Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(4), 1648-1662
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134157

可违约金融市场中动态VaR约束的最优投资策略

王东立*

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2024年3月25日；录用日期：2024年4月23日；发布日期：2024年4月30日

摘　要

本文研究了可违约金融市场中具有动态风险价值(VaR)约束的最优投资问题。假定投资者将资产投资于由一种无风险资产、股票和可违约债券组成的金融市场中。由于债券的违约可能导致向下跳跃的发生，这样的设定使总财富过程成为跳跃－扩散过程，而不是纯粹的扩散过程。对财富过程进行动态VaR约束达到对风险实时监控的目的，根据随机控制的原理和Karush-Kuhn-Tucker (KKT)条件将最优投资问题转化为求解非线性方程组问题，得到了幂效用函数下具有动态风险约束的最优投资策略，并且给出了相应的验证定理。最后，通过数值分析说明了模型参数以及违约对投资策略的影响。

关键词

可违约债券，风险约束，最优投资组合，随机控制，KKT条件

Optimal Investment Strategy with Dynamic VaR Constrain in a Defaultable Financial Market

Dongli Wang*

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Mar. 25th, 2024; accepted: Apr. 23rd, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

This paper considers the optimal investment problem with dynamic Value-at-Risk (VaR) con-

*通讯作者。

文章引用: 王东立. 可违约金融市场中动态 VaR 约束的最优投资策略[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1648-1662.
DOI: 10.12677/aam.2024.134157

straint in a defaultable financial market. The wealth is assumed to be invested in a risk-free asset and two risk assets: a stock and a defaultable bond, which is a discontinuous process since there is a possibility of downside jump caused by the default of bond. Such a setting makes the total wealth process a jump diffusion process, rather than a pure diffusion process. This paper applies dynamic VaR constraint to the wealth process to achieve real-time risk monitoring. Based on the principles of stochastic control and the Karush Kuhn Tucker (KKT) condition, the optimal investment problem is transformed into a problem of solving a nonlinear system of equations. The optimal investment portfolio with dynamic risk constraint on the wealth process in a defaultable financial market is obtained when the utility function is a power function, and corresponding verification theorems are proven. Finally, numerical analysis is conducted to demonstrate the impact of model parameters and default on investment strategies.

Keywords

Defaultable Bond, Risk Constraint, Optimal Investment Portfolio, Stochastic Control, KKT Condition

1. 引言

最优投资组合的选择问题一直受到学术界和金融业的广泛关注。Markowitz [1]提出的均值方差(MV)投资组合选择公式在这一领域做出了开创性的工作，其一个基本原则是在最大化预期终端财富和最小化投资风险之间取得平衡，这成为现代投资组合理论的起点。Markowitz 对于投资组合的风险是用终端财富的方差来度量的，后期随着金融市场的发展，不同类型的风险度量标准逐渐被提出。

Roy [2]提出了用于衡量投资组合中下行风险的安全第一原则(SFP)，这是管理亏空风险的一个重要准则，开创了灾难性事件风险管理的概念和实践。Fishbburn [3]提出了下偏矩(LPM)，LPM 可以通过改变其两个参数(基准水平和矩的阶数)来表示投资者对于风险的态度。90 年代风险价值(VaR)的提出为风险度量提供了新方向，VaR 能够对预期损失施加约束，并且如果时间足够短，VaR 也可以成为动态的风险度量，很明显这种对风险度量的方式是更加合理的，因此得到学者的认可与推崇。

均值方差问题是 Markowitz 在单周期环境中提出的，但是单周期模型缺乏灵活性且对市场变化不敏感，因此单周期模型很快被拓展到多周期。多周期模型不是将投资组合的均值和方差视为单独的量并找到它们之间的关系，而是考虑单个量，即终端财富的期望效用。期望效用最大化问题一直是金融界的重要研究领域，Merton [4] [5]首先研究了终端财富的期望效用最大化的优化问题，在几何布朗运动的背景下用随机控制理论求解了最优策略。从那时起，期望效用最大化问题引起了人们的广泛关注，越来越多的优化理论和技术在这一领域得到了发展。Browne [6]建立了一个风险资产遵循几何布朗运动的模型，用随机控制理论找到了终端财富期望 CARA 效用最大化的最优投资策略。Gao [7]研究的是在 DC 养老金计划中寻求终端财富期望效用最大的投资组合优化问题。不仅推导了 CARA 效用函数还计算出 CRRA 效用函数的显式解。

动态规划常被用来解决期望效用最大化问题。动态规划的原理是利用随机控制理论导出一组满足最优值函数和策略的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程组。Cao 和 Wan [8]在分散风险的角度通过求解 HJB 方程给出了如何购买比例再保险的策略。Liang 等人[9]假设投资的瞬时回报率遵循 Ornstein-Uhlenbeck 过

程，利用随机控制理论不仅推导了复合泊松风险模型的最优投资策略和值函数的显式表达式，还推导了布朗运动风险模型下的最佳策略。其他相关参考文献见 Kraft 和 Steffensen [10]，Liang 和 Guo [11]。

前面研究的均是无风险约束的投资组合问题，Solvency II 和 Basel III 等规则使研究人员意识到，对预期收益施加风险约束将更加合理。Wang 等人[12]讨论的是在 VaR 约束下，将求解纳什均衡再保险和投资策略的约束 HJB 方程转化为求解不同情景下的非线性方程组，最后得到了一个特殊情况的解。Zhou 等人[13]研究了动态均值-VaR 投资组合选择公式，打破了当时技术中只有静态均值-VaR 组合选择的现状，得出了最优的投资策略。Niu 和 Gao [14]研究了均值回归市场中的动态均值-LPM (下偏矩)投资组合优化问题，使用鞅方法巧妙地解决了这个问题，并且用数值方法和蒙特卡罗方法推导出给定状态下的最优财富过程和投资组合。其它鞅方法相关的参考文献见 Guan 等人[15]，Bi 和 Cai [16]。

