Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(4), 1354-1361**
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134126

Hans汉斯

一类平均场型随机微分方程的存在唯一性定理

裴博超，王　岩*，尉子璇

大连交通大学理学院，辽宁 大连

收稿日期：2024年3月17日；录用日期：2024年4月11日；发布日期：2024年4月18日

摘　要

本文研究一类由布朗运动驱动的平均场型随机微分方程，此方程与平均场型最优控制问题紧密相关，应用压缩映射定理给出了平均场型方程的存在唯一性定理，即当系统的系数关于状态和平均场满足Lipschitz连续，关于时间平方可积，并且初始状态变量满足一定可积性条件时，方程具有唯一的强解。

关键词

平均场型随机微分方程，强解，存在唯一性定理，压缩映射定理

Existence and Uniqueness Theorem for a Class of Mean-Field Stochastic Differential Equations

Bochao Pei, Yan Wang*, Zixuan Yu

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 17th, 2024; accepted: Apr. 11th, 2024; published: Apr. 18th, 2024

Abstract

This paper explores a class of mean-field stochastic differential equations (SDEs) driven by Brownian motion, which is closely linked with mean-field optimal stochastic control problems. We utilize the contraction mapping theorem to establish the existence and uniqueness of solutions for the mean-field SDEs. That is, when the coefficients of the system with respect to the state and the mean-field satisfy Lipschitz continuity, are square integrable with respect to time, and the initial state variables satisfy certain integrability conditions, the equation has a unique strong solution.

*通讯作者。

文章引用: 裴博超, 王岩, 尉子璇. 一类平均场型随机微分方程的存在唯一性定理[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1354-1361. DOI: 10.12677/aam.2024.134126

Keywords

Mean-Field Stochastic Differential Equations, Strong Solutions, Existence and Uniqueness Theorem, Contraction Mapping Theorem

1. 引言

平均场型随机微分方程，也称为 McKean-Vlasov 方程，用来描述大量微观粒子交互影响系统的演化过程。具体来说，系统中每个粒子的行为均受到其它粒子的影响，平均场是度量这种相互作用对系统产生平均贡献的数学工具。平均场型随机微分方程可以同时对大规模系统中个体的行为和集体的交互作用进行建模，因而在现实领域有着广泛的应用：在物理学中用于研究粒子系统的热力学性质(见文献[1])；在经济学中用来分析市场中价格形成等问题(见文献[2])。

解的存在唯一性是随机微分方程理论研究的基础问题之一，在现有文献中迭代方法作为一种经典方法，用于研究各种随机微分方程解的存在唯一性，例如：在文献[3]中 Evans 针对一类一般的随机微分方程，通过构造迭代格式，利用鞅不等式、切比雪夫不等式以及无穷级数一致收敛和递推的方法，证明了解的存在唯一性定理；在文献[4]中陈晨等学者简化了 Evans 的证明过程，利用 Cauchy-Schwarz 不等式和 Itô 公式，通过迭代方法得到了随机微分方程解的存在唯一性条件；文献[5]利用迭代的思想在广义 Hukuhara 可微条件下，得到了随机模糊分数阶微分方程解的存在唯一性定理；刘存霞在[6]中利用迭代方法探讨了 G-布朗运动驱动随机微分方程解的存在唯一性；Li 等学者在文献[7]中证明了一般耦合平均场型正倒向随机微分方程在 Lipschitz 条件下存在唯一解；学者 Bahaj 和 Hiderah 在文献[8]中证明了一类带反射边界的扰动随机微分方程存在唯一的解。

压缩映射定理，也被称为 Banach 不动点定理，保证了度量空间自映射的不动点的存在性和唯一性，是研究确定型动力系统存在唯一性的经典工具，近年来也被引入随机微分方程领域的定性研究。例如：Yong 和 Zhou 在文献[9]中利用压缩映射定理，讨论了布朗运动驱动随机微分方程解的存在唯一性条件；吴霜在文献[10]中针对一类条件平均场型的随机微分方程，借助压缩映射定理证明其存在唯一解；在文献[11]中，唐浦森和陈琳利用随机分析技术和 Banach 不动点定理，研究了一类具有时滞的 Caputo 型模糊分数阶随机微分方程解的存在唯一性。

