

# 一类具有相互干扰和Holling-III功能反应模型的定性分析

杨 薇, 戴高丰, 张学友

湖南工业大学理学院, 湖南 株洲

收稿日期: 2024年2月27日; 录用日期: 2024年3月21日; 发布日期: 2024年3月28日

## 摘 要

通过分析模型在平衡点处的线性近似系统, 发现该模型在某些条件下具有独特的正平衡点。当给定模型具有正平衡点时, 运用Bendixson-Dulac定理获得系统在第一象限中的闭合轨道。借助Liénard变换, 利用张芷芬的唯一性定理得到该系统极限环的存在性和唯一性。最后, 利用Mathematica软件对模型进行了四组数值模拟, 验证了所得结论的合理性。

## 关键词

捕食 - 食饵模型, 平衡点, 稳定性, 极限环

## Qualitative Analysis on a Class of Holling-III Function Response Models with Mutual Interference

Wei Yang, Gaofeng Dai, Xueyou Zhang

School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan

Received: Feb. 27<sup>th</sup>, 2024; accepted: Mar. 21<sup>st</sup>, 2024; published: Mar. 28<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

In this paper, by analyzing the linear approximation system of the model at the equilibrium point, we first find that the model has a unique positive equilibrium point under some conditions. When the given model has positive equilibrium point, the closed orbit of the system in the first quadrant is obtained via Bendixson-Dulac theorem. By using the Liénard transformation and the unique-

ness theorem of Zhang Zhifen, the existence and uniqueness of the limit cycle of the system is obtained. Finally, four numerical simulations of the model are given to illustrate the validity of our results by using Mathematica software.

## Keywords

Predator-Prey Model, Equilibrium Point, Stability, Limit Cycle

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 前言

1965年 C. S. Holling 在实验的基础上,对于不同类型的物种,提出了三种形式的功能性反应函数,具有这三类功能反应函数的食饵-捕食系统已经有大量的研究[1] [2] [3] [4] [5]。然而人们又发现,当营养资源达到一个较高水平时,对某些个体的增长率呈抑制作用,基于这样的生物背景,文献[6]提出了 Monod-Haldane 型功能反应函数。后来人们将 Monod-Haldane 型功能反应函数称之为 Holling-IV 函数[7]。

在一般情况下,具有 Holling 类型的功能反应的捕食-被捕食系统可表述为下面的微分方程组模型[8]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - y\phi(x), \\ \frac{dy}{dt} = -yq(y) + ky\phi(x), \end{cases}$$

其中  $g(x)$  为被捕食者种群的相对增长率(当没有捕食者时),  $\phi(x)$  为捕食者功能反应函数,  $q(y)$  为捕食者种群的死亡率,  $k$  为常数。由于食饵种群的生存环境可能会因为各种原因而遭到不同程度的破坏,所以食饵种群的增长率遵循的函数是非线性函数  $g(x)$ ; 又因为捕食者种群在捕食过程中相互之间可能会存在干扰,设定  $m(0 < m \leq 1)$  为系统中的干扰系数,同时捕食者种群的功能性反应函数  $\phi(x)$  也是非线性的。基于上述文献的讨论提出如下具相互干扰和 Holling-III 功能反应模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x\left(a - bx^\alpha - cx^{2\alpha} - h(x)\right) - \frac{kx^2 y^m}{1+x^2}, \\ \frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{ekx^2}{1+x^2}\right), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x, y$  分别表示在  $t$  这个时刻食饵和捕食者种群密度,  $a, b, c$  分别表示食饵种群的内禀增长率、密度制约系数和移除的比例系数, 函数  $a - bx^\alpha - cx^{2\alpha} - h(x)$  表示该食饵种群内部增长率;  $e, d$  分别表示捕食者种群内的变换系数(捕获食饵后转化为生育率的比例系数)和死亡率, 而  $\frac{kx^2}{1+x^2}$  表示 Holling-III 功能性反应函数。显然系数  $a, b, c, d, e, k, \alpha, m$  均是正的常数, 且  $0 < m \leq 1, \alpha \geq 2, h(x)$  需要满足条件:

$$h(0) = 0, h^{(n)}(x) \geq 0, n = 1, 2, 3, 4, x > 0.$$

同时, 根据模型的生态意义, 需在第一象限内讨论种群模型, 记

$$\mathbf{R}_+ = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}, \bar{\mathbf{R}}_+ = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}.$$

## 2. 预备知识

定义 1 [9] 设常系数齐次线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{y} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

的向量形式:  $\dot{x} = \mathbf{A}x$ , 其中:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

用  $\mathbf{T}$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的迹,  $\mathbf{D}$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式, 设  $\Delta = \mathbf{T}^2 - 4\mathbf{D}$ 。对于系统的平衡点  $O(0,0)$ , 此时  $\mathbf{D} \neq 0$ , 那么称  $O(0,0)$  为初等奇点; 当  $\mathbf{D} \equiv 0$  时, 称  $O(0,0)$  为高次奇点。对于初等奇点, 有如下的分类:

- 1) 当  $\mathbf{D} > 0$  时, 平衡点为鞍点;
- 2) 当  $\mathbf{D} > 0, \Delta < 0, \mathbf{T} < 0(\mathbf{T} > 0)$  时, 平衡点为稳定(不稳定)结点;
- 3) 当  $\mathbf{D} > 0, \Delta > 0, \mathbf{T} < 0(\mathbf{T} > 0)$  时, 平衡点为稳定(不稳定)焦点;
- 4) 当  $\mathbf{D} > 0, \mathbf{T} = 0$  时, 平衡点为中心。

