Vocational Education 职业教育, 2024, 13(2), 317-324
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ve
https://doi.org/10.12677/ve.2024.132052

“六步式”研讨教学法在数值积分教学中的应用

郭玉玲

上海理工大学，理学院，上海

收稿日期：2024年1月18日；录用日期：2024年3月5日；发布日期：2024年3月13日

摘　要

数值积分方法是研究生公共基础课－数值分析课程的基本内容。本文介绍了“六步式”研讨教学法的基本步骤，并结合数值积分方法的教学实例，详细阐述了如何实施该教学法并提高教学效果。该教学法以学生为中心，通过一系列的问题引导学生进行深入思考和合作探究，提高学生的探究思维和自主学习能力。

关键词

“六步式”研讨教学法，数值积分教学，探究思维和自主学习

The Application of “Six-Step” Discussion Teaching Method in Numerical Integration Teaching

Yuling Guo

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jan. 18th, 2024; accepted: Mar. 5th, 2024; published: Mar. 13th, 2024

Abstract

The numerical integration method is a fundamental topic in the graduate-level course of Numerical Analysis. This article introduces the basic steps of the “Six-Step” seminar teaching method and provides detailed guidance on implementing this teaching method and improving teaching effectiveness, using examples from numerical integration methods. This teaching method focuses on

文章引用: 郭玉玲. “六步式”研讨教学法在数值积分教学中的应用[J]. 职业教育, 2024, 13(2): 317-324.
DOI: 10.12677/ve.2024.132052

student-centered learning and involves a series of questions to guide students in deep thinking and collaborative exploration, promoting their inquiry-based thinking and independent learning abilities.

Keywords

"Six-Step" Discussion Teaching Method, Numerical Integration Teaching, Inquiry-Based Thinking and Independent Learning

1. 引言

数值积分方法[1]是理工科研究生公共基础课程–数值分析中的重要内容之一。它主要涉及如何用数值方法来近似计算定积分的值，以及如何估计和控制近似误差，对于提高学生的计算和分析能力具有重要意义。然而，传统的教学方法往往以教师为中心，注重知识传授而忽视学生的主动参与。因此，需要采用一种能够激发学生学习兴趣和积极性的教学方法。

研讨式教学[2] [3] [4]是一种有着教学和科研双重功能的先进教学模式。它以问题解决为中心，通过教师创设问题情境，引导学生进行资料查找、研究、讨论、实践和探索，以提出解决问题的方法。研讨式教学不仅激发学生学习兴趣和积极性，帮助学生掌握知识，更注重培养他们获取知识的能力。在当代教育中，研讨式教学有助于学生从被动接受知识转变为主动构建知识的过程，实现学习方式的转型。目前，研讨式教学在国内多所大学已被广泛研究和应用，取得了积极的效果。针对不同学科的特点，一些学者分别提出了针对国际贸易、英语、微积分、食品生物化学等课程的研讨式教学法[5] [6] [7] [8] [9]。然而，至今还没有学者将研讨式教学法应用于数值积分方法的教学中。为此，本文探究“六步式”研讨教学法[3]在数值积分方法教学中的应用。

2. “六步式“数值积分研讨教学法

本节将着重介绍“六步式”数值积分研讨式教学法的实施过程。该教学方法要求教师和学生按照以下六个步骤共同进行教学，具体操作方法如下。

2.1. 布置题目

教师在课堂上首先介绍常用的数值积分公式，包括 Newton-Cotes 求积公式(梯形公式、辛普森公式)、复化求积公式(复化梯形求积公式、复化 Simpson 求积公式)和高斯求积公式(Gauss-Legendre 公式、Gauss-Chebyshev 公式、Gauss-Laguerre 公式、Gauss-Hermite 公式)等。然后，教师引导学生思考和探究：这些公式的构造思想是什么？对应的数值误差有哪些？它们各自的优缺点是什么？此外，教师鼓励学生通过数值实验，来展示各类数值公式的计算效果及其优缺点。通过这种方式，学生可以更深入地理解数值积分的基本原理和方法，并且能够在实践中逐步提高自己的解题能力。