本文关注一类平均场型随机微分方程，讨论其强解的存在唯一性条件，并利用压缩映射不动点定理证明其强解的存在唯一性定理。本文主要借鉴 Yong 和 Zhou 在文献[9]中的证明方法，但与文献[9]所研究的 Itô 型随机微分方程不同，本文讨论的平均场型随机系统是 Itô 型随机微分方程的进一步推广，其中不仅含有状态过程还含有状态过程的数学期望。文献[10]针对一类条件平均场型随机微分方程，在 L^2 空间利用范数 $\|\cdot\|_\beta$ ($\beta > 0$)，借助压缩映射定理给出了解的存在唯一性定理，而本文的方程与文献[10]类似，但研究方法与文献[10]不同，本文的研究建立在泛函空间 $L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]$ ($\ell \ge 1$)，且其上的范数为 $|\cdot|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}$ (见(2.8))。

本文的结构如下：在第二节中提出问题模型并给出平均场型随机微分方程强解的存在唯一性条件；第三节是本文的主要结果，利用压缩映射定理证明方程强解的存在唯一性；第四节对本文的结论和贡献

作以总结。

2. 问题模型

令 $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0},P\right)$ 为满足一般条件的滤子概率空间并在该空间上定义一维标准布朗运动 $W(t)=\{W_t\}_{t\geq0}$，由布朗运动 $W(t)$ 所生成的自然滤子记为 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0}$，$t\geq0$。本文讨论一类平均场型随机微分方程形如：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=b\left(t,x(t),Ex(t)\right)\mathrm{d}t+\sigma\left(t,x(t),Ex(t)\right)\mathrm{d}W(t), & t\in[0,\infty),\\ x(0)=\xi. \quad P-a.s..\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x(t)=x(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega\to\boldsymbol{R}$ 是连续实值 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0}$-适应的随机过程，$Ex(t)$ 表示 $x(t)$ 关于概率测度 P 的数学期望，初值 $\xi:\Omega\to\boldsymbol{R}$ 是 $\mathcal{F}_0$-可测的随机变量。此外系统中的系数 $b(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{A}(\boldsymbol{R})$ 和 $\sigma(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{A}(\boldsymbol{R})$，这里

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{R})=\left\{\eta:\ [0,+\infty)\times C\left([0,+\infty);\boldsymbol{R}\right)\times C\left([0,+\infty);\boldsymbol{R}\right)\to\boldsymbol{R}\,\middle|\,\eta\text{ 为}\left(\mathcal{B}_{t_+}(W)\right)_{t\geq0}\text{ 循序可测的随机过程}\right\},$$

其中 $C\left([0,+\infty);\boldsymbol{R}\right)$ 表示由所有连续函数 $\varphi:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$ 组成的集合，且

$$\left(\mathcal{B}_{t_+}(W)\right)_{t\geq0}=\left(\bigcap_{s>t}\sigma\left(\mathcal{B}(W_s)\right)\right)_{t\geq0},$$

其中 $W_s\triangleq\left\{\beta(\cdot\wedge s)\,\middle|\,\beta(\cdot)\in C\left([0,\infty);\boldsymbol{R}\right)\right\}$，$\mathcal{B}(W_s)$ 为由在 W_s 上的所有开集所组成的 Borel σ 域，$\sigma\left(\mathcal{B}(W_s)\right)$ 表示包含 $\mathcal{B}(W_s)$ 的最小 σ 域。

由于随机系统的特性，随机微分方程的解分为强解和弱解，解的唯一性也分为强唯一和弱唯一。本文关注方程(2.1)强解的存在性和强唯一性，下面给出强解和强唯一的定义。

定义 2.1 给定滤子概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0},P\right)$ 和定义在其上的一维 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0}$ 适应的标准布朗运动 $W(t)$，已知 ξ 是 $\mathcal{F}_0$-可测的随机变量。

(I) 如果存在 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0}$-适应的连续过程 $x(t)$，$t\geq0$，满足：

$$x(0)=\xi,\quad P-a.s.;$$

$$\int_0^t\left\{\left|b\left(s,x(s),Ex(s)\right)\right|+\left|\sigma\left(s,x(s),Ex(s)\right)\right|^2\right\}\mathrm{d}s<\infty,\quad \forall t\geq0,\quad P-a.s.$$

和

$$x(t)=x(0)+\int_0^t b\left(s,x(s),Ex(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma\left(s,x(s),Ex(s)\right)\mathrm{d}W(s),\quad t\geq0,\quad P-a.s.,$$

