

不允许卖空的含参数均值 - 方差投资组合模型

孙 敏¹, 孙达生², 葛 静¹

¹枣庄学院, 数学与统计学院, 山东 枣庄

²枣庄市第四十六中学, 山东 枣庄

收稿日期: 2022年7月18日; 录用日期: 2022年7月29日; 发布日期: 2022年8月10日

摘 要

为了描述投资组合问题的动态变化性, 本文提出了一类含参数均值 - 方差投资组合模型。与类似模型相比, 该模型具有以下特点: 均值与协方差是时间的函数; 考虑了噪声与计算误差等因素的影响; 资源不允许卖空, 即其要求决策变量非负。针对该模型, 本文给出了一类抗噪声在线求解算法。理论分析表明, 对于各类噪声, 该在线算法生成的误差是有界的, 并且该上界随时间的增长快速趋于零。最后, 初步的仿真实验验证了所设计算法的有效性。

关键词

含参数均值 - 方差投资组合模型, 不允许卖空, 在线算法

Parameterized Mean-Variance Investment Portfolio Model with No Short Sale

Min Sun¹, Dasheng Sun², Jing Ge¹

¹School of Mathematics and Statistics, Zaozhuang University, Zaozhuang Shandong

²Zaozhuang No. 46 Middle School, Zaozhuang Shandong

Received: Jul. 18th, 2022; accepted: Jul. 29th, 2022; published: Aug. 10th, 2022

Abstract

In order to describe the dynamic change of investment portfolio problem, this paper proposes a kind of portfolio model with parameter mean-variance. Compared with similar models, this model has the following characteristics: The mean and covariance contain a time parameter; the influence of noise and calculation error is considered; short selling of resources is not allowed, that is, it requires non-negative decision variables. For this model, a class of anti-noise online algorithm is presented in this paper. Theoretical analysis shows that the error generated by the online algo-

rithm is bounded for all kinds of noises, and the upper bound quickly approaches zero with the increase of time. Finally, a preliminary simulation experiment verifies the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords

Mean-Variance Investment Portfolio Model with Parameter, No Short Sale, Online Algorithm

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

均值 - 方差投资组合模型是由马科维茨在 1952 年提出的风险度量模型。该模型将收益率的方差作为风险的度量, 并以极小化风险为目标, 使收益与风险的多目标优化达到最佳的平衡效果, 其所蕴含的风险分散化思想是现代投资理论的基础[1]。

自经典的均值 - 方差投资组合模型被提出以来, 国内外学者对其进行了深入的研究。这些研究主要集中在两个方向: 1) 对均值 - 方差模型计算方法的研究; 2) 对均值 - 方差模型进行改进。对方向(1)的研究主要集中在数值迭代方法的研究上。由于经典的均值 - 方差模型是一个二次规划, 并且目标函数的 Hessian 矩阵是半正定的, 因此属于凸优化的范畴。一些经典求解二次规划的优化方法, 比如零空间方法、拉格朗日方法、有效集方法等, 可以用来求解均值 - 方差模型; 同时也有很多的优化求解器, 比如 CVX、AMPL 等, 可以有效求解大规模的均值 - 方差模型。除此之外, 学者们还将一些智能优化算法应用到该问题的求解中, 比如基于粒子群优化算法, 卢小丽等[2]提出了一种求解自融资投资组合模型的量子行为的粒子群优化算法; 郑继明等[3]给出了一种基于遗传算法的均值-CVaR 投资组合模型的求解方法, 该方法针对遗传算法全局搜索能力较弱、收敛精度不高等问题, 对遗传算法的交叉操作引入正态分布交叉算子, 并用于以 CVaR 度量风险, 含有交易费率的均值-CVaR 投资组合模型的求解, 给出了预期收益下的最优投资策略。