尽管在上述文献中研究了各种受约束的期望效用最大化问题，但它们将市场环境限制在完全市场中的连续扩散过程中。然而金融市场中更符合实际的是跳跃－扩散模型，Kramkov 和 Schachermayer [17]利用效用函数的凸共轭，在跳跃－扩散模型下将原始问题转化为求解约束优化问题。而 Michelbrink 和 Le [18]将效用函数的凸共轭与鞅表示定理相结合，从而最优鞅测度、最优策略可以用非线性方程组来求解。在 Michelbrink 和 Le 的基础上，Junca 和 Serrano [19]将投资组合配置的经典凸对偶方法扩展到一个非线性财富动态模型，明确确定了具有 CRRA 偏好的最优投资策略。但是这些研究中都没有对财富过程进行风险约束，更值得关注的是具有风险约束的跳跃－扩散模型，此类型的研究仍是个缺口。本文研究了财富过程为跳跃－扩散过程下的期望效用最大化问题，对目前存在的期望效应最大化问题进行了一定的推广。

本文其余部分结构如下。在第 2 节中介绍了金融市场环境。在第 3 节中，介绍了风险价值的定义并且给出了违约前和违约后的动态风险价值。第 4 节主要应用随机控制原理和 KKT 条件解决违约前和违约后情景下的投资组合问题。在第 5 节中给出了数值分析结果。最后，在第 6 节中对本文进行了总结。

2. 金融市场设置

假设 $(\Omega,\mathbb{F},P)$ 是一个关于 P -完全的概率空间， $\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq0}$ 是一个由布朗运动 $\{W(t)\}_{t\geq0}$ 生成的过滤，用 $\{H_t\}_{t\geq0}$ 表示右连续递增过程，进而 $\mathbb{H}=\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq0}$ 为其生成的自然过滤，过滤 $\mathbb{H}$ 是由停时 τ 生成的最小过滤。$\chi_{\{\tau\leq t\}}$ 表示当 $\tau\leq t$ 时值为 1 的示性函数。令 $\mathbb{G}=\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq0}$ 表示由 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{H}$ 生成的最大过滤，即 $\mathcal{G}_t:=\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_t$ 。$T>0$ 是有限的投资时间长度。假设投资者的初始财富为 $x_0>0$，将资金投资于金融市场上的三种资产：无风险资产、股票和可违约债券。

在客观概率测度 P 下，无风险资产 $S_0(t)$ 和股票 $S(t)$ 的价格过程遵循以下随机微分方程：

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)}=rdt, \tag{2.1}$$

和

$$\frac{dS(t)}{S(t)}=\mu dt+\sigma dW(t), \tag{2.2}$$

其中 $r>0$ 表示无风险利率， $\mu>r$ 和 σ 分别表示股票的回报率和波动率， $\{W(t)\}_{t\geq0}$ 表示 $\mathcal{F}_t$ -适应的标准布朗运动。

设 τ 是定义在 $(\Omega,\mathbb{H},P)$ 上的非负随机变量，它表示违约时刻，在客观概率测度 P 下，$H(t)$ 具有恒定强度 $h^p>0$，下面给出 $\{M^p(t)\}_{t\geq0}$ 的定义：

$$M^p(t):=H(t)-\int_0^t(1-H(s-))h^p ds,$$

那么 $\{M^p(t)\}_{t\geq 0}$ 在空间 $(\mathbb{H}, P)$ 下是一个鞅。

在给出可违约债券价格过程之前，通过 Radon–Nikodym 导数定义了风险中性测度 Q：

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{G}_t} = L(t) = L_1(t)L_2(t), \tag{2.3}$$

其中

$$L_1(t) := \exp\left\{\int_0^t \theta dW(s) - \int_0^t \frac{1}{2}\theta^2 ds\right\},$$
$$L_2(t) := \exp\left\{-\int_0^t ln\Delta dH(s) - \int_0^{t\wedge\tau} h^q(1-\Delta)ds\right\}.$$

引入 $\frac{1}{\Delta} := \frac{h^q}{h^p}$ 来表示违约风险溢价，在风险中性测度 Q 下，$h^q = \frac{h^p}{\Delta}$ 表示违约强度。由于 Q 下的违约概率高于 P 下的概率，因此本文假设 $\frac{1}{\Delta} > 1$。

根据 Bielecki 和 Jang [20]的引理 3，到期日为 T，回收率为 $1-\zeta$ 的可违约债券的动态价格过程如下：

$$dP(t,T) = P(t-,T)\left[rdt + (1-H(t-))\delta(1-\Delta)dt - (1-H(t-))\zeta dM^p(t)\right]. \tag{2.4}$$

其中 $M^p(t) = H(t) - h^q\int_0^t \Delta(1-H(s-))ds$ 是 P-鞅，$\delta = h^q\zeta$ 是客观概率测度下的信用利差。

设 $\pi_s(t)$、$\pi_p(t)$ 和 $\pi_0(t)$ 分别为 t 时刻投资于股票、可违约债券和无风险资产的金额。本文的交易策略用 $\Pi = \{\pi_0(t), \pi_s(t), \pi_p(t)\}$ 表示，在策略 Π 下，投资者的财富过程满足以下随机微分方程：

$$\begin{aligned} dX^\Pi(t) &= \pi_0(t)\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \pi_s(t)\frac{dS(t)}{S(t)} + \pi_p(t)\frac{dP(t,T)}{P(t-,T)} \\ &= X^\Pi(t)rdt + \left[\pi_s(t)(\mu - r) + \pi_p(t)(1-H(t))(1-\Delta)\delta\right]dt \\ &\quad + \pi_s(t)\sigma dW(t) - \pi_p(t)(1-H(t-))\zeta dM^p(t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $X^\Pi(0) = x_0 > 0$。

