Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(4), 1286-1291
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134118

具有常数正Ricci曲率的图

黄绮琪[1]**，何伟骅**[1*]**，张朝钦**[2]

[1]广东工业大学数学与统计学院，广东 广州
[2]华南师范大学附属中学，广东 广州

收稿日期：2024年3月15日；录用日期：2024年4月10日；发布日期：2024年4月17日

摘 要

本文在Lin-Lu-Yau给出的图的Ricci曲率的定义下，刻画了一类具有常数正Ricci曲率的图。更进一步地，本文找到了图上每条边的Ricci曲率都不小于1的充分必要条件，并刻画了图上每条边的Ricci曲率都等于1的图。

关键词

Ricci曲率，最小度，匹配

Graphs with Constant Positive Ricci Curvature

Qiqi Huang[1]**, Weihua He**[1*]**, Chaoqin Zhang**[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong
[2]The Affiliated High School of South China Normal University, Guangzhou Guangdong

Received: Mar. 15th, 2024; accepted: Apr. 10th, 2024; published: Apr. 17th, 2024

Abstract

In this paper, we study the Ricci curvature given by Lin-Lu-Yau and characterize several graphs with constant positive Ricci curvature. We find the necessary and sufficient condition when every edge of the graph has Ricci curvature no less than one and characterize the graphs in which the Ricci curvature of every edge is equal to one.

[*]通讯作者。

文章引用: 黄绮琪, 何伟骅, 张朝钦. 具有常数正 Ricci 曲率的图[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1286-1291.
DOI: 10.12677/aam.2024.134118

Keywords

Ricci Curvature, Minimum Degree, Matching

1. 引言

1.1. 研究背景

Ricci 曲率是几何分析中的一个基本概念，Bakry 和 Emery [1]首先利用热半群的概念在度量空间上定义了 Ricci 曲率。随后，许多学者考虑将 Ricci 曲率的概念推广到包括图在内的其他形式的度量空间中。1996 年，Fan Chung 和 Yau [2]在得到一个良好的 log-Sobolev 不等式的过程中首次定义了图上 Ricci 曲率。后来，Lin 和 Yau [3]在图的框架中推广了 Bakry 和 Emery 定义下的 Ricci 曲率的定义。2009 年，Ollivier [4]在包括图在内的任意度量空间上引入了有效的马尔科夫链的粗糙 Ricci 曲率的概念。2011 年 Lin，Lu 和 Yau [5]将 Ollivier 提出的 Ricci 曲率的定义修改为一个极限的形式，与 Ollivier 定义下的 Ricci 曲率略有不同。

本文在 Lin-Lu-Yau 给出的 Ricci 曲率的定义下，对几种具有恒定正 Ricci 曲率的图进行刻画。

1.2. 定义

设 $G=(V,E)$ 是顶点集为 V，边集为 E 的一个简单无向图，对于任意两个顶点 $x,y\in V$，符号 $x\sim y$ 表示顶点 x 和顶点 y 被 G 中的一条边连接。对于 $x,y\in V$，距离 $d(x,y)$ 是连接顶点 x 和顶点 y 的所有路径中最短路径的长度。在一般图 $G=(V,E)$ 中，与某个顶点 x 相关联的边的数目称为该顶点的度数，记作 d_x。将顶点 x 在图 G 中的所有邻点构成的集合称为顶点 x 的邻集，记作 $N(x)$，那么有 $d_x=|N(x)|$。本文定义集合 $P_x(y):=|N(x)\setminus N(y)|$，即 $P_x(y)$ 是顶点 x 的邻点中不与顶点 y 相邻的顶点个数。

图 $G=(V,E)$ 的顶点集合 V 上的概率分布是一个映射 $m:V\to[0,1]$，其中 $\sum_{x\in V}m(x)=1$。对任意 $x\in V$，$\alpha\in[0,1]$，我们考虑以下形式的概率分布：

$$m_x^\alpha(v)=\begin{cases}\alpha, \text{当 } v=x \text{ 时},\\ \dfrac{1-\alpha}{d_x}, \text{当 } v\in N(x) \text{时},\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$$

假设 $xy\in E$，m_x^α 和 m_y^α 是 V 上的两个概率分布，定义运输计划为一个将概率分布 m_x^α 转移至概率分布 m_y^α 的映射 $A:V\times V\to[0,1]$，并满足以下约束条件：

$$\begin{cases}\sum_{v\in V}A(u,v)=m_x^\alpha(u),\ u\in V,\\ \sum_{u\in V}A(u,v)=m_y^\alpha(v),\ v\in V,\\ A(u,v)\ge 0.\end{cases}$$