通过引入一些新的测度来度量风险与收益, 学者们提出了经典的均值 - 方差模型的变形。比如, 针对分散高阶矩风险及涨跌不对称性对投资组合的影响, 欧攀等[4]利用偏度刻画高阶矩风险, 利用负半熵和下半方差刻画涨跌不对称性, 进而构建了负半熵下半方差近似偏度投资组合模型。该文献的实证分析表明, 与均值 - 方差模型、半方差模型比较, 新模型的组合资产的超额收益更大、风险更低。通过引入非凹非凸的典型交易成本函数, 王晓琴等[5]提出了一种带有交易成本的均值 - 方差 - 下半方差投资组合模型, 同时给出了投资组合的有效边界。

马科维茨建立的资产优化配置的均值 - 方差模型属于静态规划, 该模型中目标函数的系数与约束的系数, 即协方差 $\text{cov}(R_i, R_j)$ 与期望收益 $E(R_i)$, 都是与时间变量 t 无关的常数。由于现代市场是一个高度信息化的, 其产生的数据往往只能在很短的时间段内有效。比如某类资产的期望收益 $E(R_i)$ 受众多因素的影响, 其中的一个因素发生改变, $E(R_i)$ 就有可能发生改变。另外, 在数据收集阶段, 收集到的数据可能带有噪声, 同时在实际计算阶段, 经常存在截断误差与舍入误差等。因此, 本文将均值 - 方差模型中的常系数用时变系数来代替, 并考虑噪声、计算误差等因素的干扰, 提出了一类不允许卖空且含时间参数的二次规划。对于该模型, 本文设计了一个在线求解算法, 从理论上分析了该在线算法生成的误

差是有界的, 同时证明了该上界随时间的增长而快速趋于零。这说明在线算法的状态变量可以快速逼近含参数均值 - 方差模型的最优解。

2. 问题描述及动态方程

设有 n 种资产可供选择, 其收益率记为 R_1, R_2, \dots, R_n (随机变量), 均值为 $r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t)$, 其中 $t \geq 0$ 表示时间参数, 协方差矩阵为 $H(t) = (\sigma_{ij}(t))_{n \times n} \in R^{n \times n}$, 其中 $\sigma_{ij}(t) = \text{cov}(R_i, R_j)$ 。如果每种资产占总资产的比例为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则投资组合的收益率 $R_p = R_1 x_1 + R_2 x_2 + \dots + R_n x_n$, 其均值

$$E(R_p) = r_1(t)x_1 + r_2(t)x_2 + \dots + r_n(t)x_n = x^T r(t)$$

方差为 $D(R_p) = x^T H(t)x$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))^T$ 。给定预期收益率 $r_p(t)$, 则可以建立含参数的均值 - 方差投资组合模型[1] [6]:

$$\begin{aligned} \min \sigma^2 &= x^T H(t)x \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x^T r(t) = r_p(t) \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}, t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $t_f > 0$ 表示投资组合结束时刻。

注 1.1: 含参数均值 - 方差投资组合模型(1)比[1] [6]研究的模型更符合实际情况。实际上, [1]研究的均值-方差投资组合模型是静态的; [6]研究的均值 - 方差投资组合模型虽然是含参数的, 但是其没有考虑决策变量 x 的非负约束。比如第 i 种资源不允许卖空, 则不应该去掉 $x_i \geq 0$ 的约束。

问题(1)的 KKT 条件是

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2Hx + \lambda_1 e + \lambda_2 r(t) \geq 0 \\ x^T (2Hx + \lambda_1 e + \lambda_2 r(t)) = 0, t \in [0, t_f] \\ r(t)^T x = r_p(t) \\ e^T x = 1 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ 是(1)式两个等式约束的拉格朗日乘子 $e \in R^n$ 表示元素全是 1 的列向量。显然系统(2)有 $n+2$ 个变量 $[x^T, \lambda_1, \lambda_2]^T \in R^{n+2}$, 有 $2n+3$ 个式子。