定义 2 [9] 考察非线性振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0,$$

可通过变换  $x = x, y = -\int_0^t g(x)dt$ , 化为一阶方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - F(x), \\ \frac{dy}{dt} = -g(x). \end{cases} \quad (2)$$

该方程组称为 Liénard 方程组, 而该方程组对应的方程称作 Liénard 方程, 变换  $x = x, y = -\int_0^t g(x)dt$  称为 Liénard 变换。

引理 1 [8] 考虑 Liénard 方程组, 若曲线  $F(x_1) = F(x_2)$  与曲线  $G(x_1) = G(x_2)$  在区域:

$D = \{(x_1, x_2), x_{02} < x_2 < 0, 0 < x_1 < x_{01}, x_{02} < x_{01}\}$  内无交点, 这里  $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ , 则 Liénard 方程在带域  $x_{02} < x < x_{01}$  中没有极限环。

引理 2 (Poincare-Bendixson 环域定理[9]) 设  $\Gamma$  是由两条单闭曲线  $L_1$  与  $L_2$  所构成的环域, 并且在  $\Gamma$  内不存在系统的奇点; 当  $t$  增加时, 从  $L_1$  与  $L_2$  出发的轨线都进入(或者离开)  $\Gamma$ , 则  $\Gamma$  内存在闭轨线  $L$ , 且位置为:  $L_1 \subset L \subset L_2$ 。

## 3. 模型的定性分析

作时间变换  $(1+x^2)d\tau = dt$ , 仍然记  $\tau$  为  $t$ , 化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1+x^2)(a-bx^\alpha - cx^{2\alpha} - h(x)) - kx^2y^m, \\ \frac{dy}{dt} = y[(ek-d)x^2 - d]. \end{cases} \quad (3)$$

再令  $x = \bar{x}, ky^m = \bar{y}, (ek-d) = \omega$ , 仍然记  $\bar{x}, \bar{y}$  为  $x, y$ , 则(3)化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1+x^2)(a-bx^\alpha - cx^{2\alpha} - h(x)) - x^2y, \\ \frac{dy}{dt} = my(\omega x^2 - d). \end{cases} \quad (4)$$

其中  $a, b, c, d$  均为正数,  $\omega$  符号不定。

### 3.1. 模型平衡点的稳定性分析

令系统(4)右边等于零, 得到两个平衡点:  $O(0,0)$ ,  $P_0(x_0, y_0)$ , 其中:  $x_0 = \sqrt{d/\omega}$ ,  $y_0 = \frac{1}{x_0}(1+x_0^2)(a-bx_0^\alpha - cx_0^{2\alpha} - h(x_0))$ 。当且仅当  $\omega > 0$ ,  $a > bx_0^\alpha + cx_0^{2\alpha} + h(x_0)$  时,  $P_0(x_0, y_0)$  是  $\mathbf{R}_+$  内唯一的正平衡点。

因为系统在平衡点  $O(0,0)$  处的线性近似系统为  $\frac{dx}{dt} = ax$ ,  $\frac{dy}{dt} = -dy$ , 该线性近似系统对应的矩阵为:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix},$$

易知  $\det(\mathbf{A}_1) \neq 0$  且  $\det(\mathbf{A}_1) < 0$ , 由此即知  $O(0,0)$  是鞍点。令

$$Q(x) = bx^\alpha + cx^{2\alpha} + h(x) - a,$$

由  $Q(0) = -a < 0$  及  $Q'(x) = \alpha bx^{\alpha-1} + 2c\alpha x^{2\alpha-1} + h'(x) > 0$ , 当  $x > 0$  时,  $Q(x)$  有唯一的正零点  $x_1$ 。当  $\omega > 0$ ,  $x_1 > x_0$  时, 系统在平衡点  $E(x_1, 0)$  处的近似系统对应的矩阵  $\mathbf{A}_2$  为:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} x_1(1+x_1^2)(-\alpha bx_1^{\alpha-1} - 2c\alpha x_1^{2\alpha-1} - h'(x_1)) & -x_1^2 \\ 0 & m(\omega x_1^2 - d) \end{pmatrix}.$$

显然  $x_1(1+x_1^2)(-\alpha bx_1^{\alpha-1} - 2c\alpha x_1^{2\alpha-1} - h'(x_1)) < 0$ , 因为  $x_1 > x_0$ ,  $\omega x_0^2 - d = 0$ , 所以有  $m(\omega x_1^2 - d) > 0$ , 得到  $\det(\mathbf{A}_2) < 0$ , 即  $E(x_1, 0)$  是鞍点。当  $\omega > 0$ ,  $0 < x_1 < x_0$  时,  $m(\omega x_1^2 - d) < 0$ , 得到  $\det(\mathbf{A}_2) > 0$ ,  $\text{tr}(\mathbf{A}_2) < 0$ , 即  $E(x_1, 0)$  是稳定结点, 并在  $\bar{\mathbf{R}}_+$  内是渐近稳定的。同理可知当  $\omega \leq 0$  时,  $E(x_1, 0)$  在  $\bar{\mathbf{R}}_+$  内是渐近稳定结点。