定义 1 称策略 $\Pi = \{\pi_0(t), \pi_s(t), \pi_p(t)\}$ 为可行策略，若 Π 属于以下集合：

$$\mathcal{A}(x_0) = \left\{\Pi \in \mathcal{D} : \pi(t) \in \mathbb{R},\ X^\Pi(0) = x_0,\ X^\Pi(t) \geq 0,\ a.s., \forall 0 \leq t \leq T\right\}.$$

其中 $\mathcal{D}$ 表示由 Π 组成的集合，Π 是 $\mathcal{G}_t$-逐步可测的，并且对于 $\forall t \in [0,T]$，均有 $\int_0^T \|\Pi(t)\|^2 dt < \infty$。

本文的问题是一个期望效用最大化问题，考虑一个在正半轴上的所有地方都有定义和有限值的效用函数 U，此外，本文还做了一般的假设：

(H1) U 是二次可微、严格递增且严格凹的，并且 $U(0) = 0$，

(H2) 函数 U 满足 Inada 条件

$$U'(0+) = \lim_{x\downarrow 0} U'(x) = \infty,\ U'(\infty) = \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0.$$

用 I 表示 U' 的逆函数，因此有 $x = I(U'(x)) = U'(I(x))$。

3. 动态 VaR 约束

VaR 是指在给定时期内和给定概率水平下投资组合可能面临的最大损失。在金融行业成为一种可行的风险衡量标准，粗略地说，VaR 是特定时期 T 内随机损失的最大分位数。也就是说，给定置信水平 $(1-\lambda)$，投资者对投资的损失 ΔX 小于 VaR 有 $(1-\lambda)$ 的信心，与方差和平均绝对偏差相比，VaR 更适合

作为下行风险度量，尤其是当潜在收益(损失)分布不对称或重尾时。

下面给出 VaR 的定义，给定一个概率水平 $\alpha\in(0,1)$ 和时间范围 $h>0$，t 时刻的 VaR 值可表示为：

$$
\begin{aligned}
VaR_t^{\alpha,h} &= \inf\left\{L\geq 0: P\left(\Delta X^{\Pi}(t)\geq L\middle|\mathcal{F}_t\right)<\alpha\right\}\\
&=\left[\sup\left\{L\in\mathbb{R}: P\left(-\Delta X^{\Pi}(t)\leq L\middle|\mathcal{F}_t\right)<\alpha\right\}\right]^-,
\end{aligned}
$$

其中 $x^-=\max\{0,-x\}$，$x^+=\max\{0,x\}$。

在实际的投资过程中，投资者不可能实时地去调节投资策略，所以投资策略的变化并不是一个绝对连续的过程。对于足够小的时间段 $h>0$，在时间范围 $[t,t+h)$ 内任意时刻 s 有这样的设定 $\pi(s)=\pi(t)$。

引理 1 给定概率水平 $\alpha\in(0,1)$ 和时间范围 $h>0$，在违约前 $(H(t)=0)$ 和违约后 $(H(t)=1)$ 的 VaR 值可表示为：

$$
VaR_t^{\alpha,h}=\begin{cases}
\Bigg[-\dfrac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\right] & \\
+\displaystyle\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)\Bigg]^+, & H(t)=0;\\
\left[-\dfrac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)\right]^+, & H(t)=1,
\end{cases}\tag{3.1}
$$

其中 $A^{\Pi}(t)=\sqrt{\dfrac{e^{2rh}-1}{2r}\pi_s^2(t)\sigma^2}$。

证明：在时间范围 $[t,t+h)$ 内对损失的定义为：

$$\Delta X^{\Pi}(t):=X^{\Pi}(t)e^{rh}-X^{\Pi}(t+h).\tag{3.2}$$

接下来通过定义财富过程的贴现函数计算损失，令 $f\left(s,X^{\Pi}(s)\right)=e^{-rs}X^{\Pi}(s)$，对其应用 $It\hat{o}$ 公式可得：

$$
\begin{aligned}
de^{-rs}X^{\Pi}(s)&=\frac{\partial f\left(s,X^{\Pi}(s)\right)}{\partial s}ds+\frac{\partial f\left(s,X^{\Pi}(s)\right)}{\partial X^{\Pi}(s)}dX^{\Pi}(s)\\
&=-re^{-rs}X^{\Pi}(s)ds+e^{-rs}dX^{\Pi}(s)\\
&=e^{-rs}\left[-rX^{\Pi}(s)ds+dX^{\Pi}(s)\right]\\
&=e^{-rs}d\tilde{X}^{\Pi}(s),
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

其中 $\tilde{X}^{\Pi}(s)=-rX^{\Pi}(s)ds+dX^{\Pi}(s)$。

对式(3.3)两边同时积分，

$$\int_t^{t+h}de^{-rs}X^{\Pi}(s)=\int_t^{t+h}e^{-rs}d\tilde{X}^{\Pi}(s),$$

化简得到

$$
\begin{aligned}
X^{\Pi}(t+h)&=e^{rh}X^{\Pi}(t)+\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}d\tilde{X}^{\Pi}(s)\\
&=e^{rh}X^{\Pi}(t)+\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}\left[-rX^{\Pi}(s)ds+dX^{\Pi}(s)\right],
\end{aligned}
$$