2.2. 确定方案

基于以上三类积分公式，我们将以一个由 36 人组成的教学班为例进行分组。每组由 6 人组成，共有

6 个独立的小组。具体划分如下：2 个小组研究 Newton-Cotes 求积公式，2 个小组研究复化求积公式，2 个小组研究高斯求积公式。每个小组内选择一位小组长，负责组织团队成员之间的充分交流，并分配合适的任务。任务分配如下：一名组员负责介绍所研究公式的构造思想；两名组员选择一个适用于该公式的数值算例，其中一人负责使用 MATLAB 实现该算例的计算，另一人负责展示计算结果并结合数值结果说明该数值公式的优点；另外两名组员选取其他数值算例来说明该数值公式的缺点，其中一人负责使用 MATLAB 实现，另一人负责展示和说明结果。

通过这种方式，每个小组都有机会深入研究某一类数值积分公式，并通过团队合作的方式完成各自的任务。这样不仅可以增加学生之间的合作与交流，还能够加深对数值积分公式的理解，并通过实践来加深对其优点和缺点的认识。

2.3. 阅读文献或观看教学视频

为了帮助学生更好地理解和掌握数值积分的难点，我们提供了以下参考文献：李庆扬、王能超、易大义的《数值分析》(第 5 版)，贺丹、刘程鹏、曾维辉等的《数值积分及其应用》，刘绪军的《几种求积公式计算精确度的比较》，陈佩宁、刘竞的《用 MATLAB 求数值积分的方法》，胡支军的《数值积分公式的积分型余项》，刘玉娟、陈应祖、卢克功的《龙贝格积分法及其应用编程》，以及许小勇、金建华的《Newton-Cotes 求积系求积数与复合 Gauss 算法的程序设计》。

此外，我们还引导学生课下观看并学习数值积分的精品微课，并鼓励学生搜集相关文献资料和计算实例来加深对数值积分的理解和掌握。这样可以帮助学生更好地理解和掌握数值积分的原理和应用，提高他们的数值计算能力，并为日后的科学研究和工程应用打下坚实的基础。

2.4. 设计实施

为了确保小组学习的顺利进行，该环节在课外进行实施，每个小组都建立一个 QQ 群或者微信群，并邀请教师加入。教师积极参与到小组的学习中，随时跟进了解或指导小组成员的研究情况。在教师的帮助下，小组成员可以及时解决文献阅读中存在的疑点，选择具有典型性的例题进行研究，并确保难易程度适宜。教师不仅能够及时给予指导和反馈，还可以帮助小组成员更好地理解和掌握数值积分的知识，提高其数值计算能力。通过建立 QQ 群或者微信群，小组成员之间可以方便地交流和分享学习成果，互相督促，共同进步。教师的积极参与和关注，也能够增强小组成员的学习动力和信心，促进学生的自主学习和合作学习能力的发展。

2.5. 成果研讨

该环节在课堂上进行，教师负责主持，每个小组成员利用 PPT 等工具演示和讲解他们的成果。

2.5.1. 研究 Newton-Cotes 求积公式的小组成果研讨

第一个学生介绍 Newton-Cotes 求积公式的构造思想[1]：构造插值型数值积分公式时，将积分区间等分，然后以等分点作为求积节点。这样构造出来的求积公式被称为 Newton-Cotes 求积公式。具体地，将积分区间 $[a,b]$ 等分成 n 等份，步长 $h=(b-a)/n$，求积的等距结点为 $x_k=a+kh$，$(k=0,1,\cdots,n)$，这样构造 Newton-Cotes 公式有：

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k),$$

其中

$$C_k^{(n)}=\frac{h}{b-a}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{t-j}{k-j}dt=\frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(t-j)\mathrm{d}t$$