考虑 Fischer 价值函数 $\phi(a, b) := \sqrt{a^2 + b^2} - (a+b)$, 该价值函数有下面的性质[7]。

定理 1.1 (1) 对于任意的 $a, b \in R$, 有 $a \geq 0, b \geq 0, ab = 0 \Leftrightarrow \phi(a, b) = 0$ 。

(2) 当 $(a, b) = (0, 0)$ 时, $\phi(a, b)$ 存在次微分; 当 $(a, b) \neq (0, 0)$ 时, $\phi(a, b)$ 是光滑的。

注意(2)式的前三个式子构成了一个含参数线性互补问题。类似于[7], 通过 Fisher 价值函数 $\phi(a, b)$ 可将其转化成非光滑的非线性方程组

$$P(x, \lambda_1, \lambda_2) := (\phi(x_1, y_1), \phi(x_2, y_2), \dots, \phi(x_n, y_n))^T = 0,$$

其中 y_i 是 $y = 2Hx + \lambda_1 e + \lambda_2 r(t)$ 的第 i 个分量。于是(2)式可以等价地转换成

$$\begin{cases} P(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \\ r(t)^T x = r_p(t), t \in [0, t_f]. \\ e^T x = 1 \end{cases} \quad (3)$$

这样处理后方程的个数也变成了 $n+2$, 等于变量的个数。由于 $\phi(a, b)$ 在 $(a, b) = (0, 0)$ 处不是可微的, 因此方程(2)也是非光滑的。但是由[7]知, $\varphi(a, b) := \phi^2(a, b)$ 在 R^2 内是光滑的, 特别地, $\nabla\varphi(0, 0) = (0, 0)^T$ 。令

$$\bar{P}(x, \lambda_1, \lambda_2) := (\varphi(x_1, y_1), \varphi(x_2, y_2), \dots, \varphi(x_n, y_n))^T = 0.$$

令 $X = [x^T, \lambda_1, \lambda_2]^T$, 于是可以将(2)等价地转换成

$$F(X) = \begin{bmatrix} \bar{P}(x, \lambda_1, \lambda_2) \\ r(t)^T x - r_p(t) \\ e^T x - 1 \end{bmatrix}, t \in [0, t_f]. \quad (4)$$

则 $F(X)$ 在 R^{n+2} 内是光滑的, 且 $F(X)$ 关于 x, λ_1, λ_2 的导数是

$$F'(X) = J_F(X) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ r(t)^T & 0 & 0 \\ e^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n+2) \times (n+2)}, \quad (5)$$

其中 G_{11}, G_{12}, G_{13} 分别是向量值函数 $\bar{P}(x, \lambda_1, \lambda_2)$ 关于 x, λ_1, λ_2 的导数。

在设计求解含参数系统的在线算法过程中, 动态方程是最关键的环节之一。为了求解含参数系统, Zhang 等[6]提出了如下的动态方程

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma E(t) \quad (6)$$

其中 $\gamma > 0$ 是增益参数。由于(3)的增益 γ 是常数, 这使得由(3)导出的算法对噪声等因素的影响特别敏感。为了得到更稳健的算法, Zhang 等[6]将(6)中的常增益推广到变增益, 提出了幂函数型变增益动态方程

$$\frac{dE(t)}{dt} = -(\gamma + t^\gamma) E(t) \quad (7)$$

本文, 为了得到抗干扰性更强的快速算法, 考虑如下指数型动态方程[6] [8]

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma \exp(t) E(t) \quad (8)$$

其中 $E(t)$ 是待定的误差函数, 其表达式取决于要解决的问题。对于较大的 t , 有 $\gamma \exp(t) > \gamma + t^\gamma > \gamma$, 因此(8)生成的 $E(t)$ 比(6)、(7)生成的 $E(t)$ 收敛于零的速度快多了。从下面的分析可以看出, 正是这个速度优势使得(8)导出的在线算法有更强的稳健性。为了进一步提升(8)的数值效果, 考虑带激活函数的形式

$$\frac{dE(t)}{dt} = \text{JMP}(E(0)) \circ (-\gamma \exp(t) \Phi(E(t))) \quad (9)$$

