

问题驱动教学法在概率统计教学中的应用

孙慧静, 王丽英, 李文彬

海军航空大学航空基础学院数学教研室, 山东 烟台
Email: 14118420@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2021年5月20日; 录用日期: 2021年6月23日; 发布日期: 2021年6月30日

摘要

以问题驱动教学法作为概率统计课程教学方法改革的一种手段, 有针对性的选取概率统计“事件的独立性”的内容为例, 详细介绍了问题驱动教学法的实施过程。以贴近军事院校学员的“饱和攻击战术攻打航母”的军事案例的视频作为教学的切入点, 展现了提出问题, 详细分析与解决问题的过程。课堂教学实践证明, 问题驱动教学法能够开阔学员的视野, 对于课程建设、教学效果、教员及学员能力的提高都有重要意义。

关键词

问题驱动, 教学法, 概率统计, 独立性

Application of Problem-Driven Teaching Method in Probability and Statistics Teaching

Huijing Sun, Liying Wang, Wenbin Li

Teaching Section of Mathematics, School of Aviation Foundation, Naval Aviation University, Yantai Shandong
Email: 14118420@bjtu.edu.cn

Received: May 20th, 2021; accepted: Jun. 23rd, 2021; published: Jun. 30th, 2021

Abstract

Taking the problem-driven teaching method as a means of teaching method reform of *probability and statistics* course, this paper selects “the independence event” as an example, and introduces the implementation process of the problem-driven teaching method in detail. Taking the video of

the military case of “saturation attack tactics attacking aircraft carrier” close to the students of military academies as the starting point of teaching, it shows the process of raising problems, analyzing and solving problems in detail. The practice of teaching has proved that the problem-driven teaching method can broaden students’ horizons, which is of great significance to course construction, teaching effect, and the improvement both of teachers’ and students’ abilities.

Keywords

Problem-Driven, Teaching Method, Probability and Statistics, Independence

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

概率论与数理统计是国内外理工科各专业学员教学计划中必不可少的公共基础课。本课程是向学员传授随机现象及其规律,培养学员使用随机思想分析问题能力的重要途径。本课程的特点——“三多”,即内容多、公式多、需要的数学基础知识多。传统的课堂讲授课会使学员感到枯燥无味,久而久之,出现厌学情绪。因此,让学员轻松、愉快地学好这门课程成为了每位任课教员要努力实现的目标。

概率统计的思想方法来源于生活,因此,教学中应处处有案例,教员应该从贴近生活或与学员专业相关的案例入手,用身边常见的现象和例子提出问题,从而引导他们分析问题和解决问题。这样从问题到理论,再从理论到应用,不仅可以激发学员的学习热情,减少距离感,强化实践意识,提高学员分析问题和解决问题的能力,还可以拓展学员的视野,从而提高学习的兴趣与效率。

问题驱动教学法即基于问题的教学方法(Problem-Based Learning, PBL) [1] [2],它是基于提出问题、分析问题、解决问题作为主要内容和手段的教学法。这种方法不像传统教学那样先学习理论知识再解决问题。教员在此过程中的角色是问题的提出者、课程的设计者以及结果的评估者。问题驱动教学法可表示为图 1 [2]所示。此模式可以用于整个课程或一章一节或一个例题,根据教学内容,该模式需灵活应用。因此,在概率统计教学中,教员要注重思想的启发,注重从简单的专业实例中提出问题,让学员能够感受到实际抽象出理论,再从理论到应用的一个操作过程。学员所有的思维活动都是针对问题的,所有的思维都体现于问题的分析和解决[3] [4]。

2. 问题驱动教学法的应用实例

我们仅以概率论与数理统计课程中的《事件的独立性》这节内容的教学为例[3],向同仁们展示“问题驱动教学法”的实施过程。

首先,针对军事院校的专业特点,利用气势恢宏的饱和攻击战术攻打“尼米兹”级航母场面的视频作为切入点,进而向学员简单阐述什么是“饱和攻击”(即利用作战飞机、水面舰艇和潜艇等携载反舰导弹,采用大密度、连续攻击的突防方式,同时从空中、水面和水下不同方向,不同层次向同一个目标发射大量导弹,使敌航母编队的海上防空系统的反导弹抗击能力在短时间内处于无法应付的饱和状态,从而达到摧毁目标的目的),再根据视频中所介绍的“按照苏联人的计算利用 90 枚反舰导弹就能够击沉一艘‘尼米兹’及航母”,由此构造引例,并提出问题。