将财富过程带入上式可得到 $-\Delta X^{\Pi}(t)$ 为：

$$
\begin{aligned}
-\Delta X^{\Pi}(t)=&\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-H(t))(1-\Delta)\delta\right]ds\\
&+\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}[\pi_s(t)\sigma dW(s)-\pi_p(t)\zeta dM^p(s)].
\end{aligned}
$$

通过上面的计算推导出了在时间范围 $[t,t+h)$ 内的损失情况，在给定的概率水平 $\alpha\in(0,1)$ 下，根据 VaR 的定义，下面分别计算违约前后的 VaR：

- 违约后的情况：

$$
\begin{aligned}
&P\left(-\Delta X^{\Pi}(t)\le \mathrm{L}\middle|\mathcal{G}_t\right)\\
&=P\left(\pi_s(t)\sigma\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}dW(s)\le L-\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)\middle|\mathcal{G}_t\right)\\
&=P\left(\frac{\pi_s(t)\sigma\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}dW(s)}{A^{\Pi}(t)}\le\frac{L-\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)}{A^{\Pi}(t)}\middle|\mathcal{G}_t\right)\\
&=\Phi\left(\frac{L-\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)}{A^{\Pi}(t)}\right),
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布。最后一个等式成立是因为 $\pi_s(t)\sigma\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}dW(s)$ 服从均值为 0，方差为 $\frac{e^{2rh}-1}{2r}\pi_s^2(t)\sigma^2$ 的正态分布。

因此 $P\left(-\Delta X^{\Pi}(t)\le L\middle|\mathcal{F}_t\right)<\alpha$，即为 $\Phi\left(\frac{L-\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)}{A^{\Pi}(t)}\right)\le\alpha$，进而可以推导出

$$
L\le\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)+\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t),
$$

根据 VaR 的定义可得

$$
VaR_t^{\alpha,h}=\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)\right]^+,
$$

则违约后 VaR 的上边界在任何时候都服从恒定水平 $R>0$ 的约束是：

$$
\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)\right]^+\le R. \tag{3.4}
$$

- 违约前的情况：

$$
\begin{aligned}
&P\left(-\Delta X^{\Pi}(t)\le L\middle|\mathcal{G}_t\right)\\
&=P\left(\pi_s(t)\sigma\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}dW(s)\le L-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]\right.\\
&\left.+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)\middle|\mathcal{G}_t\right)\\
&=P\left(\frac{\pi_s(t)\sigma\int_t^{t+h}e^{r(t+h-s)}dW(s)}{A^{\Pi}(t)}\right.
\end{aligned}
$$

$$\leq \left. \frac{L-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)}{A^{\Pi}(t)} \right| \mathcal{G}_t \Bigg)$$

$$=\Phi\left(\frac{L-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)}{A^{\Pi}(t)}\right),$$

同理，根据 VaR 的定义可得

$$VaR_t^{\alpha,h}=\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)\right]^+,$$

则违约前 VaR 的上边界在任何时候都服从恒定水平 $R>0$ 的约束是：

$$\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)\right]^+\leq R. \tag{3.5}$$

4. 动态 VaR 约束下的最优投资策略

在本节中，使用随机控制的方法，首先根据 HJB 方程推导出无风险约束问题的最优解，然后对问题添加动态 VaR 约束证明解的存在性及最优解满足的等式关系，最后对其进行验证。当时间 $t\in[0,T]$ 时，定义 CRRA 效用函数有以下形式：

$$U\left(X^{\Pi}(T)\right)=\frac{\left(X^{\Pi}(T)\right)^{\beta}}{\beta},0<\beta<1. \tag{4.1}$$

投资者的目标是选择投资策略使得终端财富 $X^{\Pi}(T)$ 的期望效用最大化，对于任何可行策略 $\Pi=\left\{\pi_0(t),\pi_s(t),\pi_p(t)\right\}$，优化问题的值函数为：

$$J^{\Pi}(t,x,z)=\sup E\left[U\left(X^{\Pi}(T)\right)\middle|X(t)=x,H(t)=z\right]. \tag{4.2}$$

因此，值函数对应的最优问题是：

$$J(t,x,z)=\sup_{\pi\in\Pi}J^{\pi}(t,x,z), \tag{4.3}$$

其中边界条件为 $J(t,x,z)=U(x)$，投资者的目标是寻找最优策略 Π^* 使 $J(t,x,z)=J^{\Pi^*}(t,x,z)$。

下面将定义一个算子，在定义算子前给出违约前 $z=0$ 和违约后 $z=1$ 的值函数：

$$J(t,x,z)=\begin{cases}J(t,x,0), & z=0;\\ J(t,x,1), & z=1.\end{cases} \tag{4.4}$$

那么违约前和违约后的算子分别定义为：

$$\mathcal{L}^{\Pi}J(t,x,z):=\begin{cases}J_t(t,x,0)+\left[rx+\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]J_x(t,x,0) & \\ +\frac{1}{2}\pi_s^2(t)\sigma^2J_{xx}(t,x,0)+h^p\left[J\left(t,x-\pi_p(t)\zeta,1\right)-J(t,x,0)\right], & z=0;\\ J_t(t,x,1)+\left[rx+\pi_s(t)(\mu-r)\right]J_x(t,x,1)+\frac{1}{2}\pi_s^2(t)\sigma^2J_{xx}(t,x,1), & z=1.\end{cases} \tag{4.5}$$