其中 $A(u,v)$ 表示从顶点 u 到顶点 v 的运输量。从 m_x^α 到 m_y^α 的所有运输方案的集合定义为 $\Pi(m_x^\alpha,m_y^\alpha)$。

两个概率分布 m_x^α 和 m_y^α 之间的最优运输距离(即沃森斯坦距离)定义 $W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)$ 为：

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)=\min_{A\in\Pi\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}\sum\nolimits_{u,v\in V} d(u,v)A(u,v).$$

其中最小值取遍所有运输方案 $A\in\Pi\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)$。

边 $xy\in E$ 上的Lin-Lu-Yau Ricci曲率 $\kappa(x,y)$ 定义为

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}.$$

如果对于所有 $xy\in G$ 都有 $\kappa(x,y)=0$，我们称该图为Ricci平坦图。

本节没有给出的定义可在[6]中找到。

2. 主要结论

Cushing 等人[7]为围长至少为 5 的 Ricci 平坦图进行了分类，He 等人[8]对围长为 4 且边不交，即任意两个 4-圈没有公共边的 Ricci 平坦图进行了分类。

我们很容易能够得到完全图 K_n 具有常数正 Ricci 曲率 $\frac{n}{n-1}$。目前现有的对于 Ricci 曲率恒为 0 的图的研究较多，较少有研究 Ricci 曲率有下界的图以及具有常正 Ricci 曲率的图，因此本文对 n 个顶点上 Ricci 曲率至少为 1 的图，以及具有常正 Ricci 曲率 1 的图进行研究并得到相关结论。

引理 1 设 G 是阶数 $n\geq3$ 的简单图，且对于 $xy\in E(G)$ 有 $\kappa(x,y)\geq1$，则 $P_x(y)\leq1$。

证明：假设对于边 $xy\in E(G)$，有 $P_x(y)\geq2$，

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)\geq\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{d_x}\right)+P_x(y)\cdot\frac{1-\alpha}{d_x}=\alpha+\left(P_x(y)-1\right)\frac{1-\alpha}{d_x}.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}\leq\frac{1-\alpha-\left(P_x(y)-1\right)\frac{1-\alpha}{d_x}}{1-\alpha}=1-\frac{P_x(y)-1}{d_x}<1.$$

与 $\kappa(x,y)\geq1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立矛盾。 □

引理 2 设 G 是阶数 $n\geq3$ 的简单图，且对于 $xy\in E(G)$ 有 $\kappa(x,y)\geq1$，则 G 的任一个顶点至少与 x 和 y 之一相邻。

证明：假设存在一个顶点 $z\in V(G)$，顶点 z 既不与顶点 x 相邻也不与顶点 y 相邻。在不失一般性的前提下，假设 $d_G(x,z)=2$ (否则若 $d_G(x,z)\geq3$，则在 (x,z) 最短路径中我们可以找到另一个具有此性质的顶点)。则存在一个顶点 $w\in V$ 使得 $x\sim w\sim z$。我们有以下两个断言：

断言 a $wy\notin E(G)$。

假设 $wy\in E(G)$。因为 $x\sim w\sim z$，但顶点 z 即不与顶点 x 相邻也不与顶点 y 相邻，这与引理 1 中 $P_x(y)\leq1$ 的事实是矛盾的。

断言 b $d(x)\geq3$。

假设 $d(x)=2$，因为 $x\sim w\sim z$，$P_x(y)\leq1$，$P_y(x)\leq1$，我们有 $d(y)\leq2$。同样地，我们可以得到 $d(w)=2$ 和 $d(z)\leq2$。

如果 y 和 z 有一个公共邻点 v，则

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{2}\right)+2\cdot\frac{1-\alpha}{2}=\alpha+\frac{1-\alpha}{2}.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha-\frac{1-\alpha}{2}}{1-\alpha}=\frac{1}{2}<1.$$

如果 y 和 z 没有公共邻点，则

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{2}\right)+3\cdot\frac{1-\alpha}{2}=\alpha+(1-\alpha)=1.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W(x,y)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-1}{1-\alpha}=0.$$