则称 $x(t)$，$t\geq0$，是方程(2.1)的一个强解。

(II) 对于 $t\geq0$，令 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是方程(2.1)的两个强解，若满足

$$P\left(x(t)=y(t),0\leq t<\infty\right)=1,$$

则称方程(2.1)的强解是唯一的或者方程(2.1)的强唯一性成立。

为得到方程(2.1)的存在唯一性定理，现给出方程(2.1)强解的存在唯一性条件：

假设 1 方程(2.1)中的系数 $b\left(t,x(\cdot),Ex(\cdot)\right)\in\mathcal{A}(\boldsymbol{R})$ 和 $\sigma\left(t,x(\cdot),Ex(\cdot)\right)\in\mathcal{A}(\boldsymbol{R})$ 关于 $x(\cdot)$ 和 $Ex(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的，即存在常数 $L>0$，使得

$$\left|b\left(t,x(\cdot),Ex(\cdot)\right)-b\left(t,y(\cdot),Ey(\cdot)\right)\right|\leq L\left[\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|+\left|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)\right|\right]$$

和

$$\left|\sigma\left(t,x(\cdot),Ex(\cdot)\right)-\sigma\left(t,y(\cdot),Ey(\cdot)\right)\right|\le L\left[\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|+\left|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)\right|\right]$$

对任意 $x(\cdot)\in C\left([0,+\infty);\boldsymbol{R}\right)$ 和 $y(\cdot)\in C\left([0,+\infty);\boldsymbol{R}\right)$ 成立，$t\in[0,+\infty)$。此外，对于任意 $T>0$，有

$$\left|b(\cdot,0,0)\right|+\left|\sigma(\cdot,0,0)\right|\in L^2\left(0,T;\boldsymbol{R}\right),$$

这里 $L^2\left(0,T;\boldsymbol{R}\right)$ 表示由勒贝格可测函数 $\varphi:[0,T]\to\boldsymbol{R}$ 且满足 $\int_0^T\left|\varphi(t)\right|^2\mathrm{d}t<\infty$ 所组成的集合。

Burkholder-Davis-Gundy 不等式是 Itô 积分理论中的经典结果，在本文主要结果的推导中起到了关键作用，在引理 2.2 中给出 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，关于其详细介绍可参考文献[12]。

引理 2.2 (Burkholder-Davis-Gundy 不等式)令 $W(t)$ 为定义在滤子概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0},P\right)$ 上的标准布朗运动，假设 $\sigma\in L_{\mathcal{F}}^{2,loc}\left(0,T;\boldsymbol{R}\right)$，其中

$$L_{\mathcal{F}}^{2,loc}\left(0,T;\boldsymbol{R}\right)=\left\{X:[0,T]\times\Omega\to\boldsymbol{R}\,\middle|\,X(\cdot)\text{是}\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}\text{-适应的且}\int_0^T\left|X(t)\right|^2\mathrm{d}t<\infty,P-a.s.\right\}。$$

则对任意 $r>0$，存在一个常数 $K_r>0$，使得

$$\frac{1}{K_r}E\left\{\int_0^{\varpi}\left|\sigma(s)\right|^2\mathrm{d}s\right\}^r\le E\left\{\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^{\varpi}\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right|^{2r}\right\}\le K_rE\left\{\int_0^{\varpi}\left|\sigma(s)\right|^2\mathrm{d}s\right\}^r$$

对任意停时 ϖ 成立。

压缩映射定理是本文证明方程(2.1)存在唯一性定理的主要工具，现在引理 2.3 中给出压缩映射定理(参考文献[13])。

引理 2.3 (压缩映射定理)设 (X,d) 为非空的完备度量空间。设 $T:X\to X$ 为 X 上的一个压缩映射，也就是说，存在一个非负的实数 $q<1$，使得对于所有 X 内的 x 和 y，都有

$$d\left(T(x),T(y)\right)\le q\cdot d(x,y).$$

那么映射 T 在 X 内有且只有一个不动点 x，即

$$Tx=x.$$

3. 主要结果

本节主要给出方程(2.1)的强解存在唯一性定理，并利用压缩映射定理加以证明。为使用压缩映射定理。引入泛函空间

$$\begin{aligned}L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]&:=L_{\mathcal{F}}^{\ell}\left(\Omega;C\left([0,\tau];\boldsymbol{R}\right)\right)\\&=\left\{x:[0,\tau]\times\Omega\to\boldsymbol{R}\,\middle|\,x(\cdot)\text{连续随机过程且是}\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}\text{-适应的, 并满足}E\left(\sup_{0\le t\le\tau}\left|x(t)\right|^{\ell}\right)<\infty\right\}\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $\ell\ge1$，$0\le\tau\le T$ 且 $T>0$ 是一个固定的时间边界。进一步在其上定义范数

$$\left|x(\cdot)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}:=\left\{E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|x(t)\right|^{\ell}\right]\right\}^{\frac{1}{\ell}}.\tag{3.2}$$

