Statistics and Application 统计学与应用, **2021, 10(5), 900-907**
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2021.105094

考虑交易成本的均值–方差模型的云南特色股票研究

张银子水，陈露楠，张德飞*

红河学院数学与统计学院，云南 蒙自

收稿日期：2021年9月23日；录用日期：2021年10月8日；发布日期：2021年10月22日

摘 要

利用均值–方差模型对云铝股份、太平洋、昆药集团、南天信息、沃森生物、云南旅游、云天化、我爱我家这八支具有代表性的云南特色股票构成一个投资组合。股票在2019年9月9日至2020年12月31日的日收盘价作为样本数据。借助MATLAB软件，分别计算出每支股票收益率的均值、标准差、方差和协方差矩阵，利用拉格朗日乘数法求解模型，得出传统Markowitz均值–方差模型的最优投资组合解，基于投资现实再引入交易成本和静态的资本结构因子，将传统的均值–方差模型进一步优化，得出选取的八支云南特色股票最优投资组合方案。

关键词

均值–方差模型，交易成本，最优投资组合

A Study of Yunnan Characteristic Stocks with the Mean-Variance Model Considering Transaction Costs

Yinzishui Zhang, Lunan Chen, Defei Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Honghe University, Mengzi Yunnan

Received: Sep. 23rd, 2021; accepted: Oct. 8th, 2021; published: Oct. 22nd, 2021

Abstract

The mean-variance model is used to form a portfolio of eight representative Yunnan characteristic stocks, namely Yunnan Aluminium, the Pacific Securities, KPC Pharmaceuticals, Yunnan Nantian

*通讯作者。

文章引用: 张银子水, 陈露楠, 张德飞. 考虑交易成本的均值–方差模型的云南特色股票研究[J]. 统计学与应用, 2021, 10(5): 900-907. DOI: 10.12677/sa.2021.105094

Electronics Information, Walvax Biotechnology, Yunnan Tourism, Yunnan Yuntianhua and 5i5j Holding Group. The daily closing price of the stock on September 9, 2019 at solstice on December 31, 2020 is used as sample data. With the help of MATLAB software, the mean value, standard deviation, variance and covariance matrix of each stock's return rate are respectively calculated. Lagrange multiplier method is used to solve the model, and the optimal portfolio solution of the traditional Markowitz mean-variance model is obtained. Based on the investment reality, transaction costs and static capital structure factors are introduced. The traditional mean-variance model is further optimized to obtain the optimal portfolio scheme of the selected eight Yunnan characteristic stocks.

Keywords

Mean-Variance Model, Transaction Costs, Optimal Portfolio

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

中国证券市场经过三十年的砥砺前行，市场快速发展，规模不断扩大，截至 2020 年 10 月 31 日，中国的证券市场期货投资者已达 1.746 亿人，并且在这 1.746 亿人中，有 90%以上都是个人投资者，散户投资者。由此可以看出，购买金融产品获取利益已然成为投资者的常态，但高收益常常伴随着高风险，如何规避风险则成了投资者解决的首要问题。中国古语“鸡蛋不要放在同一个篮子里”，还有彼得•林奇所说“不论是在投资收益很好还是很坏的时候，你都应该始终坚持一种正确的投资策略，只有这样才能使长期投资回报最大化”。都说明了要想在长期投资中业绩最大化风险最小化，就需要坚持正确的投资方法，配置合理的投资组合。本文通过对比传统均值－方差模型和带有交易成本的均值－方差模型投资组合，得出最优的投资组合。

2. Markowitz 均值－方差模型的建立

2.1. 马科维茨投资组合模型

1952 年 3 月，Markowitz 发表了《证券组合选择》的论文[1]，作为现代证券组合管理理论的开端，并对风险和收益进行了量化，建立均值方差模型，提出了确定最优的资产组合基本模型。均值，是指投资组合的期望收益率，它是单只证券的期望收益率的加权平均，权重为相应的投资比例；方差是指投资组合的收益率的方差，而证券收益率的标准差称为波动率，体现了投资组合的风险。通俗来说，最优的投资组合就是给定期望风险水平下对期望收益进行最大化，或者在给定期望收益水平下对期望风险进行最小化。那在预先确定一个期望收益率，通过计算确定每种资产的权重，使其投资风险最小，所以在不同的期望收益率下得到相应的最小方差的组合解就是我们的有效组合。由此，对最优的投资组合问题求解，即是固定预期收益率为常数，权重之和为 1 的限制条件下求最小方差的线性规划问题。