其中 $\Phi(\cdot): R^{n+2} \rightarrow R^{n+2}$ 的每个分量都是单调递增奇函数, $\text{JMP}(\cdot): R^{n+2} \rightarrow R^{n+2}$ 是跳跃函数, 每个分量定义如下

$$\text{jmp}(E_i(0)) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } E_i(0) \neq 0 \\ 0, & \text{如果 } E_i(0) = 0 \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n+2$$

◦表示向量或矩阵的哈达玛(Hadamard)积, 即对应分量的相乘。

3. 噪声环境下含参数均值 - 方差投资组合模型及在线算法

本节利用动态方程(9), 给出求解含参数均值 - 方差投资组合模型(1)的在线算法。

考虑时间参数 t , 将(4)定义的 $F(X)$ 记为 $F(X, t)$, 并将其代入动态方程(9), 得求解含参数均值 - 方差投资组合模型(1)的在线算法

$$F'_X(X, t)X'(t) = \text{JMP}(F(X(0), 0)) \circ (-\gamma \exp(t)\Phi(F(X(t), t))) - F'_i(X, t), \quad (10)$$

其中 $F'_X(X, t)$ 是(5)式定义的 $F'(X)$ 。

下面称 $X(t)$ 是在线算法(10)的状态变量, 其前 n 个分量是含参数均值 - 方差投资组合模型(1)的解, 最后两个分量是其对偶变量。类似于[8]的定理 3.1, 在线算法(10)有如下的渐进收敛结果。

定理 2.1 假设 $X(t)$ 满足在线算法(10), 则有如下结论:

如果存在 $i \in \{1, 2, \dots, n+2\}$, 有 $F_i(X(0), 0) = 0$, 则对于任意的 $t > 0$, 有 $F_i(X(t), t) = 0$;

如果任意 $i \in \{1, 2, \dots, n+2\}$, 有 $F_i(X(0), 0) \neq 0$, 则 $F(X(t), t)$ 的每个分量都渐进收敛到零。

证明 (1) 由 $F_i(X(0), 0) = 0$ 及 jum 的定义, 有 $\text{jum}(F_i(X(0), 0)) = 0$ 。于是对于任意的 $t \geq 0$, 在线算法(10)的第 i 个方程可以简写成

$$G_{i,:}(X(t), t)\dot{X}(t) = -F'_{i,t}(X(t), t),$$

其中 $G_{i,:}(X(t), t) = \left[\frac{\partial F_i(X(t), t)}{\partial X_1}, \frac{\partial F_i(X(t), t)}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial F_i(X(t), t)}{\partial X_{n+2}} \right] \in R^{(n+2) \times 1}$ 表示 F_i 关于 X 的导数, 也是矩阵

$G(X(t), t)$ 的第 i 行。由上面的式子及链式法则得 $\frac{dF_i(X(t), t)}{dt} = 0$, 于是 $F_i(X(t), t) = F_i(X(0), 0) = 0$ 。

(2) 由于任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有 $F_i(X(0), 0) \neq 0$, 于是在线算法(10)可改写成

$$G(X(t), t)\dot{X}(t) = -\gamma \exp(t)\Phi(F(X(t), t)) - F'_i(X(t), t).$$

结合链式法则得 $\frac{dF(X(t), t)}{dt} = -\gamma \exp(t)\Phi(F(X(t), t))$ 。定义 Lyapunov 函数[8]

$$L(t) = \frac{1}{2} \|F(X(t), t)\|^2.$$

显然 $L(t)$ 关于 $F(X(t), t)$ 是正定的。对 $L(t)$ 求导得

$$\frac{dL(t)}{dt} = F(X(t), t)^T \frac{dF(X(t), t)}{dt} = -\gamma \exp(t) F(X(t), t)^T \Phi(F(X(t), t)).$$