可以证明 $L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]$ 是一个 Banach 空间。

下面给出本文的主要结论：方程(2.1)的强解存在唯一性定理。

定理 3.1 令假设 1 成立，则对于任意的

$$\xi\in L_{\mathcal{F}_0}^{\ell}\left(\Omega;\boldsymbol{R}\right)=\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha\text{是}\boldsymbol{R}\text{上取值且}\mathcal{F}_0\text{-可测的随机变量, 并且有}E\left|\alpha\right|^{\ell}<\infty\right\},\quad\ell\ge1$$

方程(2.1)在$[0,\infty)$上存在唯一的强解$x(t)$。

证明：假设$T>0$是一个固定的时间边界，考虑方程(2.1)在$[0,T]$上解的存在唯一性。对任意的$x(\cdot),y(\cdot)\in L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]$，$0\le\tau\le T$，定义

$$\begin{cases} X(t)=\xi+\int_0^t b(s,x,Ex)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(s,x,Ex)\mathrm{d}W(s), \\ Y(t)=\xi+\int_0^t b(s,y,Ey)\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(s,y,Ey)\mathrm{d}W(s), \quad t\in[0,\tau]. \end{cases} \tag{3.3}$$

首先证明

$$|X(\cdot)|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\le K, \quad \ell\ge1. \tag{3.4}$$

具体来说，利用范数不等式可得

$$\begin{aligned} |X(\cdot)|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell} &= \left|\xi+\int_0^{\cdot} b(s,x,Ex)\mathrm{d}s+\int_0^{\cdot}\sigma(s,x,Ex)\mathrm{d}W(s)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell} \\ &\le K\left(|\xi|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}+\left|\int_0^{\cdot} b(s,x,Ex)\mathrm{d}s\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}+\left|\int_0^{\cdot}\sigma(s,x,Ex)\mathrm{d}W(s)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

根据(3.2)可得

$$|\xi|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}=E\left[\sup_{0\le t\le\tau}|\xi|^{\ell}\right]=E|\xi|^{\ell}\le K_1. \tag{3.6}$$

利用(3.2)和绝对值不等式，有

$$\left|\int_0^{\cdot} b(s,x,Ex)\mathrm{d}s\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}=E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t b(s,x,Ex)\mathrm{d}s\right|^{\ell}\right]\le E\left[\left(\int_0^{\tau}|b(s,x,Ex)|\mathrm{d}s\right)^{\ell}\right].$$

Holder 不等式保证了

$$\left[\int_0^{\tau}|b(s,x,Ex)|\mathrm{d}s\right]^{\ell}\le\left[\int_0^{\tau}|b(s,x,Ex)|^2\mathrm{d}s\right]^{\frac{\ell}{2}},$$

故

$$\left|\int_0^{\cdot} b(s,x,Ex)\mathrm{d}s\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\le E\left[\left(\int_0^{\tau}|b(s,x,Ex)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{\ell}{2}}\right].$$

进一步根据假设 1 得到

$$\left|\int_0^{\cdot} b(s,x,Ex)\mathrm{d}s\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\le E\left[\left(\int_0^{\tau}|b(s,x,Ex)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{\ell}{2}}\right]\le K_2. \tag{3.7}$$

利用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式得

$$\left|\int_0^{\cdot}\sigma(s,x,Ex)\mathrm{d}W(s)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}=E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t\sigma(s,x,Ex)\mathrm{d}W(s)\right|^{2\cdot\frac{\ell}{2}}\right]\le K_{\frac{\ell}{2}}E\left[\left(\int_0^{\tau}|\sigma(s,x,Ex)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{\ell}{2}}\right],$$

而由假设知$|\sigma(\cdot,0,0)|\in L^2(0,T;\boldsymbol{R})$，那么

$$E\left[\left(\int_0^{\tau}|\sigma(s,x,Ex)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{\ell}{2}}\right]\le K_r$$