2.2. 均值－方差模型假设

1) 风险资产的收益率符合正态分布；
2) 投资组合的风险资产之间没有很高的关联性；

3) 允许投资者卖空股票；

4) 投资者是根据证券的期望收益率估测证券组合的风险。

2.3. 均值–方差模型建立

2.3.1. 模型建立[2]

投资目标是在给定权重 x_i、预期收益(μ)下，实现预期收益最大、或证券风险最小的最优规划，将资产收益率记为 r_i，期望收益率记为 $\overline{r_i}$，资产风险记为 σ_i，则有：

资产组合收益变量 r_x $\begin{cases} E\left[r_x\right]=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{r_i} \\ Var\left[r_x\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j Cov\left(r_i,r_j\right) \end{cases}$；

根据目标：固定预期收益并将方差最小化，我们将目标函数转化为代数问题，则 Markowitz 均值–方差模型表示为：

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j Cov\left(r_i,r_j\right)$$

$$\text{s.t}\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{r_i}=\mu \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1 \end{cases}$$

在此我们采用矩阵形式：

$$\min \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\Sigma x$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x^{\mathrm{T}}r=\mu \\ x^{\mathrm{T}}1_n=1 \end{cases}$$

其中：

$$\Sigma=\begin{bmatrix} Cov\left(r_1,r_1\right) & \cdots & Cov\left(r_1,r_1\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov\left(r_n,r_1\right) & \cdots & Cov\left(r_n,r_n\right) \end{bmatrix}, x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}, r=\begin{bmatrix} \overline{r}_1 \\ \vdots \\ \overline{r}_n \end{bmatrix}, 1_n=\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

并且有 $Cov\left(r_i,r_i\right)=Var\left[r_i\right]$

则目标函数：方差(凸函数)对任何随机变量 X 和 Y 都有：

$$\begin{aligned} Var\left[\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y\right] &= \frac{1}{4}Var\left[X\right]+\frac{1}{4}Var\left[Y\right]+\frac{1}{2}Cov\left(X,Y\right) \\ &\le \frac{1}{4}Var\left[X\right]+\frac{1}{4}Var\left[Y\right]+\frac{1}{2}\sigma_X\sigma_Y \\ &\le \frac{1}{2}Var\left[X\right]+\frac{1}{2}Var\left[Y\right] \end{aligned}$$

有目标函数规划问题可行集：

$$\Delta=\left\{x_i\cdots x_n\in\mathbb{R}:\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i\overline{r_i}=\mu,\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i=1\right\}$$

是由两个线性条件约束的，且它为一个凸函数，由一个凸函数在凸集上必有极小点可知：$\min_{x\in\Delta}\frac{1}{2}Var\left(r_x\right)$有解。

3. 带有交易成本的均值－方差模型

3.1. 模型简介

众所周知，我们的赖以交易的股票账户是由证券公司来代为操作的，在每一个买入和卖出的时候都存在一定的交易费用。目前中国的股票市场有着不同的交易费率，一般在 0.3%~1.5%，最低的交易费用也有每笔交易金额的万分之三。因此，交易费用在实际中对收益率的影响是非常大的[3] [4] [5]，所以在 Markowitz 均值－方差模型的基础上增加了交易成本系数和资本结构因子来对模型进行改善[6] [7] [8]。

3.2. 模型建立和求解

在 0 时刻买入需自备资金为：$P_{i0}\left(1+\alpha\right)\left(1-\beta\right)$

在 1 时刻卖出可获得资金为：$P_{i1}\left(1-\alpha\right)$

在时刻负债需支付资金为：$P_{i0}\left(1+\alpha\right)\beta\left(1+R\right)$

则考虑资本结构因子和交易成本第 i 支股票的收益率为：

$$R_p=\frac{P_{i1}\left(1-\alpha\right)-P_{i0}\left(1+\alpha\right)\left(1-\beta\right)-P_{i0}\left(1+\alpha\right)\beta\left(1+R\right)}{P_{i0}\left(1+\alpha\right)\left(1-\beta\right)}$$