为柯特斯系数。特别地，

当 $n=1$ 时为梯形公式：$T=\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$，

当 $n=2$ 时为辛普森公式：$S=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$，

当 $n=4$ 时为柯特斯公式：$C=\frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]$。

第二个学生选取数值算例 1，并借助 matlab 实现算例的计算。选取被积函数为：

$$f_1(x)=6x+7,\quad f_2(x)=2x^3+5,\quad f_3(x)=2x^5+5,$$

选取积分区间为[2, 7]。分别采用梯形公式、辛普森公式以及柯特斯公式，并借助 matlab 编程，计算以上三个函数在[2, 7]上的积分，结果见表 1。

Table 1. Results of calculations using the trapezoidal rule, Simpson's rule and the Cotes' formula
表 1. 梯形公式、辛普森公式以及柯特斯公式计算结果

被积函数	精确积分值	数值积分公式	数值积分结果	误差
$f_1(x)=6x+7$	170	梯形公式	170	0
$f_2(x)=2x^3+5$	1217.5	辛普森公式	1217.5	0
$f_3(x)=2x^5+5$	39220	柯特斯公式	39220	0

第三个学生展示算例 1 的计算结果，并结合计算结果说明了 Newton-Cotes 积分公式的优点。该学生指出，Newton-Cotes 积分公式的构造思想简单直观，并且具有代数精度随着积分节点增多而增加的性质。通过观察数值计算结果，可以看到梯形公式、辛普森公式以及柯特斯公式分别对于 1 次、3 次和 5 次多项式的积分都能够进行精确计算，与理论相吻合。

第四个学生选取数值算例 2，并借助 matlab 实现算例的计算。选取被积函数为：

$$f(x)=1/(1+x^2),$$

选取积分区间为[−1, 1]。分别采用 4 阶、6 阶和 8 阶 Newton-Cotes 积分公式进行数值积分，并与精确解进行比较，结果见表 2。

Table 2. Results of calculations using the Newton-Cotes' formula
表 2. Newton-Cotes 积分公式计算结果

被积函数	精确解	相对误差			
		$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$
$f(x)=1/(1+x^2)$	π	0.000063	0.000012	0.000778	≤ 0.00001

第五个学生对算例 2 计算结果进行展示，并结合计算结果说明 Newton-Cotes 积分公式缺点。从结果可以看出，4 阶和 6 阶 Newton-Cotes 积分公式的相对误差都比较小，而 8 阶的相对误差则明显增大。这说明在 n 大于等于 8 时，Newton-Cotes 积分公式可能会产生较大的数值误差，出现数值不稳定现象。但

当 n 较大(如 10 阶)时，Newton-Cotes 积分公式仍然能够给出准确的积分结果，并且相对误差非常小。因此，我们不能一概而论地说当 n 大于等于 8 时，Newton-Cotes 积分公式就不稳定。稳定性与具体的函数和积分区间有关，需要具体问题具体分析。

2.5.2. 研究复化求积公式的小组成果研讨

第一个学生介绍复化求积公式的构造思想[1]：所谓复化求积公式，就是将积分区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份，设步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$，分点为 $x_k=a+kh$，$(k=0,1,\cdots,n)$。先用低阶 Newton-Cotes 公式求得每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上的积分 I_k，然后再对每个子区间上的积分进行求和，即用 $\sum_{k=0}^{n-1} I_k$ 作为所求积分 I 的近似值。例如：

复化梯形公式：

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]=\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right],$$

复化辛普森公式：

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}\left[f(x_k)+4f\left(x_{k+1/2}\right)+f(x_{k+1})\right]=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+1/2}\right)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right],$$

其中 $x_{k+1/2}$ 为子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 的中点。

复化柯特斯公式：

$$C_n=\frac{h}{90}\left[7f(a)+32\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+1/4}\right)+12\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+1/2}\right)+32\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+3/4}\right)+14\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+7f(b)\right],$$

其中 $x_{k+1/4}$，$x_{k+1/2}$，$x_{k+3/4}$ 为子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 的 4 等分内点。

