{f_2}{2e_2}I^*\right)^2 + e_3\left(R - \frac{f_3}{2e_3}R^*\right)^2 \mathrm{d}s \le K_\sigma$$

令 $M = \min\{e_1, e_2, e_3\}$，则容易得到：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\mathbb{E}\int_0^t\left(S - \frac{f_1}{2e_1}S^*\right)^2 + \left(I - \frac{f_2}{2e_2}I^*\right)^2 + \left(R - \frac{f_3}{2e_3}R^*\right)^2 \mathrm{d}s \le \frac{K_\sigma}{M} \qquad \square$$

参考文献

[1] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. P*roceedings of the Royal Society of London Series A*, **115**, 700-721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118

[2] Anderson, R.M. and May, R.M. (1979) Population Biology of Infectious Diseases: Part I. *Nature*, **280**, 361-367. https://doi.org/10.1038/280361a0

[3] Jiang, D.Q., Yu, J.J., Ji, C.Y. and Shi, N.Z. (2011) Asymptotic Behavior of Global Positive Solution to a Stochastic Sir Model. *Mathematical Computer Modelling*, **54**, 221-232. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.02.004

[4] Li, X.P. and Peng, S.G. (2011) Stopping Times and Related Itô's Calculus with G-Brownian Motion. *Stochastic Processes and Their Applications*, **121**, 1492-1508. https://doi.org/10.1016/j.spa.2011.03.009

[5] Peng, S.G. (2019) Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty: With Robust CLT and G-Brownian Motion. In: *Probability Theory and Stochastic Modelling*, Springer Nature, Vol. 95. https://doi.org/10.1007/978-3-662-59903-7

[6] Peng, S.G. (2010) Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty. arXiv preprint arXiv:1002.4546,24.

[7] 彭实戈. 非线性期望的理论、方法及意义[J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(10), 1223-1254.

[8] Crandall, M.G. Ishii, H. and Lions, P.L. (1992) User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations. *Bull.amer.math.soc*, **27**. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1992-00266-5

[9] Gao, F.Q. (2009) Pathwise Properties and Homeomorphic Flows for Stochastic Differential Equations Driven by G-Brownian Motion. *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 3356-3382. https://doi.org/10.1016/j.spa.2009.05.010