4.1. 验证定理

借助于动态规划原理和条件，分别得到了违约前和违约后满足的验证定理。

定理 4.1.1 对于违约后情况，即 $z=1$，对于任意固定 $(t,x,1)\in[\tau\wedge T,T]\times\mathbb{R}$，定义 $\Pi^*=(\pi_s^*,\pi_p^*)$ 作为下面最优约束问题的解：

$$\begin{aligned}&\inf\left\{-\mathcal{L}^{\Pi}J(t,x,1)\right\},\\ &\text{s.t.}\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)\right]^+\le R.\end{aligned}\tag{4.6}$$

为了将其转化为不带约束条件的问题，定义拉格朗日函数为：

$$L(\Pi,\lambda)=-\mathcal{L}^{\Pi}J(t,x,1)+\lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)-R\right],$$

拉格朗日对偶问题为：

$$\sup_{\lambda\ge0}\inf_{\Pi}L(\Pi,\lambda).$$

当且仅当 (Π^*,λ^*) 满足下面条件时，Π^* 才是约束问题的最优解，

$$\begin{cases}(\mu-r)J_x(t,x,1)+\pi_s(t)\sigma^2J_{xx}(t,x,1)-\lambda\left[-\dfrac{e^{rh}-1}{r}(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\dfrac{e^{2rh}-1}{2r}\sigma^2}\right]=0,\\ -\dfrac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)-R\le0,\\ \lambda\left[-\dfrac{e^{rh}-1}{r}\pi_s(t)(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)-R\right]=0,\\ \lambda\ge0.\end{cases}\tag{4.7}$$

定理 4.1.2 对于违约前情况，即 $z=0$，对于任意固定 $(t,x,0)\in[0,\tau\wedge T]\times\mathbb{R}$，定义 $\Pi^*=(\pi_s^*,\pi_p^*)$ 作为下面最优约束问题的解：

$$\begin{aligned}&\inf\left\{-\mathcal{L}^{\Pi}J(t,x,0)\right\},\\ &\text{s.t.}\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta\,dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)\right]^+\le R.\end{aligned}\tag{4.8}$$

对应拉格朗日函数为：

$$\begin{aligned}L(\Pi,\lambda)=&-\mathcal{L}^{\Pi}J(t,x,0)\\ &+\lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta\,dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)-R\right],\end{aligned}$$

拉格朗日对偶问题为：

$$\sup_{\lambda\ge0}\inf_{\Pi}L(\Pi,\lambda).$$

当且仅当 (Π^*,λ^*) 满足下面条件时，Π^* 才是约束问题的最优解，

$$\begin{cases}\lambda \geq 0. \\ (\mu-r)J_x(t,x,0)+\pi_s(t)\sigma^2 J_{xx}(t,x,0)-\lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{2rh}-1}{2r}\sigma^2}\right]=0, \\ (1-\Delta)\delta J_t(t,x,0)+h^p J_{\pi_p(t)}(t,x,0)(-\zeta)-\lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}(1-\Delta)\delta+\zeta\left(1-h^p\right)h\right]=0, \\ -\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)-R\leq 0, \\ \lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)-R\right]=0,\end{cases} \tag{4.9}$$

证明：由于违约前和违约后的证明过程相似，这里只证明更加复杂的违约前的情况。为了求解约束最优问题首先定义拉格朗日对偶函数，

$$g(\lambda):=\inf_{\Pi} L(\Pi,\lambda).$$

该函数表示在给定拉格朗日乘子 λ 的情况下，通过遍历可行策略 Π 找到拉格朗日函数 $L(\Pi,\lambda)$ 的下界。然后定义拉格朗日对偶问题：

$$\sup_{\lambda\geq 0} g(\lambda).$$

将原问题(4.8)的目标函数以及不等式约束定义为：

$$F(\Pi):=\inf\left\{-\mathcal{L}^{\Pi}J(t,x,0)\right\},$$

$$G(\Pi):=-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\right]+\int_t^{t+h}\pi_p(s)\zeta dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)-R.$$

下面分别计算 $F(\Pi),G(\Pi)$ 关于 π_s,π_p 的 Hessian 矩阵，

$$F_H=\begin{bmatrix}-\sigma^2 J_{xx}(t,x,0) & 0 \\ 0 & -h^p J_{\pi_p\pi_p}\left(t,x-\pi_p\zeta,0\right)\end{bmatrix},\ G_H=\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

根据效用函数的形式可以知道 $-\sigma^2 J_{xx}(t,x,0)>0,-h^p J_{\pi_p\pi_p}\left(t,x-\pi_p\zeta,0\right)>0$，因此 F_H 是半正定矩阵，而 G_H 对应行列式的值为 0，所以 $G(\Pi)$ 既不是凸的也不是凹的，选择投资策 $\pi_s=0$， $\pi_p=0$，那么 $G_H((0,0))=-R<0$，也就是，可以找到一个可行的点，使得不等式约束严格成立，因此改进的 Slater's 条件得到满足。因此强对偶性成立，那么任意一对原问题最优解和对偶问题最优解必须满足 KKT 条件，即条件(4.9)。

4.2. 违约前和违约后的最优投资策略

前一节证明了约束投资问题最优解的存在性以及满足的条件，接下来将分别推导出违约前和违约后的最优投资策略，定理 4.2.1 描述的是违约后最优投资策略及其相关的值函数。

定理 4.2.1 对于违约后的情况，即 $z=1$，对于任意 $t\in[\tau\wedge T,T]$，则具有 CRRA 偏好的投资者的最优投资策略为：

若 $\lambda=0$，那么 VaR 约束将没有约束作用，那么最优策略为：

$$\pi_s^*(t)=-\frac{(\mu-r)J_x(t,x,1)}{\sigma^2 J_{xx}(t,x,1)},\pi_p^*(t)=0. \tag{4.10}$$