令

$$P = a(x_0^2 - 1) - b[\alpha - 1 + (\alpha + 1)x_0^2]x_0^\alpha - c[2\alpha - 1 + (2\alpha + 1)x_0^2]x_0^{2\alpha} - (x_0^2 + 1)x_0h'(x_0) - (x_0^2 - 1)h(x_0).$$

由定义 1 可以得到, 若  $\omega > 0$ ,  $a > bx_0^\alpha + cx_0^{2\alpha} + h(x_0)$ ,  $P < 0 (> 0)$ , 则  $P_0$  是系统(1)的稳定(不稳定)焦点或结点; 若  $\omega > 0$ ,  $a > bx_0^\alpha + cx_0^{2\alpha} + h(x_0)$ ,  $P = 0$ , 则  $P_0$  是系统(1)的中心 - 焦点型奇点。

### 3.2. 闭轨的不存在性

**定理 1** 当  $\omega < 0$  时, 系统(1)不存在全部位于  $\bar{\mathbf{R}}_+$  内的闭轨线。

**证明** 作 Dulac 函数  $B(x, y) = x^r y^\theta$ , 这里  $r, \theta$  是待定常数。根据系统(1)可得

$$BP = x^{r+1} y^\theta (1+x^2)(a-bx^\alpha - cx^{2\alpha} - h(x)) - x^{r+2} y^{\theta+1}, \quad BQ = mx^r y^{\theta+1} (\omega x^2 - d).$$

对  $\forall (x, y) \in \bar{\mathbf{R}}_+$ , 总有

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = & B\{[(r+1)a - (\theta+1)md] + [(r+3)a + (\theta+1)m\omega]x^2 - [(r+1)b + \alpha b]x^\alpha \\ & - [(r+3)b + \alpha b]x^{\alpha+2} - [(r+1)c + 2\alpha c]x^{2\alpha} - [(r+3)c + 2\alpha c]x^{2\alpha+2} \\ & - (r+1)h(x) - (r+3)x^2h(x) - x(1+x^2)h'(x) - (r+2)xy\}. \end{aligned}$$

令  $r+1=0$ ,  $a(r+3)+(\theta+1)m\omega=0$ 。解得  $r=-1$ ,  $\theta=-1-\frac{2a}{m\omega}$ 。由  $\omega < 0$  知

$$(r+1)b + \alpha b = \alpha b > 0, (r+3)b + \alpha b = 2b + \alpha b > 0, (r+1)c + 2\alpha c = 2\alpha c > 0,$$

$$(r+3)c + 2\alpha c = 2c + 2\alpha c > 0, (r+1)a - (\theta+1)md = md \frac{2a}{m\omega} = \frac{2ad}{w} < 0,$$

从而有  $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} < 0$ 。据 Bendixson-Dulac 判别法, 定理 1 成立。

### 3.3. 极限环的存在性和唯一性分析

为证明系统(1)极限环的不存在性和存在唯一性, 将系统(4)化为 Liénard 系统, 令  $u = \ln y$ ,  $-x^2 dt = d\tau$ ,  $x = v$ , 仍然记  $v, u, \tau$  为  $x, y, t$ , 则系统(4)化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^y - l(x) \equiv \varphi(y) - F(x), \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{m(\omega x^2 - d)}{x^2} \equiv -g(x), \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$l(x) = \frac{(1+x^2)(a - bx^\alpha - cx^{2\alpha} - h(x))}{x}.$$

奇点从  $(x_0, y_0)$  变为  $(x_0, \ln y_0)$ 。

**定理 2** 如果  $P_0$  是稳定的焦点或是结点或是中心 - 焦点型焦点, 即

$$\omega > 0, a > bx_0^\alpha + cx_0^{2\alpha} + h(x_0), P \leq 0,$$

且函数  $h(x)$  满足条件

$$h(0) = 0, h^{(n)}(x) \geq 0, n = 1, 2, 3, 4, x > 0,$$

则  $P_0(x_0, y_0)$  在  $\mathbf{R}_+$  内是全局渐近稳定。

**证明** 仅须证明系统(5)在  $\mathbf{R}_+$  内无极限环, 为此记

$$G(x) = \int g(x) dx = \int \frac{m(\omega x^2 - d)}{x^2} dx = m\omega x + \frac{md}{x} + l.$$

由引理 1 仅须证明两曲线

$$\begin{cases} F(u) = F(v), \\ G(u) = G(v), 0 < u < x_0 < v, \end{cases} \quad (6)$$

无交点。假设这两曲线有交点, 那么满足(6)式, 有:

$$0 = a - ax_0^2 + bx_0^2 \left( \frac{v^{\alpha-1} - u^{\alpha-1}}{v-u} \right) + cx_0^2 \left( \frac{v^{2\alpha-1} - u^{2\alpha-1}}{v-u} \right) + bx_0^2 \left( \frac{v^{\alpha+1} - u^{\alpha+1}}{v-u} \right) \\ + cx_0^2 \left( \frac{v^{2\alpha+1} - u^{2\alpha+1}}{v-u} \right) + x_0^2 \left( \frac{\frac{h(v)}{v} - \frac{h(u)}{u}}{v-u} \right) + x_0^2 \left( \frac{vh(v) - uh(u)}{v-u} \right).$$