因为 $\Phi(\cdot)$ 的分量都是单调递增的奇函数, 于是(i)对于任意的 $F(X(t), t) \neq 0$, 有 $\frac{dL(t)}{dt} < 0$; (ii) 当且仅当 $F(X(t), t) = 0$, 有 $\frac{dL(t)}{dt} = 0$ 。结合 Lyapunov 稳定性理论有 $F(X(t), t)$ 的每个分量都渐进收敛到零。证毕。

下面考虑噪声环境下的含参数均值 - 方差投资组合模型, 将噪声、误差等因素的干扰统一成一个含参数的加性噪声 $N(t) \in R^{n+2}$ 。为此, 考虑如下动态方程

$$\frac{dE(t)}{dt} = \text{JMP}(E(0)) \circ (-\gamma \exp(t)\Phi(E(t)) + N(t)). \quad (11)$$

令 $E(t) = F(X(t), t)$, 代入(11)得抗噪声在线算法

$$F'_X(X(t), t)X'(t) = \text{JMP}(F(X(0), 0)) \circ (-\gamma \exp(t)\Phi(F(X(t), t)) + N(t)) - F'_i(X(t), t). \quad (12)$$

假设加性噪声考虑噪声水平满足 $\|N(t)\| \leq B, \forall t \geq 0$, 则抗噪声在线算法(12)有下面的收敛结果。

定理 2.2 假设 $X(t)$ 满足抗噪声在线算法(12), 则有如下结论:

- (1) 如果存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有 $F_i(X(0), 0) = 0$, 则对于任意的 $t > 0$, 有 $F_i(X(t), t) = 0$;
- (2) 如果任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有 $F_i(X(0), 0) \neq 0$, 则对于任意的 $t \geq 0$, $\|N(t)\|$ 有上界, 其上界是 $\varphi_i^{-1}(B/(\gamma \exp(t)))$, 其中 $\varphi_i^{-1}(\cdot)$ 表示 $\varphi_i(\cdot)$ 的反函数。显然该上界随着时间 $t \rightarrow \infty$ 而快速趋于零。

证明 (1)的证明与定理 2.1 的(1)的证明是一样的。

(2) 此时抗噪声在线算法(12)可改写成

$$G(X(t), t) \dot{X}(t) = -\gamma \exp(t) \Phi(F(X(t), t)) + N(t) - F_i'(X(t), t).$$

整理得 $\frac{dF(X(t), t)}{dt} = -\gamma \exp(t) \Phi(F(X(t), t)) + N(t)$, 其分量形式是

$$\frac{dF_i(X(t), t)}{dt} = -\gamma \exp(t) \varphi_i(F_i(X(t), t)) + N_i(t), i = 1, 2, \dots, n+2,$$

其中 $\varphi_i(\cdot)$ 是激活函数 $\Phi(\cdot)$ 的第 i 个分量。定义分量形式的 Lyapunov 函数

$$L_i(t) = \frac{1}{2} F_i^2(x(t), t), i = 1, 2, \dots, n+2.$$

对每个 $i = 1, 2, \dots, n+2$, 对 $L_i(t)$ 关于参数 t 求导得

$$\begin{aligned} \frac{dL_i(t)}{dt} &= F_i(X(t), t) \frac{dF_i(X(t), t)}{dt} \\ &= -F_i(X(t), t) (\gamma \exp(t) \varphi_i(F_i(X(t), t)) - N_i(t)) \\ &= -\gamma \exp(t) F_i(X(t), t) \varphi_i(F_i(X(t), t)) + F_i(X(t), t) N_i(t) \\ &= -\gamma \exp(t) |F_i(X(t), t)| |\varphi_i(F_i(X(t), t))| + F_i(X(t), t) N_i(t) \\ &\leq -\gamma \exp(t) |F_i(X(t), t)| |\varphi_i(F_i(X(t), t))| + |F_i(X(t), t)| |N_i(t)| \\ &\leq -|F_i(X(t), t)| (\gamma \exp(t) \varphi_i |F_i(X(t), t)| - B). \end{aligned} \quad (13)$$