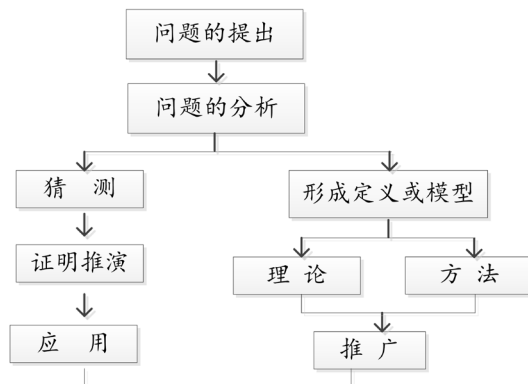


Figure 1. Problem-driven teaching method
图 1. 问题驱动教学法

问题：至少需要配置多少枚该型号的反舰导弹能以 99%把握命中航母？这是本次课的一个主问题。

构造的引例如下：假设某型号反舰导弹命中“尼米兹”级航母的概率为 0.05，现对该航母进行“饱和和攻击”，欲以 99%以上的把握命中“尼米兹”级航母，问至少需要配置多少枚该型号的反舰导弹？

接着进行分析：假设需要 n 枚反舰导弹，设 $A_k = \{ \text{第 } k \text{ 枚反舰导弹命中航母} \}$ ， $k=1,2,\dots,n$ 。则{航母被命中} = {至少有一枚导弹命中航母} = $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 。

题目要求“航母被命中的概率大于 0.99”，前面我们讲过在计算“至少”事件的概率时，可以从其对立事件来考虑，至少有一枚导弹命中航母，其对立事件为“所有的导弹都没有命中航母”。

因而 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n)$ 。据乘法公式，

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \dots P(\bar{A}_n | \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1}). \tag{1}$$

问题 1：式(1)中的条件概率是多少呢？这些条件概率和它们各自的无条件概率之间有什么关系呢？

接着讲述：“通过前面的学习，我们知道，一般情况下，条件概率不等于无条件概率。但例外的情形也不在少数”。构造例子如下。

引入在装有 3 个红球和 7 个绿球的盒子中有放回任取一球，设 A, B 分别表示甲，乙两人取到红球，求

$$1) P(B), P(B|A), P(B|\bar{A}); \quad 2) P(A), P(A|B), P(A|\bar{B}).$$

解：这是有放回取球，显然甲能否取到红球不会影响到乙取到红球的概率；同理，乙能否取到红球不会影响到甲取到红球的概率。故

$$1) P(B) = P(B|A) = P(B|\bar{A}) = \frac{3}{10}; \quad 2) P(A) = P(A|B) = P(A|\bar{B}) = \frac{3}{10}.$$

一般地，如果事件 A 发生与否对事件 B 发生的概率没有影响，我们称事件 A, B 相互独立。“事件 A 发生与否对事件 B 发生的概率没有影响”用数学式子来表达 $P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B)$ 。 A 与 B 独立从直观上可以认为 A 与 B 没有“关系”。在 A 与 B 没有“关系”的条件下， A 与 B 同时发生的概率由乘法公式可得， $P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$ 。进而给出两个事件相互独立的定义。

定义 1 若 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则称事件 A, B 相互独立。

问题 2：为什么不采取更直观的 $P(B|A) = P(B)$ 来刻画独立性呢？

简单提示后，留给同学们课后练习。

独立性简化了积事件的概率计算。实际应用中，我们通常把公式 $P(AB) = P(A)P(B)$ 作为两个相互独立事件满足的一条性质加以利用。即已知 A, B 相互独立，则 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。进一步的研究：两个事件相互独立的性质。回到“引入”中来，提出问题。

问题 3: 请说出 \bar{A} 与 B, A 与 \bar{B}, \bar{A} 与 \bar{B} 之间什么关系？

由此得到两个事件相互独立的性质定理 2 (若 A, B 相互独立，则 \bar{A} 与 B, A 与 \bar{B}, \bar{A} 与 \bar{B} 也相互独立)。

在实际应用中，仅仅讨论两个事件还是不够的。还需要讨论多个事件的独立性。进一步来探究：假设甲、乙、丙三人均参与了取球，并设 A, B, C 分别表示甲、乙、丙抽到红球。提出问题 4。

问题 4: A, B, C 三者之间是什么关系呢？

实际上这三位参与取球的人中无论谁能否抽到红球不会对其他人抽到红球产生任何影响，我们把这三件事称为相互独立的事件。

问题 5: 如何定义三个事件的独立性呢？由两个事件的相互独立性可得，三个事件的相互独立能否用 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 这一个式子来定义呢？