由祁锋不等式[10]:

$$\frac{v^{\alpha+1} - u^{\alpha+1}}{v-u} > (\alpha+1)(uv)^{\frac{\alpha}{2}},$$

可得:

$$0 > a(1-x_0^2) + bx_0^2((\alpha-1)x_0^{\alpha-2} + (\alpha+1)x_0^\alpha) + cuv((2\alpha-1)x_0^{2\alpha-2} + (2\alpha+1)x_0^{2\alpha}) \\ + x_0^2 \left( \frac{\frac{h(v)}{v} - \frac{h(u)}{u}}{v-u} \right) + x_0^2 \left( \frac{vh(v) - uh(u)}{v-u} \right). \quad (7)$$

下面证明:

$$\frac{vh(v) - uh(u)}{v-u} \geq (xh(x))'_{x=x_0}, \quad (8)$$

$$\frac{\frac{h(v)}{v} - \frac{h(u)}{u}}{v-u} \geq \left( \frac{h(x)}{x} \right)'_{x=x_0} \quad (9)$$

先证明式(8)成立。记  $H(x) = xh(x)$ 。由泰勒公式有:

$$\frac{H(v) - H(u)}{v-u} = H'(x_0) + \frac{1}{2(v-u)} [H''(\xi_2)(v-x_0)^2 - H''(\xi_1)(u-x_0)^2].$$

由  $v-x_0 = \frac{x_0}{u}(x_0-u) > (x_0-u) > 0$ , 可得:

$$H''(\xi_2)(v-x_0)^2 - H''(\xi_1)(u-x_0)^2 > (u-x_0)^2 (H''(\xi_2) - H''(\xi_1)) \\ = (u-x_0)^2 H^{(3)}(\xi_0)(\xi_2 - \xi_1), \quad \xi_1 < \xi_0 < \xi_2.$$

因为

$$H^{(3)}(\xi_0) = 3h''(\xi_0) + xh^{(3)}(\xi_0) \geq 0,$$

从而

$$\frac{H(v) - H(u)}{v-u} > H'(x_0) + \frac{1}{2(v-u)} (u-x_0)^2 H^{(3)}(\xi_0)(\xi_2 - \xi_1) > H'(x_0),$$

所以在定理条件下式(8)得证。

为证式(9)成立, 由式(8)的证明知仅须证

$$\left(\frac{h(x)}{x}\right)^{(n)} \geq 0, x > 0, n = 1, 2, 3.$$

因为

$$\begin{aligned} \left(\frac{h(x)}{x}\right)' &= \frac{xh'(x) - h(x)}{x^2} \equiv \frac{E_1(x)}{x^2}, \\ \left(\frac{h(x)}{x}\right)'' &= \frac{x^2h''(x) - 2xh'(x) + 2h(x)}{x^3} \equiv \frac{E_2(x)}{x^3}, \\ \left(\frac{h(x)}{x}\right)^{(3)} &= \frac{x^3h^{(3)}(x) - 3x^2h''(x) + 6xh'(x) - 6h(x)}{x^4} \equiv \frac{E_3(x)}{x^4}. \end{aligned}$$

又因为  $E_1(0) = 0$ ,  $E_1'(x) = xh''(x) \geq 0$ , 所以  $E_1(x) \geq 0$ 。同理可得

$$E_2(0) = 0, E_2'(x) = x^2h^{(3)}(x) \geq 0,$$

所以  $E_2(x) \geq 0$ 。同理有  $E_3(0) = 0$ ,  $E_3'(x) = x^3h^{(4)}(x) \geq 0$ , 所以  $E_3(x) \geq 0$ 。从而式(9)得证。

将式(8)和式(9)代入式(7)得:

$$\begin{aligned} 0 &> a(1 - x_0^2) + bx_0^2((\alpha - 1)x_0^{\alpha-2} + (\alpha + 1)x_0^\alpha) + cuv((2\alpha - 1)x_0^{2\alpha-2} + (2\alpha + 1)x_0^{2\alpha}) \\ &\quad + x_0^2(xh(x))'_{x=x_0} + x_0^2\left(\frac{h(x)}{x}\right)'_{x=x_0} \\ &= -P. \end{aligned}$$

但由已知条件有  $P \leq 0$ , 产生矛盾。从而式(6)代表的两曲线无交点, 定理证毕。

**定理 3** 如果  $P_0$  是不稳定的焦点或者结点, 即  $\omega > 0$ ,  $a > bx_0^\alpha + cx_0^{2\alpha} + h(x_0)$ , 当  $P > 0$  时, 且  $h(x)$  满足条件:

$$h(0) = 0, h^{(n)}(x) \geq 0, n = 1, 2, 3, 4, x > 0.$$

则系统(4)在  $\mathbf{R}_+$  内存在唯一极限环。

**证明** 首先证明系统极限环的存在性。作直线  $L_1: x = x_1$ , 则当  $y > 0$  时,

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{L_1} = -x_1^2 y < 0,$$

所以  $L_1$  是无切直线, 系统(4)轨线自右而左穿过  $L_1$ 。再作直线

$$L_2: y + m\omega x - n = 0, 0 < x < x_1,$$

当  $n$  充分大时, 则

$$\left.\frac{dL_2}{dt}\right|_{(3)} = \left[\frac{dy}{dt} + m\omega \frac{dx}{dt}\right]_{y=n-m\omega x} = m\omega x(1 + x^2)(a - bx^\alpha - cx^{2\alpha} - h(x)) - md(n - m\omega x) < 0,$$

即  $L_2$  是无切直线, 系统(4)轨线自上而下穿过  $L_2$ 。由于  $x = 0$ ,  $y = 0$  均是系统(3)的轨线, 而  $P_0$  是不稳定的, 据引理 2 可知  $P_0$  外围存在极限环。