第二个学生选取数值算例 1，并借助 matlab 实现算例的计算。选取数值算例为

$$\int_{-2}^{2}x^4+\cos x dx,$$

分别采用复化梯形公式和复化 Simpson 公式进行计算，结果见表 3。

Table 3. Results of calculations using complex trapezoid formula and complex Simpson formula

表 3. 复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算结果

复化梯形公式				
n	50	100	150	200
误差	3.3157e−2	8.2905e−3	3.6847e−3	2.0726e−3
复化 Simpson 公式				
n	50	100	150	200
误差	1.3912e−6	8.6949e−8	1.7172e−8	5.4301e−10

第三个学生对算例 1 计算结果进行展示，并结合计算结果说明复化求积公式优点。从上述结果可以看出，当等分区间 n 越大时，误差越小，精度越高。对比复化梯形公式与复化 Simpson 公式计算结果可以看出，同样的参数下，复化 Simpson 公式的计算精度更高。

第四个学生选取数值算例 2，并借助 matlab 实现算例的计算。选取数值算例为

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x \text{。}$$

采用复化梯形公式进行数值积分，首先，将区间[0, 1]分成 n 个子区间。然后，在每个子区间上采用梯形公式计算积分值，并将它们相加得到整个积分的数值近似。计算结果如下：当 $n=10$ 时，采用复化梯形公式得到的数值积分结果为 1.0068。当 $n=100$ 时，数值积分结果为 1.0007。当 $n=1000$ 时，数值积分结果为 1.0001。

第五个学生对算例 2 计算结果进行展示，并结合计算结果说明复化求积公式缺点。该积分的精确解为 1.0002。与精确解相比，我们可以看到随着 n 的增加，数值积分结果逐渐接近精确解。然而，在较小的 n 值下，数值积分结果与精确解之间存在较大的误差。若要得到较为精确的计算结果，n 需要充分大，这意味着需要花费较大的计算代价以达到预期的计算精度。该计算结果表明了复化求积公式的一个缺点：对于具有强非线性特征的函数，复化梯形公式可能会产生较大的数值误差。这是因为在每个子区间上应用线性逼近的梯形公式时，无法很好地捕捉到函数的非线性特征，从而导致积分结果不准确。

2.5.3. 研究高斯求积公式的小组成果研讨

第一个学生介绍高斯求积公式的构造思想[1]：在构造求积公式时，可通过选择适当的插值节点和求积系数，使得其代数精度最高达到 $2n+1$。把求积节点和求积系数视为同等参数求解。既可利用方程组得到，也可借助正交多项式的零点来确定。而利用具有不同权函数的正交多项式就能得到不同类型的 Gauss 型求积公式[1]。例如：Gauss-Legendre 公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}x_k\right),$$

其中 Gauss-Legendre 求积公式的结点和系数见表 4。

Table 4. Gauss-Legendre quadrature nodes and coefficients
表 4. Gauss-Legendre 求积结点和系数

n	x_k	A_k
2	±0.5773502692	1.0000000000
3	±0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888889
4	±0.8611363116 ±0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	±0.9061798459 ±0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888
6	±0.9324695142 ±0.6612093865 ±0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346
7	±0.9491079123 ±0.7415311856 ±0.4058451514 0.0000000000	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837
8	±0.9602898565 ±0.7966664774 ±0.5255324099 ±0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834

第二个学生选取数值算例 1，并借助 matlab 实现算例的计算。选取数值算例为

$$\int_{-2}^{2} x^4 + \cos(x) \mathrm{d}x 。$$

采用 Gauss-Legendre 求积公式计算，当选取不同的积分结点个数时，结果见表 5。

Table 5. Calculation results 1 using Gauss-Legendre quadrature formula
表 5. Gauss-Legendre 求积公式计算结果 1

结点个数	数值结果	绝对误差
2	8.7278809595	5.8907e+00
3	14.625780683	7.1858e−03
4	14.618461341	1.3351e−04
5	14.618596377	1.5229e−06
6	14.618595164	3.1076e−07
7	14.618594854	8.2756e−08
8	14.618594855	1.4721e−09