成立，因此

$$\left|\int_0^{\cdot}\sigma(s,x,Ex)\mathrm{d}W(s)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\le K_3. \tag{3.8}$$

综上所述，结合(3.5)~(3.8)得

$$|X(\cdot)|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\le K. \tag{3.9}$$

接下来要证明

$$|X(\cdot)-Y(\cdot)|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\le K\left\{\tau^{\frac{\ell}{2}}|x(\cdot)-y(\cdot)|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\right\}. \tag{3.10}$$

由 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的表达式可得：

$$\begin{aligned}
&|X(\cdot)-Y(\cdot)|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\\
&=\left|\left(\xi+\int_0^{\cdot}b(s,x,Ex)\mathrm{d}s+\int_0^{\cdot}\sigma(s,x,Ex)\mathrm{d}W(s)\right)-\left(\xi+\int_0^{\cdot}b(s,y,Ey)\mathrm{d}s+\int_0^{\cdot}\sigma(s,y,Ey)\mathrm{d}W(s)\right)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\\
&=\left|\left(\int_0^{\cdot}b(s,x,Ex)\mathrm{d}s-\int_0^{\cdot}b(s,y,Ey)\mathrm{d}s\right)+\left(\int_0^{\cdot}\sigma(s,x,Ex)\mathrm{d}W(s)-\int_0^{\cdot}\sigma(s,y,Ey)\mathrm{d}W(s)\right)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}.
\end{aligned}$$

由范数不等式和(3.2)式，有

$$\begin{aligned}
|X(\cdot)-Y(\cdot)|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}&\le\left|\int_0^{\cdot}\big(b(s,x,Ex)-b(s,y,Ey)\big)\mathrm{d}s\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}+\left|\int_0^{\cdot}\big(\sigma(s,x,Ex)-\sigma(s,y,Ey)\big)\mathrm{d}W(s)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\\
&=I_1+I_2,
\end{aligned}$$

其中

$$I_1=E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t\big(b(s,x,Ex)-b(s,y,Ey)\big)\mathrm{d}s\right|^{\ell}\right] \tag{3.11}$$

和

$$I_2=E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t\big(\sigma(s,x,Ex)-\sigma(s,y,Ey)\big)\mathrm{d}W(s)\right|^{\ell}\right]. \tag{3.12}$$

先考虑(3.11)，利用绝对值不等式和假设 1 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\Big(b\big(s,x(\cdot),Ex(\cdot)\big)-b\big(s,y(\cdot),E[y(\cdot)]\big)\Big)\mathrm{d}s\right|^{\ell}\\
&\le\left[\int_0^t\Big|b\big(s,x(\cdot),Ex(\cdot)\big)-b\big(s,y(\cdot),Ey(\cdot)\big)\Big|\mathrm{d}s\right]^{\ell}\\
&\le\left[\int_0^t\Big(L_1|x(\cdot)-y(\cdot)|+L_2|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)|\Big)\mathrm{d}s\right]^{\ell}\\
&\le L_{\ell}\left[\int_0^t\Big(L_1|x(\cdot)-y(\cdot)|\Big)\mathrm{d}s\right]^{\ell}+L_{\ell}\left[\int_0^t\Big(L_2|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)|\Big)\mathrm{d}s\right]^{\ell}.
\end{aligned}$$

将其代入到(3.11)可得

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t\big(b(s,x,Ex)-b(s,y,Ey)\big)\mathrm{d}s\right|^{\ell}\right]\\
&\le E\left\{\sup_{0\le t\le\tau}\left[L_{\ell}\left[\int_0^t\Big(L_1|x(\cdot)-y(\cdot)|\Big)\mathrm{d}s\right]^{\ell}+L_{\ell}\left[\int_0^t\Big(L_2|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)|\Big)\mathrm{d}s\right]^{\ell}\right]\right\}\\
&\le K\left\{E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left(\int_0^t|x(\cdot)-y(\cdot)|\mathrm{d}s\right)^{\ell}\right]+E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left(\int_0^t|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)|\mathrm{d}s\right)^{\ell}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

因为

$$E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left(\int_0^t\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|\mathrm{d}s\right)^{\ell}\right]=\tau^{\ell}\cdot\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}$$

和

$$E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left(\int_0^t\left|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)\right|\mathrm{d}s\right)^{\ell}\right]=\tau^{\ell}\cdot\left|E\left[x(\cdot)-y(\cdot)\right]\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}=\tau^{\ell}\cdot\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell},$$