若 $\lambda > 0$，VaR 约束起作用，那么最优投资策略满足：

$$\begin{aligned}
&\pi_s^*(t) = \frac{R}{-\frac{e^{rh}-1}{r}(\mu - r) - \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{2rh}-1}{2r}\sigma^2}}, \\
&\pi_p^*(t) = 0, \\
&\lambda^* = \frac{(\mu - r)J_x(t,x,1) + \pi_s^* \sigma^2 J_{xx}(t,x,1)}{-\frac{e^{rh}-1}{r}(\mu - r) - \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{2rh}-1}{2r}\sigma^2}},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中 $\mathcal{L}^{\Pi^*} J(t,x,1) = 0$，违约后的值函数形式为：

$$J(t,x,1) = \frac{x^\beta}{\beta} g(t), 0 < \beta < 1, \tag{4.12}$$

其中

$$g(t) = \exp\left\{\left[r\beta + \frac{\beta}{2(1-\beta)}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right](T - t)\right\}.$$

这个定理的证明类似于定理 4.2.2 的证明，在此省略。

定理 4.2.2 对于违约前的情况，即 $z = 0$，对于任意 $t \in [0, \tau \wedge T]$，则具有 CRRA 偏好的投资者的最优投资策略为：

若 $\lambda = 0$，那么 VaR 约束将没有约束作用，那么最优策略为：

$$\begin{aligned}
&\pi_s^*(t) = -\frac{(\mu - r)J_x(t,x,0)}{\sigma^2 J_{xx}(t,x,0)}, \\
&\pi_p^*(t) = \frac{x - B(t,x)^{\frac{1}{\beta-1}}}{\zeta},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 $B(t,x) = \frac{(1-\Delta)\delta J_x(t,x,0)}{h^p \zeta}$ 。

若 $\lambda > 0$，VaR 约束起作用，那么最优投资策略满足：

$$\begin{cases}
(\mu - r)J_t(t,x,0) + \pi_s^*(t)\sigma^2 J_{xx}(t,x,0) - \lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}(\mu - r) - \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{2rh}-1}{2r}\sigma^2}\right] = 0, \\
(1-\Delta)\delta J_t(t,x,0) + h^p J_{\pi_p^*(t)}(t,x,0) - \lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}(1-\Delta)\delta + \zeta(1-h^p)h\right] = 0, \\
-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s^*(t)(\mu - r) + \pi_p^*(t)(1-\Delta)\right] + \int_t^{t+h} \pi_p^*(s)\zeta dM^p(s) - \Phi^{-1}(\alpha)A^\Pi(t) - R = 0,
\end{cases} \tag{4.14}$$

其中 $\mathcal{L}^{\Pi^*} J(t,x,0) = 0$，违约后的值函数形式为：

$$J(t,x,0) = \frac{x^\beta}{\beta} h(t), 0 < \beta < 1, \tag{4.15}$$

其中 $h(t)$ 满足下面微分方程

$$\frac{x^{\beta}}{\beta}h_t(t)+\left[rx+\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]x^{\beta-1}h(t)$$
$$+\frac{1}{2}\pi_s^2(t)\sigma^2(\beta-1)x^{\beta-2}h(t)+h^p\left[\frac{\left(x-\pi_p(t)\zeta\right)^{\beta}}{\beta}g(t)-\frac{x^{\beta}}{\beta}h(t)\right]=0.$$

证明：当时 $\lambda=0$，那么问题即为无约束优化问题，由(4.5)定义的算子可以写出相应的 HJB 方程：

$$J_t(t,x,0)+\sup\left\{\begin{array}{l}\left[rx+\pi_s(t)(\mu-r)+\pi_p(t)(1-\Delta)\delta\right]J_x(t,x,0)\\+\frac{1}{2}\pi_s^2(t)\sigma^2J_{xx}(t,x,0)+h^p\left[J\left(t,x-\pi_p(t)\zeta,1\right)-J(t,x,0)\right]\end{array}\right\}=0. \tag{4.16}$$

根据 Jia 等人[21]的猜想，构造违约前值函数的形式为：

$$J(t,x,0)=\frac{x^{\beta}}{\beta}h(t),0<\beta<1. \tag{4.17}$$

将值函数带入 HJB 方程后分别对 π_s 和 π_p 求偏导可得到最优投资策略：

$$\begin{aligned}\pi_s^*(t)&=-\frac{(\mu-r)J_x(t,x,0)}{\sigma^2J_{xx}(t,x,0)},\\ \pi_p^*(t)&=\frac{x-B(t,x)^{\frac{1}{\beta-1}}}{\zeta},\end{aligned} \tag{4.18}$$

其中 $B(t,x)=\dfrac{(1-\Delta)\delta J_x(t,x,0)}{h^p\zeta}$。

将最优投资策略带回到 HJB 方程中得到关于 $h(t)$ 的微分方程：

$$\begin{aligned}&\frac{x^{\beta}}{\beta}h_t(t)+\left[rx+\pi_s^*(t)(\mu-r)+\pi_p^*(t)(1-\Delta)\delta\right]x^{\beta-1}h(t)\\&+\frac{1}{2}\left[\pi_s^*(t)\right]^2\sigma^2(\beta-1)x^{\beta-2}h(t)+h^p\left[\frac{\left(x-\pi_p^*(t)\zeta\right)^{\beta}}{\beta}g(t)-\frac{x^{\beta}}{\beta}h(t)\right]=0,\end{aligned} \tag{4.19}$$