上述两种情况都与 $\kappa(x,y)\ge 1$ 矛盾，断言 b 得证。

根据断言 b，存在一个顶点 $v\in V(G)$ 使得 $xv\in E(G)$。因为 $w\sim x\sim y$，w 不与 y 相邻，且 $P_x(w)\le 1$，$P_x(y)\le 1$，我们有 $wv\in E(G)$，$yv\in E(G)$。因为 $x\sim w\sim z$，z 与 x 不相邻，且 $P_w(z)\le 1$，则 $zw\in E(G)$。我们有 $w\sim v$ 和 $z\sim v$，但是 w 和 z 都与 y 不相邻，因此 $P_v(y)\ge 2$。由引理 1 我们有 $\kappa(x,y)<1$，这与 $\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立矛盾。 □

以下是我们的主要结论之一。

定理 3 对于任意阶数 $n\ge 3$ 的简单图，$\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立当且仅当最小度 $\delta(G)\ge n-2$。

证明：首先我们假设 $\kappa(x,y)\ge 1$ 对任意 $xy\in E(G)$ 成立。对于任意 $xy\in E(G)$，如果其余的 $n-2$ 个顶点都与顶点 x 和顶点 y 相邻，则结论成立。如果有 q 个顶点与顶点 x 相邻，$n-2-q$ 个顶点与顶点 y 相邻，那么根据引理 1，$N(x)$ 中至少有 $q-1$ 个顶点与顶点 y 相邻，故 $d(y)\ge 1+(n-2-q)+(q-1)=n-2$。同样地，我们有 $d(x)\ge 1+q+(n-3-1)=n-2$。即有 $\delta(G)\ge n-2$，结论成立。

现在我们假设 $\delta(G)\ge n-2$。G 中所有顶点的度数为 $n-2$ 或 $n-1$。我们有以下四种情况。

情况 1　$d(x)=d(y)=n-2$，x 和 y 有一个公共非邻点。

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)=\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha+\frac{1-\alpha}{2}}{1-\alpha}=\frac{n-1}{n-2}>1.$$

情况 2　$d(x)=d(y)=n-2$，x 和 y 有不同的不相邻顶点。假设顶点 a 是 x 的邻点但不与 y 相邻，b 是 y 的邻点但不与 x 相邻。因为 $d(a)\ge n-2$ 且 a 不与 y 相邻，所以有 $d(a)=n-2$ 及 $a\sim b$。

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}\right)+\frac{1-\alpha}{n-2}=\alpha.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1.$$

情况 3　$d(x)=n-2$，$d(y)=n-1$。假设顶点 z 是 y 的邻点但不与 x 相邻。因为 $d(z)\ge n-2$ 且 z 不与 x 相邻，所以有 $d(z)=n-2$，z 与 x 和 y 的 $n-3$ 个公共邻点公共邻点都相邻。

$$W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)=\left(\alpha-\frac{1-\alpha}{n-2}\right)+2\cdot\left(\frac{1-\alpha}{n-2}-\frac{1-\alpha}{n-1}\right)+(n-3)\cdot\left(\frac{1-\alpha}{n-2}-\frac{1-\alpha}{n-1}\right)=\alpha.$$

$$\kappa(x,y)=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha,m_y^\alpha\right)}{1-\alpha}=\lim_{\alpha\to 1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1.$$

情况 4　$d(x)=d(y)=n-1$。

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) = \alpha - \frac{1-\alpha}{n-1}.$$

$$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}{1-\alpha} = \lim_{\alpha\to1}\frac{1-\alpha+\frac{1-\alpha}{n-1}}{1-\alpha} = \frac{n}{n-1} > 1.$$

综上所述，结论成立。

特别地，我们可以进一步刻画清楚每条边都具有常数 Ricci 曲率 1 的图。

定理 4 对于任意阶数 $n \ge 3$ 的简单图，$\kappa(x,y)=1$ 对任意 $xy \in E(G)$ 成立当且仅当 $G = K_n - M$，其中 M 为 K_n 中的最大匹配。

证明：首先我们假设 $\kappa(x,y)=1$ 对任意 $xy \in E(G)$ 成立。根据定理 3，图 G 的最小度至少为 $n-2$。假设存在两个度为 $n-1$ 的顶点 u 和 v。我们很容易能够计算出 $\kappa(x,y)>1$，与假设矛盾。因此，最多存在一个度为 $n-1$ 的顶点，即 $G = K_n - M$，其中 M 为 K_n 中的最大匹配。