进而给出三个事件相互独立以及两两独立的定义。

问题 6: 从“相互独立”和“两两独立”的定义可知，“相互独立”则一定“两两独立”。反之成立么？

接下来介绍著名的伯恩斯坦反例来说明两两独立不一定相互独立，即虽然满足相互独立中的前三个等式，却不满足最后一个等式。进一步提出问题如下。

问题 7: 能否仅用最后一个等式来刻画三个事件的相互独立性呢？

这个问题留给大家课后思考构造反例。

由三个事件的独立性的定义很容易推广到更一般的情形 n 个事件相互独立的定义，并提出问题 8。

问题 8: 多个相互独立的事件，满足什么性质呢？

回顾两个相互独立事件性质定理 2，定理 2 也可以叙述为：若两个事件相互独立，则将其中一个或两个换成它们各自的对立事件，得到的两个事件仍为独立事件。类似的会得到：对于 n 个相互独立的事件，将其中的任意多个事件换成其各自的对立事件，则得到的 n 个事件仍相互独立。以三个事件为例：若 A, B, C 相互独立，则将其中任意一个事件，任意两个事件，三个事件换成他们各自的对立事件，可推出其他 7 个相互独立的事件组。

始终以问题为导向，设置了 1 个总问题和 8 个分问题，我们就完成了主要内容的授课。最后，我们来解决最初提出的主问题：至少需要配置多少枚该型号的反舰导弹能以 99% 以上的把握命中一艘“尼米兹”级航母？所谓“饱和攻击”是指同时从不同的方向，不同层次发射大量的反舰导弹进行攻击。根据问题的实际意义，我们就可以认为这 n 枚反舰导弹命中航母是相互独立的，求解过程如下：

引例的解：设需要 n 枚反舰导弹能以 99% 的概率命中航母，设 $A_k = \{\text{第 } k \text{ 枚反舰导弹命中航母}\}$ ， $k = 1, 2, \dots, n$ 。则 A_k 之间相互独立。且 $P(A_k) = 0.05$ 。则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n)$$

据独立性， $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) = 0.95^n$ 。

故

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) = 1 - 0.95^n \geq 0.99.$$

即 $0.95^n \leq 0.01$ ，两边取对数，解得 $n \geq \frac{\log(0.01)}{\log(0.95)} \approx 89.9$ 。故至少需要 90 枚反舰导弹能以 99% 的概率命中

航母。

将以上的教学环节设计总结一下(如图2所示)。首先由“饱和攻击”的视频创设问题情境,激发学员学习兴趣,引导学员主动参与教学。继而提炼归纳两个事件相互独立的定义,并导出事件独立性的性质。再将两个事件独立性的概念推广到三个事件乃至 n 个事件的情形,让学员体会由特殊到一般的逻辑思维过程。最后应用“事件的独立性”解决问题。把问题的提出与解决作为教学的出发点与着力点,按照提出问题、分析问题、解决问题的思路设计授课,从而达到使学员由学数学,到用数学的目标。在这个教学过程中,我们提出1个总问题和8个分问题,让学员充分参与课堂,紧跟教学的思路积极思考,分析问题并解决问题。

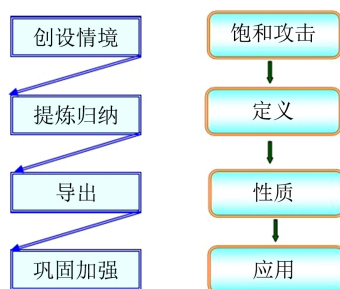


Figure 2. Design of classroom teaching link of *Events Independence*
图2. 《事件的独立性》课堂教学环节设计

3. 小结

作为一名军事院校的教员,在概率论与数理统计的课程课堂教学中有针对性的设计军事案例并提出问题,营造一个积极思考的环境,不仅能使学员一步一步自己寻求解决问题的方法,激起学员的探究欲望,而不是被动地记忆、理解教员传授的知识,学员可以获得亲身思考的机会,便于逐渐形成善于质疑、乐于探究、勤于动脑、努力求知的研究态度,而且有助于帮助学员了解概率统计的方法来源于实际,又在实际中特别是军事中有广泛的应用。

课堂教学实践证明,基于问题驱动的教学方法能够激发学员学习情趣,变被动为主动,引领学员的积极思考、动手操作等方面具有积极的作。同时本文做研究的内容对于本单位的课程建设、教学效果、教员及学员能力的提高都有重要的理论及实践意义。

致 谢

感谢海军航空大学教学成果立项项目(2021.01~2024.12)——《大学数学课程中融入思政教育的研究与实践》的支持。

参考文献

- [1] 孙绍荣. 高等教育方法概论(修订版) [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2010: 75-86.
- [2] 胡端平, 李小刚, 杨向辉. 问题驱动教学法的研究与实践[J]. 高等数学研究, 2013, 16(1): 80-82.
- [3] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2008: 76-83.
- [4] 赵学达, 张丽梅. 以问题驱动的概率论与数理统计课程的教学改革与实践[J]. 大学教育, 2013(1): 114-115.