Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2024, 13(4), 1618-1622**
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134152

Hans汉斯

*d*棵树的笛卡尔乘积图的双宽度研究

彭浩清

浙江师范大学数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2024年3月25日；录用日期：2024年4月22日；发布日期：2024年4月29日

摘 要

在2020年Bonnet，Kim，Thomassé和Watrigant提出了双宽度。本文主要给出了对于任意正整数*d*，*d*棵树的笛卡尔积乘积图的双宽度的一个上界。

关键词

双宽度，笛卡尔乘积图，收缩序列

The Twin-Width Study of a Cartesian Product Graph of *d* Trees

Haoqing Peng

School of Mathematical Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 25th, 2024; accepted: Apr. 22nd, 2024; published: Apr. 29th, 2024

Abstract

In 2020, Bonnet, Kim, Thomassé, and Watrigant proposed twin-width. This article mainly gave that for any positive integer *d*, an upper bound on the twin-width of the Cartesian product graph of *d* trees.

Keywords

Twin-Width, Cartesian Product Graph, Contraction Sequences

文章引用: 彭浩清. *d* 棵树的笛卡尔乘积图的双宽度研究[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1618-1622.
DOI: 10.12677/aam.2024.134152

1. 引言

在本文中，我们只研究有限简单图，即所研究的简单图既不存在重边也不存在环。本文用$V(G)$来表示图G的顶点集，用$E(G)$来表示图G的边集。我们用符号Δ表示G中顶点的度数的最大值，并把它叫做图G的最大度。把与v相邻的所有顶点全体构成的集合称作v在图G的邻域，记作$N_G(v)$。假设$V'(G)$是$V(G)$的一个非空真子集，以$V'(G)$为顶点集，以两端点均在$V'(G)$中的边的全体为边集所组成的子图，称为G的由$V'(G)$所导出的子图，记为$G[V'(G)]$；$G[V'(G)]$称为G的导出子图。我们把任意两个顶点间均有边连结的图称为完全图，记作K_n，其中n是图K_n的顶点数。

双宽度是由 Bonnet，Kim，Thomassé 和 Watrigant [1]于 2020 年引入的图和相关结构的相对较新的结构宽度度量，并给出了树的双宽度为 2，路的双宽度为 1，完全图的双宽度为 0，还给出了d-维n-网格图的双宽度至多为$3d$。2021 年，Bonnet，Geniet，Kim，Thomassé 和 Watrigant [2]给出了任意图G和H的强积图的双宽度的上界为$\max\{\mathrm{tww}(G)(\Delta(H)+1)+2\Delta(H),\mathrm{tww}(H)+\Delta(H)\}$。2022 年，Pettersson 和 Sylvester 给出了任意图G和H的笛卡尔积图的双宽度的上界为$\max\{\mathrm{tww}(G)+\Delta(H),\mathrm{tww}(H)\}+\Delta(H)$，还给出了$d$个完全图的笛卡尔乘积图的上界。对于任意正整数$d$，目前还没有人给出$d$个任意图的笛卡尔乘积图的上下界。本文朝着这个目标的前进，研究了d棵树的笛卡尔积图的双宽度的一个上界，希望能对后续学者研究d个任意图的笛卡尔乘积图的上下界提供一些参考价值。

接下来，本文将详细介绍双宽度的概念。一个三元组$G=(V,E,R)$，其中E和R是V上两两不交的边集，E中的元素是黑边，R中的元素是红边。将导出子图的概念推广到三元组中。我们用$R(v)$表示v的红色邻域。一个三元组(V,E,R)如果满足在(V,R)中最大度至多为d，则称这个三元组为d-三元组。任意图(V,E)可以被看成三元组$(V,E,\varnothing)$。给定一个三元组$G=(V,E,R)$和V的两个顶点u，v，三元组$G'=(V',E',R')$可以通过在G上收缩u,v生成新点w得到，定义这个三元组的顶点集为$V'=V-\{u,v\}\cup\{w\}$，使得$G-\{u,v\}=G'-\{w\}$，并且使得$N_{G'}(w)=N_G(u)\cap N_G(v)$，$R_{G'}(w)=R_G(u)\cup R_G(v)\cup(N_G(u)\Delta N_G(v))$，其中$\Delta$表示对称差。图$G$的一个$d$-收缩序列是一个以$G$开始，以单顶点三元组图结束的三元组序列，并使得所有中间三元组的最大红度至多为d。图G的双宽度是取遍G的所有d-收缩序列的最小值d，记为$\mathrm{tww}(G)$。