现在我们假设 $G = K_n - M$，其中 M 为 K_n 中的最大匹配。

情况 1 n 是偶数。对于两个相邻的顶点 x 和 y，假设 $u \in N(x)\setminus\{y\}$，$v \in N(y)\setminus\{x\}$，则

$$A(x,y) = \alpha - \frac{1-\alpha}{n-2},\ d(x,y) = 1.$$

$$A(u,v) = \frac{1-\alpha}{n-2},\ d(u,v) = 1.$$

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) = \left(\alpha - \frac{1-\alpha}{n-2}\right) + \frac{1-\alpha}{n-2} = \alpha$$

$$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}{1-\alpha} = \lim_{\alpha\to1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1.$$

情况 2 n 是奇数。存在一个顶点与其余 $n-1$ 个顶点相邻，记作 z，则 $d(z) = n-1$。

(a) 假设 x 和 y 是相邻顶点，$d(x) = d(y) = n-2$，$u \in N(x)\setminus\{y\}$，$v \in N(y)\setminus\{x\}$，则

$$A(x,y) = \alpha - \frac{1-\alpha}{n-2},\ d(x,y) = 1.$$

$$A(u,v) = \frac{1-\alpha}{n-2},\ d(u,v) = 1.$$

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) = \left(\alpha - \frac{1-\alpha}{n-2}\right) + \frac{1-\alpha}{n-2} = \alpha$$

$$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}{1-\alpha} = \lim_{\alpha\to1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1.$$

(b) 对于顶点 z 和它的邻点之间的边，假设 w 是顶点 z 的不邻接于 x 的邻点，

$$A(x,z) = \alpha - \frac{1-\alpha}{n-2},\ d(x,z) = 1.$$

$$A(x,w) = \frac{1-\alpha}{n-2} - \frac{1-\alpha}{n-1},\ d(x,w) = 2.$$

$$W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right) = (n-3)\cdot\left(\frac{1-\alpha}{n-2} - \frac{1-\alpha}{n-1}\right) + \left(\alpha - \frac{1-\alpha}{n-2}\right) + 2\cdot\left(\frac{1-\alpha}{n-2} - \frac{1-\alpha}{n-1}\right) = \alpha$$

$$\kappa(x,y) = \lim_{\alpha\to1}\frac{1-W\left(m_x^\alpha, m_y^\alpha\right)}{1-\alpha} = \lim_{\alpha\to1}\frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1.$$

证毕。 □

3. 总结与展望

对围长为 4 或围长至少为 5 的 Ricci 曲率为 0 的 Ricci 平坦图已有较为详细的研究成果，而针对 Ricci 曲率有下界的图所具有的性质的研究较为空缺。本文通过研究顶点之间是否有连边及相邻两顶点的公共邻点个数，对每条边上的 Ricci 曲率都大于等于 1 的图进行刻画，弥补相关空缺。更进一步地，如果曲率在 0 到 1 之间，继续刻画相关图类是值得探讨的问题。

基金项目

广东省自然科学基金面上项目(2021A1515012047)。

参考文献

[1] Bakry, D. and Emery, M. (1985) Diffusions Hypercontractives. In: Azéma, J. and Yor, M., Eds., *Séminaire de Probabilités XIX* 1983/84, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123. Springer, Berlin, Heidelberg, 177-206. https://doi.org/10.1007/BFb0075847

[2] Chung, F.R.K. and Yau, S.-T. (1996) Logarithmic Harnack Inequalities. *Mathematical Research Letters*, **3**, 793-812. https://doi.org/10.4310/MRL.1996.v3.n6.a8

[3] Ollivier, Y. (2009) Ricci Curvature of Markov Chains on Metric Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **256**, 810-864. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.11.001

[4] Lin, Y. and Yau, S.-T. (2010) Ricci Curvature and Eigenvalue Estimate on Locally Finite Graphs. *Mathematical Research Letters*, **17**, 343-356. https://doi.org/10.4310/MRL.2010.v17.n2.a13

[5] Lin, Y., Lu, L. and Yau, S.T. (2011) Ricci Curvature of Graphs. *Tohoku Mathematical Journal*, **63**, 605-627. https://doi.org/10.2748/tmj/1325886283

[6] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1982) Graph Theory with Applications.

[7] Cushing, D., Kangaslampi, R., Lin, Y., Liu, S., Lu, L. and Yau, S.-T. (2021) Erratum for Ricci-Flat Graphs with Girth at Least Five. *Communications in Analysis and Geometry*, **29**, 1775-1781. https://doi.org/10.4310/CAG.2021.v29.n8.a2

[8] He, W., Luo, J., Yang, C., Yuan, W. and Zhang, H.C. (2021) Ricci-Flat Graphs with Girth Four. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **37**, 1679-1691. https://doi.org/10.1007/s10114-021-9546-y