下面证明系统极限环的唯一性, 因为

$$F(x) = \frac{1}{x}(1+x^2)(a-bx^\alpha - cx^{2\alpha} - h(x)),$$

所以:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{x^2} [ax^2 - a - bx^{\alpha+2} - \alpha bx^{\alpha+2} + bx^\alpha - \alpha bx^\alpha + cx^{2\alpha} - 2\alpha cx^{2\alpha} - cx^{2\alpha+2} - 2\alpha cx^{2\alpha} - cx^{2\alpha+2} - 2\alpha cx^{2\alpha+2} - x^3 h'(x) - xh'(x) - x^2 h(x) + h(x)].$$

从而:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' m \frac{(\omega x^2 - d)^2}{x} &= (\omega x^2 - d) [2a - \alpha^2 bx^\alpha - 2bx^\alpha - 3\alpha bx^\alpha - \alpha^2 bx^{\alpha-2} + \alpha bx^{\alpha-2} \\ &\quad - 4\alpha^2 cx^{2\alpha-2} - 4\alpha^2 cx^{2\alpha-2} + 2\alpha cx^{2\alpha-2} - 2cx^{2\alpha} - 6\alpha cx^{2\alpha} + 2\omega [a - \alpha x^2 \\ &\quad + 2\omega [a - \alpha x^2 - bx^\alpha + bx^{\alpha+2} + \alpha bx^\alpha + \alpha bx^{\alpha+2} - cx^{2\alpha} + cx^{2\alpha+2} + 2\alpha cx^{2\alpha} \\ &\quad + 2\alpha cx^{2\alpha+2} + (\omega x^2 - d) [-x^2 h''(x) - h''(x) - 4xh'(x) - 2h(x)]] \\ &\quad + 2\omega [xh'(x) + x^3 h'(x) - h(x) + x^2 h(x)]] \\ &\equiv \Delta_1 + \Delta_2. \end{aligned}$$

其中:

$$\Delta_2 = (\omega x^2 - d) [-x^2 h''(x) - h''(x) - 4xh'(x) - 2h(x)] + 2\omega [xh'(x) + x^3 h'(x) - h(x) + x^2 h(x)],$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\omega x^2 - d) [2a - \alpha^2 bx^\alpha - 2bx^\alpha - 3\alpha bx^\alpha - \alpha^2 bx^{\alpha-2} + \alpha bx^{\alpha-2} - 4\alpha^2 cx^{2\alpha-2} \\ &\quad - 4\alpha^2 cx^{2\alpha-2} + 2\alpha cx^{2\alpha-2} - 2cx^{2\alpha} - 6\alpha cx^{2\alpha}] + 2\omega [a - \alpha x^2 - bx^\alpha + bx^{\alpha+2} \\ &\quad + \alpha bx^\alpha + \alpha bx^{\alpha+2} - cx^{2\alpha} + cx^{2\alpha+2} + 2\alpha cx^{2\alpha} + 2\alpha cx^{2\alpha+2}] \\ &= 2\omega \left( a - a \frac{d}{\omega} \right) + \alpha^2 b dx^\alpha + 2b dx^\alpha + 3\alpha b dx^\alpha + \alpha^2 b dx^{\alpha-2} - \alpha b dx^{\alpha-2} - \alpha^2 b \omega x^\alpha \\ &\quad - \alpha^2 b \omega x^{\alpha+2} - 2b \omega x^\alpha + 3\alpha b \omega x^\alpha - \alpha b \omega x^{\alpha+2} + 4\alpha^2 c dx^{2\alpha-2} + 4\alpha^2 c dx^{2\alpha} - 2\alpha c dx^{2\alpha-2} \\ &\quad + 2c dx^{2\alpha} + 6\alpha c dx^{2\alpha} - 4\alpha^2 c \omega x^{2\alpha} - 4\alpha^2 c \omega x^{2\alpha+2} - 2c \omega x^{2\alpha} + 6\alpha c \omega x^{2\alpha} - 2\alpha c \omega x^{2\alpha+2}, \end{aligned}$$

由  $P > 0$  及  $x_0^2 = \frac{d}{\omega}$ , 有

$$\begin{aligned} \Delta_1 &< 2\omega \left\{ -b \left[ \alpha - 1 + (\alpha + 1)x_0^2 \right] x_0^\alpha - c \left[ 2\alpha - 1 + (2\alpha + 1)x_0^2 \right] x_0^{2\alpha} - (x_0^2 + 1)x_0 h'(x_0) \right. \\ &\quad \left. - (x_0^2 - 1)h(x_0) \right\} + \alpha^2 b dx^\alpha + 2b dx^\alpha + 3\alpha b dx^\alpha + \alpha^2 b dx^{\alpha-2} - \alpha b dx^{\alpha-2} - \alpha^2 b \omega x^\alpha \\ &\quad - \alpha^2 b \omega x^{\alpha+2} - 2b \omega x^\alpha + 3\alpha b \omega x^\alpha - \alpha b \omega x^{\alpha+2} + 4\alpha^2 c dx^{2\alpha-2} + 4\alpha^2 c dx^{2\alpha} - 2\alpha c dx^{2\alpha-2} \\ &\quad + 2c dx^{2\alpha} + 6\alpha c dx^{2\alpha} - 4\alpha^2 c \omega x^{2\alpha} - 4\alpha^2 c \omega x^{2\alpha+2} - 2c \omega x^{2\alpha} + 6\alpha c \omega x^{2\alpha} - 2\alpha c \omega x^{2\alpha+2} \\ &= S_1(x) + S_2(x) + 2\omega \left[ -(x_0^2 + 1)x_0 h'(x_0) - (x_0^2 - 1)h(x_0) \right], \end{aligned}$$