图A和图B的笛卡尔积，记作$A\square B$，是一个以$V(A)\times V(B)$为顶点集的图，如果对于不同的两个点(v,x)，$(w,y)\in V(A)\times V(B)$满足(1) $v=w$且$xy\in E(B)$或者(2) $x=y$且$vw\in E(A)$，那么(v,x)和(w,y)相邻。

图A和图B的强积，记作$A\boxtimes B$，是一个以$V(A)\times V(B)$为顶点集的图，如果对于不同的两个点(v,x)，$(w,y)\in V(A)\times V(B)$满足(1) $v=w$且$xy\in E(B)$或者(2) $x=y$且$vw\in E(A)$或者(3) $vw\in E(A)$且$xy\in E(B)$，那么(v,x)和(w,y)相邻。

定理 1.1 [1]对于每个正整数d和n，d-维n-网格的双宽度至多为$3d$。

定理 1.2 [2]对任意图G和H，有$\mathrm{tww}(G\boxtimes H)\le\max\{\mathrm{tww}(G)(\Delta(H)+1)+2\Delta(H),\mathrm{tww}(H)+\Delta(H)\}$。

定理 1.3 [3]对任意图G和H，有$\mathrm{tww}(G\square H)\le\max\{\mathrm{tww}(G)+\Delta(H),\mathrm{tww}(H)\}+\Delta(H)$。

定理 1.4 [3]对于任意$d,k\ge1$，$\mathbb{H}(d,k)=K_k\square\mathbb{H}(d-1,k)$，有

$$tww(\mathbb{H}(d,k))=\begin{cases}0 & \text{if } d=1 \text{ or } k=1\\ 2(k-1)(d-2) & \text{if } d\ge 2 \text{ and } k=2\\ 2(k-1)(d-1) & \text{if } d\ge 2 \text{ and } k\ge 3\end{cases}。$$

2. 主要定理

定理 2.1 对于任意最大度为 Δ 的树 T，和任意正整数 d，d 棵树 T 的笛卡尔乘积图 $T\square T\square\cdots\square T$，记作 T^d，有 $\operatorname{tww}(T^d)\le 2+(d-1)2\Delta$。

3. 主要定理证明

引理 3.1 [2]对于任意图 H，令 $\Delta(H)$ 为 H 的最大度，在图 H 上的每个三元组的双宽度至多 $\operatorname{tww}(H)+\Delta(H)$。

定理 2.1 对于任意最大度为 Δ 的树 T，和任意正整数 d，d 棵树 T 的笛卡尔乘积图 $T\square T\square\cdots\square T$，记作 T^d，有 $\operatorname{tww}(T^d)\le 2+(d-1)2\Delta$。

证明：令 T_n 表示 T 的顶点数为 n 的树，T_n^d 表示 d 棵树 T_n 的笛卡尔乘积图，其中 $T_n^1=T_n$。我们将对 d 作归纳来证明 $\operatorname{tww}(T_n^d)\le 2+(d-1)2\Delta$。