记 $R_i=\frac{P_{i1}-P_{i0}}{P_{i1}}$ 为第 i 支股票根据市场价获得的收益率，则有：

$$R_i=\frac{1-\alpha}{\left(1-\beta\right)\left(1+\alpha\right)}R_i-\frac{2\alpha}{\left(1-\beta\right)\left(1+\alpha\right)}-\frac{\beta}{1-\beta}R$$

则该组合的期望收益率和风险为：

$$R_p'=\frac{1-\alpha}{\left(1-\beta\right)\left(1+\alpha\right)}R_p-\frac{2\alpha}{\left(1-\beta\right)\left(1+\alpha\right)}-\frac{\beta}{1-\beta}R$$

$$\left(\sigma_p'\right)^2=\frac{\left(1-\alpha\right)^2}{\left(1-\beta\right)^2\left(1+\alpha\right)^2}\sigma_p^2$$

若带交易成本 α，资本结构因子 β，无风险投资收益率 R，

令 $u=\frac{1-\alpha}{\left(1-\beta\right)\left(1+\alpha\right)},v=\frac{2\alpha}{\left(1-\beta\right)\left(1+\alpha\right)}+\frac{\beta}{1-\beta}R$

带有交易成本的均值－方差模型为：

$$\min\sigma^2=u^2x^{\mathrm{T}}\sum x$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}ux^{\mathrm{T}}r-v=R_p'=\mu\\x^{\mathrm{T}}1_n=1\end{cases}$$

通过做出两个模型的有效前沿曲线对比图(见图 1)可以看出：带有交易成本的均值－方差模型和传统的 Markowitz 均值－方差模型是契合的，与投资者想要的既定收益下风险小的初衷吻合。

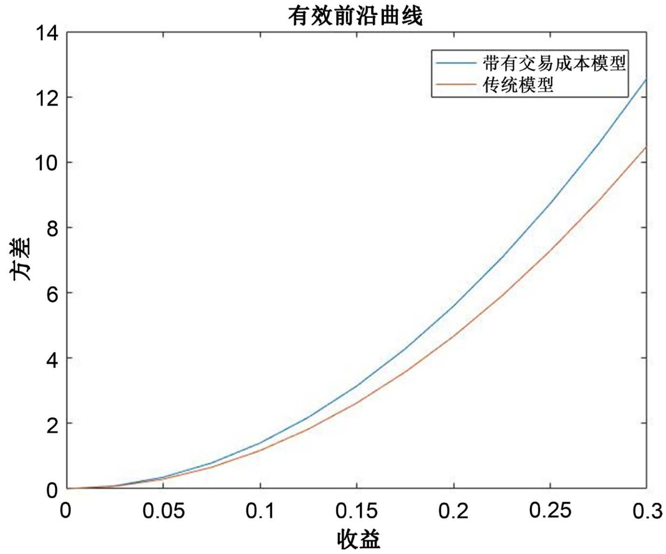

Figure 1. Contrast figure of effective frontier curve
图 1. 有效前沿曲线对比图

4. Markowitz 均值－方差模型的实证研究分析

4.1. 样本选择及数据处理

本文选取了云南旅游、云铝股份、昆药集团、南天信息、沃森生物、太平洋、云天化、我爱我家这八支具有代表性的云南特色股票构成一个投资组合。且这八支股票属于不同行业，股票之间的相关程度较低。

从大智慧软件中获取这些股票在 2019 年 9 月 9 日至 2020 年 12 月 31 日的日收盘价作为样本数据。对这些数据进行处理，分别求出每支股票的对数收益率作为研究对象。

这里的对数收益率的计算公式为 $\ln\dfrac{\text{当天收盘价}}{\text{前一天收盘价}}$。

借助 MATLAB 软件，分别计算出每支股票收益率的均值、标准差、方差和协方差矩阵(计算结果如表 1 所示)。

Table 1. The mean, standard deviation, variance, and covariance matrix of the logarithmic returns of the eight stocks
表 1. 八支股票对数收益率的均值、标准差、方差和协方差矩阵