令 $R(t) = \gamma \exp(t) \varphi_i |F_i(X(t), t)| - B$. 按 $R(0)$ 的符号讨论如下。

(i) 如果 $R(0) = 0$, 则 $\left. \frac{dL_i(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$, 因此 $|F_i(X(0), 0)|$ 是 $|F_i(X(t), t)|$ 一个局部极值。如果其是极大值, 则 $|F_i(X(t), t)|$ 将逐渐减小; 如果其是极小值, 则 $|F_i(X(t), t)|$ 将逐渐增大, 这说明存在 $\bar{t} > 0$, 使得当 $t \in [0, \bar{t}]$ 时, 有 $R(t) > 0$. 结合(13)可得, $\frac{dL_i(t)}{dt} < 0$, 这说明 $|F_i(X(t), t)|$ 将逐渐减小, 与 $|F_i(X(t), t)|$ 将逐渐增大矛盾。因此, 此时 $|F_i(X(0), 0)|$ 是 $|F_i(X(t), t)|$ 是一个局部极大值。

(ii) 如果 $R(0) > 0$, 则 $\left. \frac{dL_i(t)}{dt} \right|_{t=0} < 0$, 则由 $\frac{dL_i(t)}{dt}$ 的连续性, $|F_i(X(t), t)|$ 将逐渐减小, 一直到某个时刻 $\bar{t} > 0$, 有 $R(\bar{t}) = 0$. 接下来的讨论与情况(i)类似。

(iii) 如果 $R(0) < 0$, 则 $\left. \frac{dL_i(t)}{dt} \right|_{t=0} > 0$, 则由 $\frac{dL_i(t)}{dt}$ 的连续性, $|F_i(X(t), t)|$ 将逐渐增大, 一直到某个

时刻 $\hat{t} > 0$, 有 $R(\hat{t}) = 0$ 。接下来的讨论与情况(i)类似。

综上可得, 对于任意的 $t \geq 0$, 有 $|F_i(X(t), t)| \leq \varphi_i^{-1}(B/(\gamma \exp(t)))$, 即 $|F_i(X(t), t)|$ 有上界。证毕。

4. 数值实验

本节给出三组实验, 分别说明本文设计的两种在线算法, 分别记为 OLM(10)与 OLM(12), 可以有效求解无参数均值 - 方差投资组合模型、含参数均值 - 方差投资组合模型以及噪声环境下均值 - 方差投资组合模型, 并与经典的求解含参数问题的在线算法, 即 Zhang 神经网络(ZNN), 进行数值对比。两种在线算法中的参数 $\gamma = 1$, 并取激活函数为单位函数, 即 $\phi(x) = x$ 。

问题 4.1 [1]: 某投资者对三种风险资产感兴趣, 这三种资产收益率的均值分别是 0.06、0.12、0.09, 协方差矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & -0.01 \\ 0.3 & 2.4 & 0.5 \\ -0.01 & 0.5 & 1.1 \end{bmatrix}$$

试为之构造风险最小的资产组合, 使预期收益率 $r_p = 0.1$ 。考虑 $t_f = 10$, 初始点 $X(0) = [1/3, 1/3, 1/3, 1, 1]^T$ 。仿真结果见图 1 中。