第三个学生对算例 1 计算结果进行展示，并结合计算结果说明 Gauss-Legendre 积分公式优点。观察数值计算结果可以看出，随着积分结点个数 n 的增加，积分的计算精确度越高；并且选取较少的积分节点，就能得到较高的计算精度，大大减少了计算量。

第四个学生选取数值算例 2，并借助 matlab 实现算例的计算。选取数值算例为

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x 。$$

采用 Gauss-Legendre 公式进行计算，分析并比较当选取不同的积分结点个数时的计算误差，结果见表 6。

Table 6. Calculation results 2 using Gauss-Legendre quadrature formula
表 6. Gauss-Legendre 求积公式计算结果 2

结点个数	数值结果	绝对误差
2	2.8692050189	1.1082582416
3	3.1996411327	0.7778221278
4	3.3758844428	0.6015788176
5	3.4865363608	0.4909268996
6	3.5626552793	0.4148079811
7	3.6182762264	0.3591870340
8	3.6607151596	0.3167481008

第五个学生对算例 2 计算结果进行展示，并结合计算结果说明复化求积公式缺点。由计算结果可以看出，利用 Gauss-Legendre 积分公式对瑕积分进行计算时，误差较大。即使增加求积节点的个数，求积精度也没有明显改善。由此可见，在处理反常积分时，需要选择适当的高斯求积公式进行计算。例如，在本例中，可以选择 Gauss-Chebyshev 求积公式进行计算，以提高计算精度。

2.6. 成绩评定

教师和小组长使用量化计分法来评估小组在知识讲解、例题选择、知识总结与推广以及回答自由提问这些环节中的表现情况。这些环节中的评估内容包括清晰度、准确度、逻辑性、质量、适当性、总结扩展能力、回答能力和深度等方面。通过设定具体的评分标准，为每个环节给出分数或等级，帮助了解每个小组在不同环节中的表现，并提供有针对性的反馈和指导，以促进学生的学习和发展。此外，还要求每个学生撰写一篇论文，参照文献中的文章格式，介绍某一种数值积分方法，并将论文成绩和研究成果展示的成绩作为平时成绩的评定依据。

3. 讨论与结论

“六步式”研讨教学法在数值积分方法教学中取得了较好的效果。与传统教学方法相比，该教学法可以更好地激发学生的学习兴趣和自主学习能力，提高教学效果。因此，建议在研究生公共课程中采用类似的教学方法，以提高学生的综合素质和应用能力。

参考文献

[1] 李庆扬. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[2] 郭汉民. 探索研讨式教学的若干思考[J]. 湖南师范大学社会科学学报, 1999, 6(2): 108-111.

[3] 孟凡磊, 刘涛, 崔伟成, 等. 理工科专业课“六步式”研讨教学模式[J]. 高等理科教育, 2015(3): 85-89.

[4] 夏群友, 杨慰. 专题研讨教学中“以研促教”教学方法翻转课堂的三重维度探析——以“人与自然关系”专题研讨教学为例[J]. 黑龙江教育: 高教研究与评估, 2022(2): 30-32.

[5] 韩琳琳. 讨论式教学法在国际贸易课程教学中的应用[J]. 教育与职业, 2013(35): 156-157.

[6] 王旭莲. 高职院校大学英语教学中 TEAM 研讨式教学法的探 [J]. 职业技术教育, 2017(8): 40-42.

[7] 李兰平. 研讨式教学法在函数极限计算中的应用[J]. 河南教育学院学报(自然科学版): 2018(27): 58-61.

[8] 陈学勇. 数学分析小班研讨教学方法研究与实践[J]. 科教导刊, 2020(6): 126-127.

[9] 文茜, 李旺, 黄铮昱, 等. 分组沙龙式研讨教学方法在“食品生物化学”课程中的应用[J]. 西部素质教育, 2023(2): 10-14.