股票	均值	均方差	方差	协方差矩阵							
云南旅游	−0.000288	0.011862	0.000141	0.000141	0.000049	0.000043	0.000056	0.000023	0.000042	0.000038	0.000044
云铝股份	0.000464	0.013196	0.000174	0.000049	0.000174	0.000044	0.000054	0.000026	0.000074	0.000058	0.000051
昆药集团	−0.000428	0.008977	0.000081	0.000043	0.000044	0.000081	0.000046	0.000052	0.000037	0.000030	0.000020
南天信息	−0.000165	0.011832	0.000140	0.000056	0.000054	0.000046	0.000140	0.000037	0.000067	0.000048	0.000043
沃森生物	0.000408	0.014975	0.000224	0.000023	0.000026	0.000052	0.000037	0.000224	0.000031	0.000034	0.000015
太平洋	0.000126	0.011504	0.000132	0.000042	0.000074	0.000037	0.000067	0.000031	0.000132	0.000043	0.000032
云天化	0.000108	0.010180	0.000104	0.000038	0.000058	0.000030	0.000048	0.000034	0.000043	0.000104	0.000035
我爱我家	−0.000203	0.010610	0.000113	0.000044	0.000051	0.000020	0.000043	0.000015	0.000032	0.000035	0.000113

4.2. 计算各支股票的最优投资权重

本文研究的是在给定预期收益率 μ 的情况下，使得投资组合的风险最小。现假设预期达到的收益率为 $\mu = 15\% = 0.15$ (该收益率远远大于每支股票同期平均收益率，因此具有现实意义)

$$r = \begin{pmatrix} -0.000288 & 0.000464 & -0.000428 & -0.000165 & 0.000408 & 0.000126 & 0.000108 & -0.000203 \end{pmatrix}$$

$$1_n = (1,1,1,1,1,1,1,1)'$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.000141 & 0.000049 & 0.000043 & 0.000056 & 0.000023 & 0.000042 & 0.000038 & 0.000044 \\ 0.000049 & 0.000174 & 0.000044 & 0.000054 & 0.000026 & 0.000074 & 0.000058 & 0.000051 \\ 0.000043 & 0.000044 & 0.000081 & 0.000046 & 0.000052 & 0.000037 & 0.000030 & 0.000020 \\ 0.000056 & 0.000054 & 0.000046 & 0.000140 & 0.000037 & 0.000067 & 0.000048 & 0.000043 \\ 0.000023 & 0.000026 & 0.000052 & 0.000037 & 0.000224 & 0.000031 & 0.000034 & 0.000015 \\ 0.000042 & 0.000074 & 0.000037 & 0.000067 & 0.000031 & 0.000132 & 0.000043 & 0.000032 \\ 0.000038 & 0.000058 & 0.000030 & 0.000048 & 0.000034 & 0.000043 & 0.000104 & 0.000035 \\ 0.000044 & 0.000051 & 0.000020 & 0.000043 & 0.000015 & 0.000032 & 0.000035 & 0.000113 \end{pmatrix}$$

由拉格朗日乘数法计算得出各支股票的投资权重：

$$x = \begin{bmatrix} -12.0806 & 88.2476 & -149.6723 & -7.3367 & 66.6058 & 21.1144 & 29.8224 & -35.7006 \end{bmatrix}'$$

将 x 标准化：

$$x^* = \frac{x}{\|x\|}$$

得到八支股票的最优权重为：

$$x^* = \begin{bmatrix} -0.0294 & 0.2149 & -0.3645 & -0.0179 & 0.1622 & 0.0514 & 0.0726 & -0.0870 \end{bmatrix}'$$

(负数表示该股票可以卖空)

我们得出最优投资组合方案即为(如表 2 所示)：云南旅游权重为−0.0294，云铝股份权重为 0.2149，昆药集团权重为−0.3645，南天信息权重为−0.0179，沃森生物权重为 0.1622，太平洋权重为 0.0514，云天化权重为 0.0726，我爱我家权重为−0.0870。

Table 2. Optimal investment weight derived from the model
表 2. 模型所得最优投资权重

云南旅游权重	云铝股份权重	昆药集团权重	南天信息权重	沃森生物权重	太平洋权重	云天化权重	我爱我家权重
−0.0294	0.2149	−0.3645	−0.0179	0.1622	0.0514	0.0726	−0.0870

5. 带有资本结构因子和交易成本的 Markowitz 均值–方差模型的实证研究分析

5.1. 由上一节求得的样本数据进行运算

假设预期达到的收益率为 $\mu = 15\% = 0.15$，又假设当时的交易成本比例 $\alpha = 0.75\%$，市场无风险投资收益率 $R = 5\%$，某公司的资产负债率 $\beta = 10\%$。