所以

$$E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t\left(b(s,x,Ex)-b(s,y,Ey)\right)\mathrm{d}s\right|^{\ell}\right]\le\tau^{\ell}\cdot\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}. \tag{3.13}$$

再考虑(3.12)，首先根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，有

$$E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t\left(\sigma(s,x,Ex)-\sigma(s,y,Ey)\right)\mathrm{d}W(s)\right|^{2\times\frac{\ell}{2}}\right]\le K_{\frac{\ell}{2}}\cdot E\left\{\int_0^{\tau}\left|\sigma(s,x,Ex)-\sigma(s,y,Ey)\right|^2\mathrm{d}s\right\}^{\frac{\ell}{2}}. \tag{3.14}$$

结合假设 1 和均值不等式，有

$$\begin{aligned}\left|\sigma(s,x(\cdot),Ex(\cdot))-\sigma(s,y(\cdot),Ey(\cdot))\right|^2&\le\left\{L_1\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|+L_2\left|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)\right|\right\}^2\\&\le\frac{1}{2}L_1^2\cdot\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|^2+\frac{1}{2}L_2^2\cdot\left|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)\right|^2.\end{aligned}$$

则其积分满足

$$\int_0^{\tau}\left|\sigma(s,x(\cdot),Ex(\cdot))-\sigma(s,y(\cdot),Ey(\cdot))\right|^2\mathrm{d}s\le\frac{1}{2}L_1^2\int_0^{\tau}\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}L_2^2\int_0^{\tau}\left|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)\right|^2\mathrm{d}s.$$

所以(3.14)可以写为

$$\begin{aligned}&K_{\frac{\ell}{2}}\cdot E\left\{\int_0^{\tau}\left|\sigma(s,x,Ex)-\sigma(s,y,Ey)\right|^2\mathrm{d}s\right\}^{\frac{\ell}{2}}\\&\le K_{\frac{\ell}{2}}\cdot E\left\{\frac{1}{2}L_1^2\int_0^{\tau}\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{2}L_2^2\int_0^{\tau}\left|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)\right|^2\mathrm{d}s\right\}^{\frac{\ell}{2}}\\&\le K\left\{E\left[\int_0^{\tau}\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|^2\mathrm{d}s\right]^{\frac{\ell}{2}}+E\left[\int_0^{\tau}\left|Ex(\cdot)-Ey(\cdot)\right|^2\mathrm{d}s\right]^{\frac{\ell}{2}}\right\}\\&\le K\left\{E\left[\int_0^{\tau}\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|^{\ell}\mathrm{d}s\right]+E\left[\int_0^{\tau}\left|E\left[x(\cdot)-y(\cdot)\right]\right|^{\ell}\mathrm{d}s\right]\right\}\\&\le K\left\{E\left[\int_0^{\tau}\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|^{\ell}\mathrm{d}s\right]\right\}.\end{aligned}$$

因此可得

$$E\left[\sup_{0\le t\le\tau}\left|\int_0^t\left(\sigma(s,x,Ex)-\sigma(s,y,Ey)\right)\mathrm{d}W(s)\right|^{\ell}\right]\le K\left\{E\left[\int_0^{\tau}\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|^{\ell}\mathrm{d}s\right]\right\}\le K\tau^{\ell}\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}. \tag{3.15}$$

结合(3.13)和(3.15)有

$$\left|X(\cdot)-Y(\cdot)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\le I_1+I_2\le K\left\{\tau^{\frac{\ell}{2}}\cdot\left|x(\cdot)-y(\cdot)\right|_{L_{\mathcal{F}}^{\ell}[0,\tau]}^{\ell}\right\} \tag{3.16}$$

其中 K 与 $\tau,\xi,x(\cdot),y(\cdot)$ 无关。

综上所述，令 $K\tau^{\frac{\ell}{2}}<1$，结合(3.9)和(3.16)可知：对于 $\forall\xi\in L^{\ell}_{\mathcal{F}_0}(\Omega;\boldsymbol{R})$，$\ell\geq 1$，由(3.3)所定义的映射 $x(\cdot)\mapsto X(\cdot)$ 是从 $L^{\ell}_{\mathcal{F}}[0,\tau]$ 到自身的压缩映射，根据压缩映射定理可知，在 $[0,\tau]$ 上存在唯一的不动点，由此可得方程(2.1)在 $[0,\tau]$ 上存在唯一的强解 $x(\cdot)$。