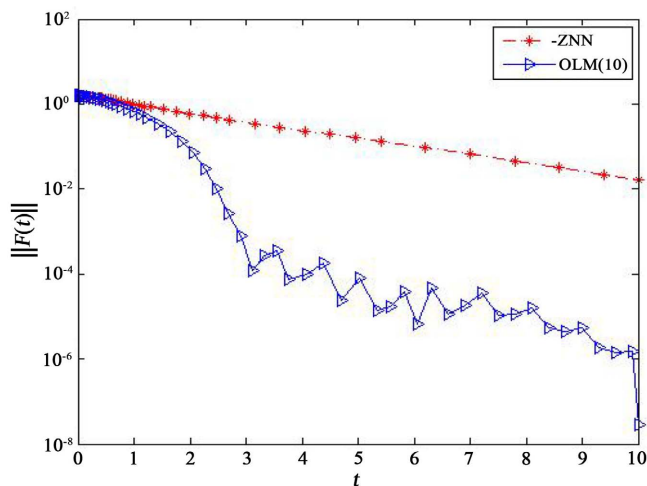


Figure 1. Simulation results of ZNN and OLM(10) solving Problem 4.1
图 1. ZNN 与 OLM(10)求解问题 4.1 的仿真结果

由图 1 可以看出, 两种方法都比较快的求出了问题 4.1 的较高精度近似解, ZNN 在 10 秒时的精度达到了 10^{-2} , 而 OLM(10)在 2 秒左右时达到了这一精度; 在最终时刻, 即 10 秒时, OLM(10)的精度分别达到了 10^{-8} 。由图 1 可以看出, 在整个计算过程中, OLM(10)的数值表现几乎一直优于 ZNN。这说明了我们的均值 - 方差投资组合模型的等价形式, 即(3)式, 是合理的。同时说明我们设计的 OLM(10)是有效的。

问题 4.2 [6]: 考虑三种资产的含参数均值-方差投资组合问题, 其资产收益率的均值关于时间有小的周期波动, 假设

$$r = [0.100162 + 0.01\sin(t), 0.164244 + 0.01\sin(2t), 0.182082 + 0.01\sin(3t)]^T$$

同时假设协方差矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} 0.100162 & 0.045864 & 0.005712 \\ 0.045864 & 0.210773 & 0.028283 \\ 0.005712 & 0.028283 & 0.066884 \end{bmatrix}.$$

预期收益率 $r_p = 0.15 + 0.01 \ln(1+t)$ 。因为 r 各分量的最大周期是 2π ，因此我们考虑 $t_f = 2\pi$ ，且取初始点 $X(0) = [1/3, 1/3, 1/3, 1, 1]^T$ 。仿真结果见图 2 中。

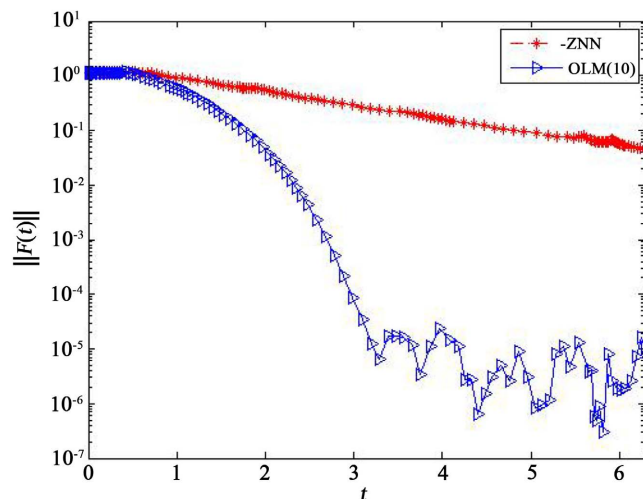


Figure 2. Simulation results of ZNN and OLM(10) solving Problem 4.2
图 2. ZNN 与 OLM(10) 求解问题 4.2 的仿真结果

由图 2 的仿真结果可以看出，OLM(10) 的表现明显优于 ZNN。以 $\|F(t)\| \leq 10^{-4}$ 作为收敛准则，ZNN 直到 10 秒时还没有达到这个收敛标准，而 OLM(10) 在 2.5 秒后就达到了。ZNN 与 OLM(10) 的在 $t = 2\pi$ 时的精度分别是 10^{-2} 与 10^{-5} 。