其中:

$$S_2(x) = 2\omega \left\{ -b \left[ \alpha - 1 + (\alpha + 1)x_0^2 \right] x_0^\alpha \right\} + c \left[ 4\alpha^2 dx^{2\alpha-2} + 4\alpha^2 dx^{2\alpha} - 2\alpha dx^{2\alpha-2} - \alpha dx^{\alpha-2} - \alpha^2 \omega x^\alpha - \alpha^2 \omega x^{\alpha+2} - 2\omega x^\alpha + 3\alpha \omega x^\alpha - \alpha \omega x^{\alpha+2} \right],$$

$$S_1(x) = 2\omega s_1(x),$$



其中:

$$s_1(x) = 2\alpha x_0^{2\alpha} - x_0^{2\alpha} + 2\alpha x_0^{2\alpha+2} + x_0^{2\alpha+2} - 2\alpha^2 x_0^2 x^{2\alpha-2} - 2\alpha^2 x_0^2 x^{2\alpha} + \alpha x_0^2 x^{2\alpha-2} - x_0^2 x^{2\alpha} - 3\alpha x_0^2 x^{2\alpha} + 2\alpha^2 x^{2\alpha} + 2\alpha^2 x^{2\alpha+2} + \alpha x^{2\alpha+2} + x^{2\alpha} - 3\alpha x^{2\alpha}.$$

经计算可得  $s_1(x_0) = 0$ ,  $s_1'(x_0) = 0$ , 且  $\alpha \geq 2$  知当  $x > x_0$  时,  $s_1'(x) \geq 0$ ; 当  $0 < x < x_0$  时,  $s_1'(x) \leq 0$ , 因此

$$s_1(x) \geq s_1(x_0) = 0, S_1(x) \leq S_1(x_0) = 0,$$

同理可得  $S_2(x) \leq S_2(x_0) = 0$ 。即

$$\Delta_1 \leq 2\omega \left[ -(x_0^2 + 1)x_0 h'(x_0) - (x_0^2 - 1)h(x_0) \right].$$

因此

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)' m \frac{(\omega x^2 - d)^2}{x} &< 2\omega \left[ -(x_0^2 + 1)x_0 h'(x_0) - (x_0^2 - 1)h(x_0) \right] \\ &+ (\omega x^2 - d) \left[ -x^2 h''(x) - h''(x) - 4x h'(x) - 2h(x) \right] \\ &+ 2\omega \left[ x h'(x) + x^3 h'(x) - h(x) + x^2 h(x) \right]. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} W(x) &= 2\omega \left[ -(x_0^2 + 1)x_0 h'(x_0) - (x_0^2 - 1)h(x_0) \right] + (\omega x^2 - d) \left[ -x^2 h''(x) - h''(x) - 4x h'(x) - 2h(x) \right] \\ &+ 2\omega \left[ x h'(x) + x^3 h'(x) - h(x) + x^2 h(x) \right]. \end{aligned}$$

显然有  $W(x_0) = 0$ , 及

$$W'(x) = \omega(x^2 - x_0^2) \left[ -x^2 h^{(3)}(x) - h^{(3)}(x) - 6h'(x) - 6x h''(x) \right].$$

由于  $h^{(n)}(x) \geq 0$ ,  $n=1,2,3$ ,  $x > 0$ 。所以当  $x > x_0$  时,  $W'(x) \leq 0$ ; 当  $0 < x < x_0$  时,  $W'(x) \geq 0$ , 从而当  $0 < x < +\infty$  时, 有

$$\left(\frac{f}{g}\right)' m \frac{(\omega x^2 - d)^2}{x} < W(x) < W(x_0) = 0,$$

所以  $\left(\frac{f}{g}\right)' < 0$ , 由引理 2 知唯一性得证, 证毕。

通过对系统的稳定点和极限环的定性分析可以推出一些特殊形式的食饵捕食者系统如下, 同样可以得出类似的结论。

### 推论 1 系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx^\alpha - cx^{2\alpha}) - \frac{kx^2 y^m}{1+x^2} \\ \frac{dy}{dt} = y \left( -d + \frac{ekx^2}{1+x^2} \right) \end{cases}$$

其中  $a, b, c, d, e, k, \alpha, m$  所有的系数均为正数, 且  $0 < m \leq 1$ ,  $\alpha \geq 2$  时, 系统在第一象限存在极限环的充要条件是该系统在第一象限存在唯一的不稳定奇点。显然当极限环存在时则必唯一。

## 推论 2 系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(c_0 - c_1x^\alpha - \dots - c_nx^{n\alpha}) - \frac{kx^2y^m}{1+x^2} \\ \frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{ekx^2}{1+x^2}\right) \end{cases}$$

其中  $a, b, c, d, e, k, \alpha, m$  所有的系数均为正数, 且  $0 < m \leq 1$ ,  $\alpha \geq 2$ ,  $n \geq 3$  时, 系统在第一象限存在极限环的充要条件是该系统在第一象限存在唯一的不稳定奇点。显然当极限环存在时则必唯一。