归纳基础：当 $d=1$ 时，$T_n^d=T_n^1=T_n$，任意一个树 T_n 的双宽度至多为 2。不妨假设 $d>1$。

归纳假设：T_n^{d-1} 存在一个 $2+(d-2)2\Delta$ -收缩序列。

由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，所以 $V(T_n^d)$ 可以被划分为 n 个集合 $V_{11},V_{21},V_{22},\cdots,V_{2k_2},\cdots,V_{p1},\cdots,V_{pk_p}$，其中每个 $V_{il}=\{v_1^{il},v_2^{il},\cdots,v_{n^{d-1}}^{il}\}$，使得每个 V_{il} 在 T_n^d 中的导出子图与 T_n^{d-1} 同构，其中 $i\in[p]$，$l\in[k_i]$，使得在每个 V_{il} 收缩成一个顶点 u_{il} 后，得到的图为树 T_n，且 u_{11} 为树根也就是位于第一层，$u_{21},u_{22},\cdots,u_{2k_2}$ 位于树 T_n 的第二层，以此类推，$u_{p1},u_{p2},\cdots,u_{pk_p}$ 位于树 T_n 最后一层。由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，因此对所有 $j\in[n^{d-1}]$，$i\in[p]$，$a\in[k_i]$，$b\in[k_{i+1}]$ 如果 u_{ia} 是 $u_{(i+1)b}$ 的父节点，则 v_j^{ia} 与 $v_j^{(i+1)b}$ 之间有一条边相连。

根据归纳假设，T_n^{d-1} 存在一个 $2+(d-2)2\Delta$ −收缩序列。在每个 V_{il} 中并行的按照这个收缩序列进行收缩：在 V_{11} 上进行 T_n^{d-1} 的 $2+(d-2)2\Delta$ −收缩序列的第一次收缩，然后在 V_{21} 上进行 T_n^{d-1} 的 $2+(d-2)2\Delta$ −收缩序列的第一次收缩，直至在 V_{pk_p} 上进行 T_n^{d-1} 的 $2+(d-2)2\Delta$ −收缩序列的第一次收缩，接着在 V_{11} 上进行 T_n^{d-1} 的 $2+(d-2)2\Delta$ −收缩序列的第二次收缩，然后在 V_{21} 上进行 T_n^{d-1} 的 $2+(d-2)2\Delta$ −收缩序列的第二次收缩，直至在 V_{pk_p} 上进行 T_n^{d-1} 的 $2+(d-2)2\Delta$ -收缩序列的第二次收缩，以此类推，直至在 V_{pk_p} 上进行 T_n^{d-1} 的 $2+(d-2)2\Delta$ −收缩序列的最后一次收缩。通过这样做，可以维护以下不变量：

当在 V_{11} 中进行一次收缩时，即收缩 v_e^{11},v_f^{11} 生成 v_{ef}^{11}，其中 $e,f\in[n^{d-1}]$ 且 $e\ne f$，根据归纳假设，v_{ef}^{11} 在 V_{11} 中的红色邻点数至多为 $2+(d-2)2\Delta$，由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，所以 v_e^{11} 在 $V_{21},V_{22},\cdots,V_{2k_2}$ 上的邻点的个数之和至多为 Δ，v_f^{11} 在 $V_{21},V_{22},\cdots,V_{2k_2}$ 上的邻点的个数之和至多为 Δ，所以在收缩 v_e^{11},v_f^{11} 生成 v_{ef}^{11} 后，v_{ef}^{11} 在 $V_{21},V_{22},\cdots,V_{2k_2}$ 上的红色邻点的个数之和至多为 2Δ，由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，所以 V_{11} 中的任意顶点在除了 $V_{11},V_{21},V_{22},\cdots,V_{2k_2}$ 之外的其他所有顶点集上无邻点，所以 v_{ef}^{11} 在除了 $V_{11},V_{21},V_{22},\cdots,V_{2k_2}$ 之外的其他所有顶点集上的红色邻点个数为 0，因此 v_{ef}^{11} 的红色邻点个数至多为 $2+(d-2)2\Delta$。