问题 43: 考虑问题 4.2 中三种资产的收益率均值与协方差矩阵，并假设周期噪声 $N(t) = 0.01 \sin(t)$ 。考虑 $t_f = \pi$ ，取初始点 $X(0) = [1/3, 1/3, 1/3, -1, -1]^T$ ，使用 ZNN 与 OLM(12) 求解这个问题。仿真结果见图 3。

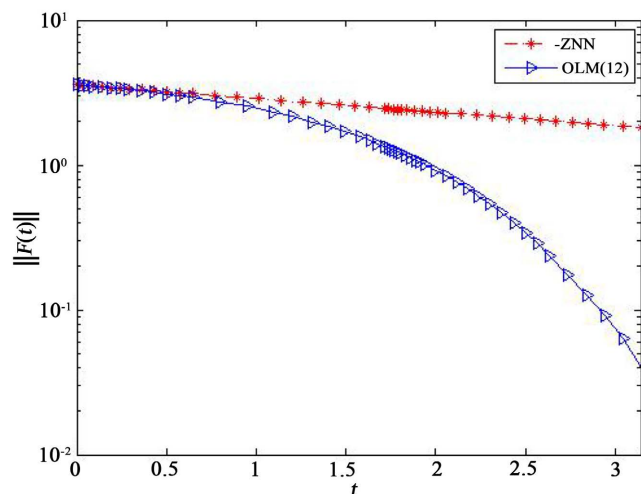


Figure 3. Simulation results of ZNN and OLM(12) solving Problem 4.3
图 3. ZNN 与 OLM(12) 求解问题 4.3 的仿真结果

由图3可看出,OLM(12)有一定的抗干扰能力,其最终的精度达到了 10^{-2} ,而ZNN最终的精度是 10^{-1} 。

5. 总结

本文针对不允许卖空的投资组合问题,提出了一类含参数均值-方差投资组合模型,该模型可以更细致地描述动态投资组合问题,同时考虑了噪声对模型的影响。设计了一类抗噪声在线求解算法。理论与实验结果都表明了在线算法的有效性。

基于本文提出的在线算法,我们将继续研究含参数均值-方差投资组合模型的求解方法,包括:设计具有有限时间终止的在线算法;设计抗噪声迭代算法;高精度迭代算法等。

致 谢

感谢审稿人提出的宝贵意见。

基金项目

国家级大学生创新创业训练计划项目(S202110904009)、枣庄学院教学改革重点项目(XJG21019)。

参考文献

- [1] 张忠楨. 二次规划-非线性规划与投资组合的算法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2006: 1-10.
- [2] 卢小丽, 何光, 李高西. 求解自融资投资组合模型的量子行为的粒子群优化算法[J]. 武汉大学学报(理学版), 2021(2): 136-142.
- [3] 郑继明, 郑永杰, 胡济桐, 李超. 均值-CVaR 投资组合模型的遗传算法求解研究[J]. 科技与创新, 2020(20): 12-14.
- [4] 欧攀, 王沁, 段静静, 周文浩. 基于负半熵下半方差近似偏度的投资组合模型及应用[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2020(11): 230-236.
- [5] 王晓琴, 高岳林. 带有交易成本的均值-方差-下半方差投资组合模型[J]. 工程数学学报, 2020(2): 155-164.
- [6] Zhang, Z.J., Kong, L.D., Zheng, L.A., Zhang, P.C., Qu, X.L., Liao, B.L. and Yu, Z.L. (2018) Robustness Analysis of a Power-Type Varying-Parameter Recurrent Neural Network for Solving Time-Varying QM and QP Problems and Applications. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, **50**, 5106-5118. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2018.2866843>
- [7] Kanzow, C. (1994) An Unconstrained Optimization Technique for Large-Scale Linearly Constrained Convex Minimization Problems. *Computing*, **53**, 101-117. <https://doi.org/10.1007/BF02252984>
- [8] 陆秀荣, 黄学文, 杨辉, 张智军. 求解时变非线性不等式的新型动态学习网络[J]. 控制工程, 2022, 29(3): 404-412.