## 4. 数值仿真

下面分四种情况进行数值仿真, 以验证所得结果的正确性。

第 1 种情况: 取  $a=6$ ,  $b=0.5$ ,  $c=0.5$ ,  $d=2$ ,  $e=0.5$ ,  $m=1$ ,  $k=2$ ,  $\alpha=4$ ,  $h(x)=0$ , 于是有  $\omega=-1 < 0$ , 此时系统(3)从第一象限出发的初值不同的轨线均无限趋近于边界平衡点  $E(\sqrt[4]{3}, 0)$  (如图 1 所示)。

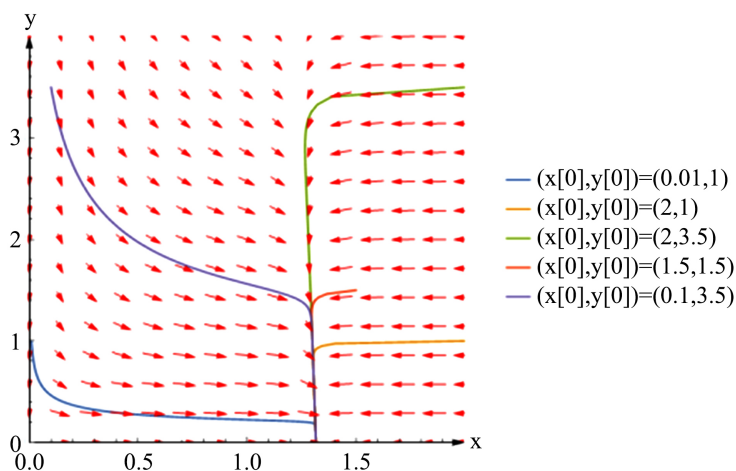
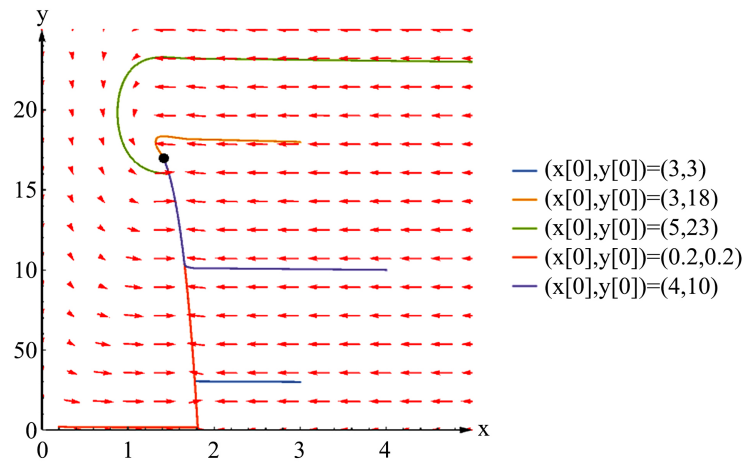


Figure 1. Boundary equilibrium point  $E$  asymptotic stable phase diagram  
图 1. 边界平衡点  $E$  点渐近稳定相图

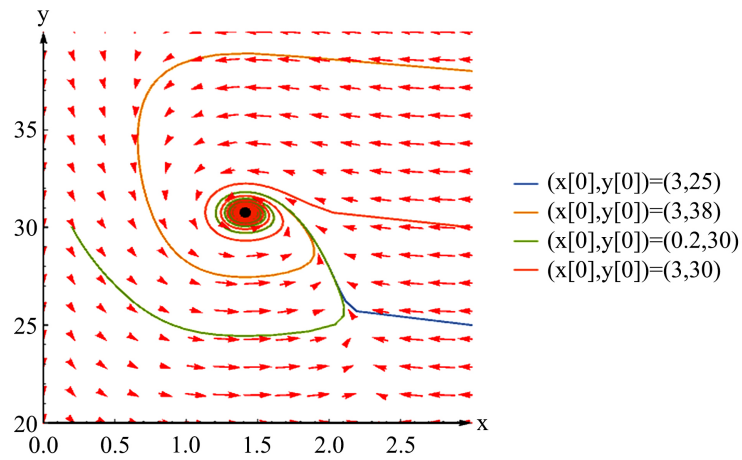
第 2 种情况: 取  $a=10$ ,  $b=\frac{1}{4}$ ,  $c=\frac{1}{16}$ ,  $d=2$ ,  $e=1$ ,  $m=1$ ,  $k=3$ ,  $\alpha=4$ ,  $h(x)=0$ , 于是有  $\omega=1 > 0$ ,  $x_0=\sqrt{2}$ , 且  $a > bx_0^\alpha + cx_0^{2\alpha} + h(x_0)$ ,  $P < 0$ , 此时系统(3)从第一象限出发的初值不同的轨线均无限趋近于正平衡点  $P_0(\sqrt{2}, 12\sqrt{2})$  (如图 2 所示)。

第 3 种情况: 取  $a=16$ ,  $b=0.25$ ,  $c=0.25$ ,  $d=1$ ,  $e=0.5$ ,  $m=1$ ,  $k=3$ ,  $\alpha=2$ ,  $h(x)=0$ , 于是有  $\omega=ek-d=0.5 > 0$ ,  $x_0=\sqrt{2}$ , 且  $a > bx_0^\alpha + cx_0^{2\alpha} + h(x_0)$ ,  $P > 0$ , 即使取不同的初值, 系统(3)始终在正平衡点  $P_0\left(\sqrt{2}, \frac{87\sqrt{2}}{4}\right)$  的外围存在唯一稳定的极限环(如图 3 所示)。