当在 V_{il} 中进行一次收缩时，其中 $i\in\{2,3,\cdots,p-1\}$，$l\in[k_i]$，即收缩 v_e^{il},v_f^{il} 生成 v_{ef}^{il}，其中 $e,f\in[n^{d-1}]$ 且 $e\ne f$，根据归纳假设根据归纳假设，v_{ef}^{il} 在 V_{il} 中的红色邻点数至多为 $2+(d-2)2\Delta$，为了不失一般性，不妨假设 $u_{(i-1)m}$ 为 u_{il} 的父节点，则 v_{ef}^{il} 在 $V_{(i-1)m}$ 上的红色邻点个数至多为 1(这是因为 $V_{(i-1)m}$ 中相同的两个顶点在上一步已经被收缩成一个顶点了)。不妨假设，u_{il} 的孩子节点为 $u_{(i+1)i^1},u_{(i+1)i^1+1},\cdots,u_{(i+1)j^1}$，由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，所以 v_e^{il} 在 $V_{(i+1)i^1},V_{(i+1)i^1+1},\cdots,V_{(i+1)j^1}$ 上的邻点个数总和至多为 $(\Delta-1)$，v_f^{il} 在

$V_{(i+1)i^1}, V_{(i+1)i^1+1}, \cdots, V_{(i+1)j^1}$ 上的邻点个数总和至多为 $(\Delta-1)$，所以在 v_e^{il}, v_f^{il} 生成 v_{ef}^{il} 后，v_{ef}^{il} 在 $V_{(i+1)i^1}, V_{(i+1)i^1+1}, \cdots, V_{(i+1)j^1}$ 上的红色邻点个数总和至多为 $2(\Delta-1)$。由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，所以 V_{il} 中的任意顶点在除了 $V_{(i-1)m}, V_{il}, V_{(i+1)i^1}, V_{(i+1)i^1+1}, \cdots, V_{(i+1)j^1}$ 之外的其他所有顶点集上无邻点，所以 v_{ef}^{il} 在除了 $V_{(i-1)m}, V_{il}, V_{(i+1)i^1}, V_{(i+1)i^1+1}, \cdots, V_{(i+1)j^1}$ 之外的其他所有顶点集上的红色邻点个数为 0。因此 v_{ef}^{il} 的红色邻点个数至多为 $2+(d-2)2\Delta+2(\Delta-1)+1=(d-1)2\Delta$。

当在 V_{pk_p} 中进行一次收缩时，即收缩 $v_e^{pk_p}, v_f^{pk_p}$ 生成 $v_{ef}^{pk_p}$，其中 $e, f \in [n^{d-1}]$ 且 $e \neq f$，根据归纳假设，$v_{ef}^{pk_p}$ 在 V_{pk_p} 中的红色邻点数至多为 $2+(d-2)2\Delta$，为了不失一般性，不妨假设 $u_{(p-1)m^1}$ 为 u_{pk_p} 的父节点，$v_{ef}^{pk_p}$ 在 $V_{(p-1)m^1}$ 上的红色邻点个数为 1 (这是因为 $V_{(p-1)m^1}$ 中相同的两个顶点在上一步已经被收缩成一个顶点了)。由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，所以 V_{pk_p} 中的任意顶点在除了 $V_{pk_p}, V_{(p-1)m^1}$ 之外的其他所有顶点集上无邻点，所以 $v_{ef}^{pk_p}$ 在除了 $V_{pk_p}, V_{(p-1)m^1}$ 之外的其他所有顶点集上的红色邻点个数为 0。因此 $v_{ef}^{pk_p}$ 的红色邻点个数至多为 $3+(d-2)2\Delta$。