由拉格朗日乘数法计算得出各支股票的投资权重：

$$x = \begin{bmatrix} -12.6656 & 92.4976 & -156.8940 & -7.6895 & 69.8092 & 22.1248 & 31.2486 & -37.4311 \end{bmatrix}'$$

将 x 标准化：

$$x^* = \frac{x}{\|x\|}$$

得到八支股票的最优权重为：

$$x^* = [-0.0294\ \ 0.2149\ \ -0.3646\ \ -0.0179\ \ 0.1622\ \ 0.0514\ \ 0.0726\ \ -0.0870]'$$

(负数表示该股票可以卖空)

我们得出最优投资组合方案即为(如表 3 所示)：云南旅游权重为−0.0294，云铝股份权重为 0.2149，昆药集团权重为−0.3646，南天信息权重为−0.0179，沃森生物权重为 0.1622，太平洋权重为 0.0514，云天化权重为 0.0726，我爱我家权重为−0.0870。

Table 3. Optimal Investment Weight derived from the model
表 3. 模型所得最优投资权重

云南旅游权重	云铝股份权重	昆药集团权重	南天信息权重	沃森生物权重	太平洋权重	云天化权重	我爱我家权重
−0.0294	0.2149	−0.3646	−0.0179	0.1622	0.0514	0.0726	−0.0870

5.2. 计算在不同预期收益率下的最优投资组合

取 $\mu_1 = 0.05, \mu_2 = 0.075, \mu_3 = 0.10, \mu_4 = 0.125, \mu_5 = 0.15, \mu_6 = 0.175, \mu_7 = 0.20$ 分别计算其相应的最优投资组合，相应结果如表 4 所示：

Table 4. Optimal portfolio under different expected returns
表 4. 不同期望收益下的最优投资组合

期望收益	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2
云南旅游	−0.029229	−0.029318	−0.029371	−0.029406	−0.029430	−0.029449	−0.029463
云铝股份	0.215022	0.214981	0.214958	0.214942	0.214931	0.214922	0.214916
昆药集团	−0.363815	−0.364147	−0.364343	−0.364472	−0.364564	−0.364633	−0.364686
南天信息	−0.017916	−0.017895	−0.017882	−0.017873	−0.017867	−0.017863	−0.017860
沃森生物	0.162575	0.162414	0.162319	0.162256	0.162211	0.162178	0.162152
太平洋	0.051860	0.051660	0.051543	0.051465	0.051410	0.051369	0.051337
云天化	0.073315	0.073003	0.072818	0.072697	0.072610	0.072546	0.072496
我爱我家	−0.086268	−0.086582	−0.086767	−0.086889	−0.086976	−0.087041	−0.087091
方差(风险)	0.607600	1.100500	1.738900	2.522600	3.451700	4.526100	5.745900

6. 结束语

本文利用拉格朗日乘数法求解模型，得出传统 Markowitz 均值－方差模型的最优投资组合解，基于投资现实再引入交易成本和静态的资本结构因子，将传统的均值－方差模型进一步优化，得出选取的八支云南特色股票的最优投资比例。

基金项目

国家自然科学基金(11761028)。

参考文献

[1] Markowitz, H.M. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

[2] 李雄英, 王斌会. 稳健均值-方差模型的构建及比较研究[J]. 统计与决策, 2020, 36(13): 47-52.

[3] 王晓琴, 高岳林. 带有交易成本的均值-方差-下半方差投资组合模型[J]. 工程数学学报, 2020, 37(2): 155-164.

[4] 王晓琴, 高岳林. 考虑交易费用的均值-VaR 多阶段投资组合优化模型[J]. 工程数学学报, 2020, 37(6): 673-684.

[5] 刘勇军, 周敏娜, 张卫国. 考虑背景风险的均值-半方差投资组合优化模型[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(9): 2282-2291.

[6] 黄德春, 张长征, 汤云超. 含资本结构因子和交易费用的 CVaR 投资组合模型分析[J]. 经济与管理, 2009, 23(9): 33-37.

[7] 吴萌, 黄南京, 赵昌文. 一个扩展的含资本结构因子和交易成本的证券组合投资模型[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2005, 42(4): 639-643.

[8] 李宏杰. 具有资本结构因子和交易成本的证券组合投资模型[J]. 中国管理科学, 2007, 15(3): 14-18.