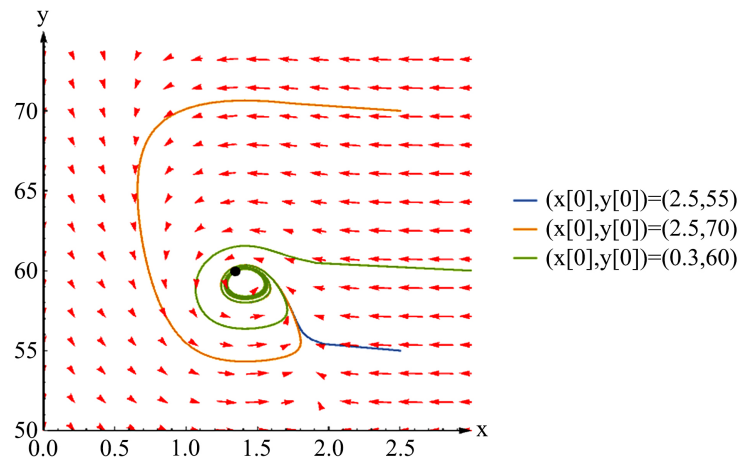
第 4 种情况: 取  $a=30$ ,  $b=\frac{1}{4}$ ,  $c=\frac{1}{8}$ ,  $d=1$ ,  $e=0.5$ ,  $m=1$ ,  $k=3$ ,  $\alpha=2$ ,  $h(x)=\frac{1}{8}x^{3\alpha}$ , 于是有  $\omega=0.5 > 0$ ,  $x_0=\sqrt{2}$ , 且  $a > bx_0^\alpha + cx_0^{2\alpha} + h(x_0)$ ,  $P > 0$ , 即使取不同的初值, 系统(3)在正平衡点  $P_0(\sqrt{2}, 42\sqrt{2})$  的外围存在唯一稳定的极限环(如图 4 所示)。



**Figure 2.** Positive equilibrium point  $P_0$  asymptotic stable phase diagram  
**图 2.** 正平衡点  $P_0$  点渐近稳定相图



**Figure 3.** Positive equilibrium point  $P_0$  unique phase diagram of the outer limit ring of the point  
**图 3.** 正平衡点  $P_0$  点外围极限环唯一相图



**Figure 4.** Unique phase diagram of the limit ring outside the positive equilibrium point  $P_0$   
**图 4.** 正平衡点  $P_0$  点外围极限环唯一相图

## 5. 结语

基于生态环境的复杂性以及捕食者种群在捕食过程中相互之间存在一定的干扰, 该模型考虑的因素相对来说要更加全面, 得到的结果也更加的会符合实际捕食 - 食饵种群的数量变化情况。通过对生态模型(1)在平衡点处线性近似系统的分析, 首先得出该模型在一定的条件下存在唯一的正平衡点, 当模型(1)的正平衡点存在时, 利用 Bendixson-Dulac 定理分析得出系统存在全位于第一象限的闭轨线; 然后在 Liénard 变换的基础上, 再利用张芷芬唯一性定理得到该系统极限环的存在性及唯一性; 最后利用 Mathematica 软件对模型的不同情况进行了四组具有代表性的数值仿真, 数值模拟结果表明所得定性结论的有效性。同时, 数值模拟所得图形表明, 理论分析较好地反映了该类具相互干扰和 Holling-III 功能反应模型在食饵种群内部增长率、捕食者种群内的变换系数和死亡率满足一定条件时, 食饵和捕食者的比例最后会趋于一个常量。

## 基金项目

湖南省大学生创新训练项目(编号: 202211535022); 湖南省教育厅科研课题资助项目(编号: 19C0556)。

## 参考文献

- [1] 王玉億, 邹兰. 功能反应函数的演化对食饵捕食系统动力学的影响[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2022, 45(1): 41-47.
- [2] 赖尾英, 张敬华. 具有 Holling III 功能性反应的捕食系统的全局稳定性[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2021, 38(3): 283-287.
- [3] 司政. 具有非光滑 Holling-I型功能反 f 应函数的专性(或兼性)捕食者-食饵模型的全局动力学[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2021: 1-3.
- [4] 马超, 赵治涛. 具比率依赖 Holling III型功能性反应的非自治捕食者-食饵系统的正周期解[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2021, 38(5): 521-528.
- [5] 傅金波, 陈兰荪. 一类具有相互干扰的食饵-捕食者模型的定性分析[J]. 系统科学与数学, 2017, 37(4): 1166-1178.
- [6] 张强. 具有密度依赖的 Monod-Haldane 反应项捕食模型的动态分歧和跃迁[J]. 应用数学, 2020, 33(4): 807-813.
- [7] 李冰森, 赵育林, 张子龙. 具收获率的 Holling-IV 型两种群生物系统的定性分析[J]. 湖南工业大学学报, 2020, 34(1): 1-8.
- [8] 王霞. 一类具 Holling-III型功能反应捕食者-食饵模型的分支分析[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨工业大学, 2021: 1-6.
- [9] 杨琪琪. 一类具有强弱 Allee 效应的捕食模型的分析[D]: [硕士学位论文]. 西北大学, 2021: 8-13.
- [10] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2004: 132.