将时间区间 $[0,T]$ 划分为 $[\tau,2\tau]\cup[2\tau,3\tau]\cup\cdots\cup[(n-1)\tau,T]$，分别在 $[\tau,2\tau],[2\tau,3\tau],\cdots,[(n-1)\tau,T]$ 上重复上述过程，即可得方程(2.1)在 $[0,T]$ 上存在唯一的强解。

由于 $T>0$ 的任意性，因此可以得到在 $[0,+\infty)$ 上的强解。

4. 结论

本文讨论了一类平均场型随机微分方程强解的存在唯一性，现有文献中此类问题研究的主要方法是迭代方法，与现有文献不同，本文采用了压缩映射定理这一理论工具，证明了当系统的系数关于状态和平均场满足 Lipschitz 连续且初值变量 $\xi\in L^{\ell}_{\mathcal{F}_0}(\Omega;\boldsymbol{R})$ （$\ell\geq 1$）时，方程的强解具有存在唯一性。本文借鉴了文献[9]的证明方法，由于本文讨论的平均场型随机系统同时含有状态和其数学期望，可退化为文献[9]所研究的 Itô 型随机微分方程，因此本文的结果可视为文献[9]结论向平均场型随机系统的进一步推广。文献[10]同样利用压缩映射定理证明了一类条件平均场型随机微分方程解的存在唯一性，而本文和文献[10]使用的泛函空间和范数不同，具体来说，文献[10]的压缩映射定义在 L^2 空间，其上定义的范数为 $\|x(\cdot)\|_{\beta}=\left(E\left[\int_0^T e^{-\beta t}|x(t)|^2 dt\right]\right)^{\frac{1}{2}},\beta>0$；本文压缩映射存在的泛函空间为 $L^{\ell}_{\mathcal{F}}[0,\tau]$ 且其上的范数为 $|\cdot|_{L^{\ell}_{\mathcal{F}}[0,\tau]}$。

基金项目

辽宁省自然科学基金指导计划项目(2019-ZD-0087)。

参考文献

[1] 金丽霞，吴曙东，詹志明，陈爱喜. 准二维谐振势阱中有限尺度的非理想玻色气体[J]. 华中科技大学学报, 2002(11): 102-104.

[2] 蔡天缘. 内部交易下随机时滞微分方程的平均场最大值原理[D]: [硕士学位论文]. 长春: 长春工业大学, 2023.

[3] Evans, L.C. (1999) An Introduction to Stochastic Differential Equations. Department of Mathematics University of California, Berkeley.

[4] 陈晨，张引娣，任丽梅. 几种随机微分方程解的存在性与唯一性[J]. 应用数学进展, 2015, 4(1): 37-45.

[5] Vu, H., An, V. and Hoa, V. (2019) Random Fractional Differential Equations with Riemann-Liouville-Type Fuzzy Differentiability Concept. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, **36**, 6467-6480. https://doi.org/10.3233/JIFS-182863

[6] 刘存霞. G-布朗运动驱动的随机微分方程的全局渐进稳定性[J]. 烟台大学学报, 2024, 37(1): 21-25.

[7] Li, J.S., Mi, C., Xing, C.Z. and Zhao, D.H. (2023) General Coupled Mean-Field Reflected Forward-Backward Stochastic Differential Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **43B**, 2234-2262. https://doi.org/10.1007/s10473-023-0518-4

[8] Bahaj, F. and Hiderah, K. (2024) Existence and Uniqueness of Solutions for Perturbed Stochastic Differential Equations with Reflected Boundary. *Monte Carlo Methods and Applications*, **30**, 31-41. https://doi.org/10.1515/mcma-2023-2018

[9] Yong, J. and Zhou, X.Y. (1999) Stochastic Control: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer, New York.

[10] 吴霜. 条件平均场随机微分方程的最优控制问题[J]. 数学年刊 A 辑, 2021, 42(1): 75-88.

[11] 唐浦森，陈琳. 具有时滞的模糊分数阶随机微分方程的存在性[J]. 运筹与模糊学, 2023, 13(6): 6277-6288.

[12] Karatzas, I. and Shreve, S.E. (1984) Connections between Optimal Stopping and Singular Stochastic Control I, Monotone Follower Problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **22**, 856-877. https://doi.org/10.1137/0322054

[13] Granas, A. and Dugundji, J. (2003) Fixed Point Theory. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-21593-8