而且每个不参与当前收缩的顶点在它自己所处的 V_{il} 中红色邻点个数至多为 $2+(d-2)2\Delta$ (这是根据归纳假设得出的)，其中 $i \in [p]$，$l \in [k_i]$。若 $u_{(i-1)m}$ 为 u_{il} 的父节点，则根据 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积可知这个顶点在 $V_{(i-1)m}$ 上的红色邻点个数至多为 1。为了不失一般性，不妨假设 u_{il} 的孩子节点为 $u_{(i+1)i^1}, u_{(i+1)i^1+1}, \cdots, u_{(i+1)j^1}$，由于树 T_n^1 的最大度为 Δ，所以 u_{il} 的孩子节点个数至多为 $\Delta-1$，根据 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积可知这个顶点在 $V_{(i+1)i^1}, V_{(i+1)i^1+1}, \cdots, V_{(i+1)j^1}$ 上的红色邻点个数总和至多为 $2(\Delta-1)$。由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，所以 V_{il} 中的任意顶点在除了 $V_{(i-1)m}, V_{il}, V_{(i+1)i^1}, V_{(i+1)i^1+1}, \cdots, V_{(i+1)j^1}$ 之外的其他所有顶点集上无邻点，所以这个顶点在除了 $V_{(i-1)m}, V_{il}, V_{(i+1)i^1}, V_{(i+1)i^1+1}, \cdots, V_{(i+1)j^1}$ 之外的其他所有顶点集上的红色邻点个数为 0。因此这个顶点的红色邻点个数至多为 $1+(d-1)2\Delta$。若 u_{il} 无父节点，即 u_{il} 为树 T_n^1 的根，也就是 $i=1$ 且 $l=1$ 所以 u_{11} 的孩子节点为 $u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2k_2}$，由于树 T_n^1 的最大度为 Δ，所以 u_{11} 的孩子节点个数至多为 Δ。根据 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积可知这个顶点在 $V_{(i+1)i^1}, V_{(i+1)i^1+1}, \cdots, V_{(i+1)j^1}$ 上的红色邻点个数总和至多为 2Δ。由于 T_n^d 为 T_n^{d-1} 与 T_n^1 的笛卡尔积，所以 V_{11} 中的任意顶点在除 $V_{11}, V_{21}, V_{22}, \cdots, V_{2k_2}$ 之外的其他所有顶点集上无邻点，所以这个顶点在除了 $V_{11}, V_{21}, V_{22}, \cdots, V_{2k_2}$ 之外的其他所有顶点集上的红色邻点个数为 0。因此这个顶点的红色邻点个数至多为 $2+(d-1)2\Delta$。

当这个进程结束后，每个 V_{il} 都被收缩成一个顶点，因此得到的一个三元组是树 T 上的一个三元组，根据引理 3.1 可得这个三元组的双宽度至多为 $\Delta+2$。

因此我们得到了 T_n^d 存在一个 $2+(d-1)2\Delta$ −收缩序列。也就是 $\operatorname{tww}(T^d) \leq 2+(d-1)2\Delta$。

4. 结语

在图论中，对双宽度的研究，很多学者做出了杰出的贡献，但对于不同的图类和乘积图上的双宽度研究还值得进一步探讨。本文给出了对于任意正整数 d，d 棵树的笛卡尔积图的双宽度的一个上界为 $2+(d-1)2\Delta$。若把树 T 扩展为任意图后的研究是值得进一步探讨的问题。

参考文献

[1] Bonnet, É., Kim, E.J., Thomassé, S. and Watrigant, R. (2020) Twin-Width I: Tractable FO Model Checking. 2020 *IEEE 61st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, Durham, NC, 16-19 November 2020,

601-612. https://doi.org/10.1109/FOCS46700.2020.00062

[2] Bonnet, É., Geniet, C., Kim, E.J., Thomassé, S. and Watrigant, R. (2021) Twin-Width II: Small Classes. In: Marx, D., Ed., *Proceedings of the* 2021 *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (*SODA*), Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1977-1996. https://doi.org/10.1137/1.9781611976465.118

[3] Pettersson, W. and Sylvester, J. (2022) Bounds on the Twin-Width of Product Graph. arXiv:2202.11556,2022 https://doi.org/10.46298/dmtcs.10091