其中 $J_x(t,x,0)=x^{\beta-1}h(t)$， $J_{xx}(t,x,0)=(\beta-1)x^{\beta-2}h(t)$。

当 $\lambda>0$ 时，那么问题为动态 VaR 约束下的优化问题，根据定理可以知道最优策略满足 KKT 条件：

$$\begin{cases}(\mu-r)J_t(t,x,0)+\pi_s^*(t)\sigma^2J_{xx}(t,x,0)-\lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}(\mu-r)-\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{\frac{e^{2rh}-1}{2r}\sigma^2}\right]=0,\\(1-\Delta)\delta J_t(t,x,0)+h^pJ_{\pi_p^*(t)}(t,x,0)-\lambda\left[-\frac{e^{rh}-1}{r}(1-\Delta)\delta+\zeta\left(1-h^p\right)h\right]=0,\\-\frac{e^{rh}-1}{r}\left[\pi_s^*(t)(\mu-r)+\pi_p^*(t)(1-\Delta)\right]+\int_t^{t+h}\pi_p^*(s)\zeta dM^p(s)-\Phi^{-1}(\alpha)A^{\Pi}(t)-R=0,\end{cases} \tag{4.20}$$

其中 $J(t,x,0)$ 满足 HJB 方程(4.16)，结合(4.18)和(4.20)，获得了无约束和有约束两种情况下的最优投资策略。

定理 4.2.1 描述的是违约后投资者的最优策略。对于违约后的情况，此时违约已经发生了，债券的价值变成了 0，投资者对于债券的投资金额从违约的那一刻起变成了。此定理给出了无约束和有约束两种

情况下的最优投资组合，可以看出，无约束的最优策略主要取决于金融市场的参数，动态 VaR 约束下的最优策略不仅取决于金融市场的参数还取决于风险价值的参数。

定理 4.2.2 描述的是违约前投资者的最优策略。对于违约前的情况，此时违约还未发生，因此投资者不仅可以选择股票来投资还可以选择可违约债券。若无风险约束，最优投资策略可以很容易获得，若对财富过程添加动态 VaR 约束，可以得到最优策略满足的关系式。

5. 数值分析

在本节中，通过数值分析说明了不同参数对最优策略的影响。除非另有说明，否则基本参数设置如下所示：$h^p = 0.005$，$h^q = 0.02$，$T = 12$，$x_0 = 1$，$\sigma = 0.3$，$\zeta = \dfrac{\delta}{h^q}$，$\theta = 0.2$，$r = 0.03$，$R = 0.3$，$\mu = 0.1$。

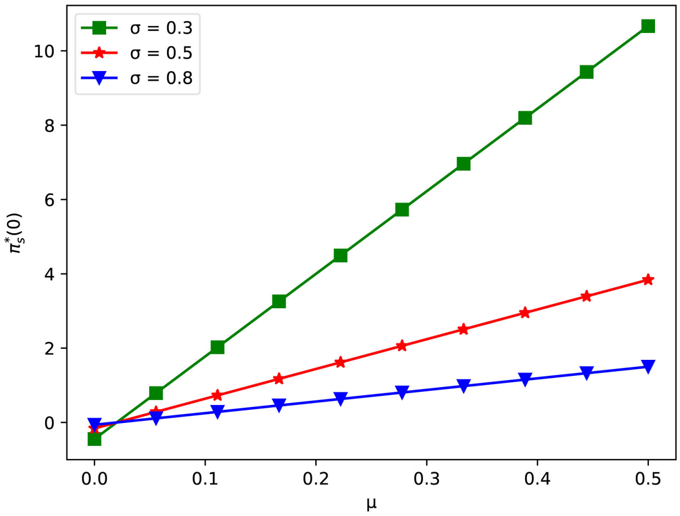

Figure 1. Effect of σ on $\pi_s^*(0)$

图 1. 参数 σ 对 $\pi_s^*(0)$ 的影响

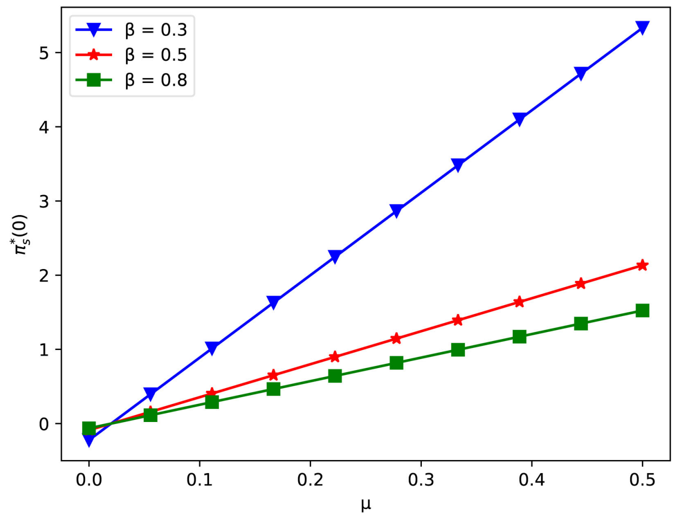

Figure 2. Effect of β on $\pi_s^*(0)$

图 2. 参数 β 对 $\pi_s^*(0)$ 的影响

图 1 显示了在无风险约束下参数 σ 对 $\pi_s^*(0)$ 的影响。当 σ 分别为 0.3、0.5 和 0.8 时，可以看到 $\pi_s^*(0)$ 是 μ 的一个线性递增函数。μ 是股票的均值回报率，随着股票的均值回报率提升，投资者期望获得更多的收益，因此对股票的投资就会增多。σ 表示的是股票价格的波动性，从图中可以看出，当波动性增加时，投资者会减少对股票的投资以寻求更低的风险。

图 2 说明了参数 β 对股票投资策略的影响。不难看出，股票的投资比例随着时间的推移而增加。β 体现的是投资者对收益的风险态度，不同的 β 对应的最优投资策略显著不同。随着参数 β 的减小，投资者对收益风险厌恶程度降低，对风险资产的投资比例就会增加。

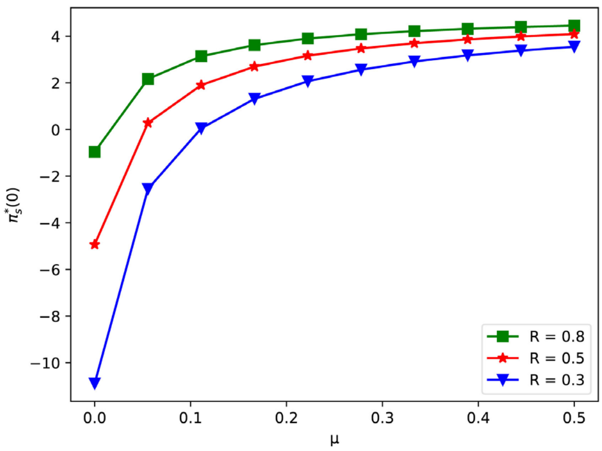

Figure 3. Effect of R on $\pi_s^*(0)$

图 3. 参数 R 对 $\pi_s^*(0)$ 的影响

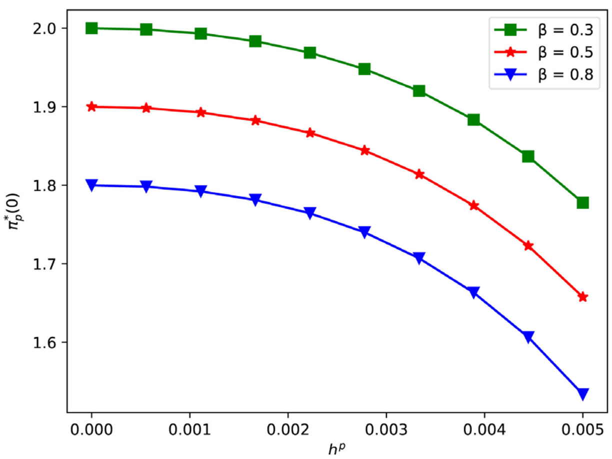

Figure 4. Effect of β on $\pi_p^*(0)$

图 4. 参数 β 对 $\pi_p^*(0)$ 的影响

为了说明风险约束对投资策略的影响，图 3 描述了在不同的约束程度下投资策略的变化情况。可以直观的看出随着约束力的增强，也就是 R 的减小，对于风险资产的投资比例逐渐下降。也就是说，当动态 VaR 约束对投资者有效时，风险投资策略将显著降低。这是因为 VaR 约束使投资者对风险更加保守。

h^p 表示在客观概率测度下债券的可违约强度，图 4 展示了违约未发生时，违约强度的变化对债券投

资策略的影响。当市场中债券的违约强度增加时，为了减少违约带来的风险，投资者会降低对债券的投资比例。同时，由于可违约债券是一种风险资产，因此随着 β 的减小，投资者同样会增加对债券的投资。

6. 结论

具有风险约束的期望效用最大化问题在纯扩散市场中得到了广泛的研究。本文将这个问题推广到跳跃－扩散的可违约金融市场中，利用动态规划原理得到了动态 VaR 约束下的最优投资策略满足的关系式。通过数值分析说明了参数对投资策略的影响。但是需要注意的是，当风险资产遵循一般的跳跃－扩散模型时，从数学上讲计算的难度和复杂性将大幅增加，这是未来值得研究的问题。

参考文献

[1] Markowitz, H.M. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

[2] Roy, A.D. (1952) Safety-First and the Holding of Assets. *Econometrics*, **20**, 431-449. https://doi.org/10.2307/1907413

[3] Fishburn, P.C. (1977) Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. *The American Economic Review*, **67**, 116-126.

[4] Merton, R.C. (1969) Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics*, **51**, 247-257. https://doi.org/10.2307/1926560

[5] Merton, R.C. (1971) Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Stochastic Optimization Models in Finance*, **3**, 373-413. https://doi.org/10.1016/0022-0531(71)90038-X

[6] Browne, S. (1995) Optimal Investment Policies for a Firm with a Random Risk Process: Exponential Utility and Minimizing the Probability of Ruin. *Mathematics of Operations Research*, **20**, 769-1022. https://doi.org/10.1287/moor.20.4.937

[7] Gao, J.W. (2009) Optimal Portfolios for DC Pension Plans under a CEV Model. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **44**, 479-490. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.01.005

[8] Cao, Y.S. and Wan, N.Q. (2009) Optimal Proportional Reinsurance and Investment Based on Hamilton-Jacobi-Bellman Equation. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **45**, 157-162. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.05.006

[9] Liang, Z.B., Yuen, K.C. and Guo, J.Y. (2011) Optimal Proportional Reinsurance and Investment in a Stock Market with Ornstein-Uhlenbeck Process. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **49**, 207-215. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2011.04.005

[10] Kraft, H. and Steffensen, M. (2013) A Dynamic Programming Approach to Constrained Portfolios. *European Journal of Operational Research*, **229**, 453-461. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.02.039

[11] Liang, X.Q. and Guo, J.Y. (2016) Optimal Investment, Consumption, and Life Insurance in an Incomplete Market. *Communications in Statistics*: *Theory and Methods*, **45**, 3884-3903. https://doi.org/10.1080/03610926.2014.911907

[12] Wang, N., Zhang, N., Jin, Z. and Qian, L.Y. (2021) Stochastic Differential Investment and Reinsurance Games with Nonlinear Risk Processes and VaR Constraints. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **96**, 168-184. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.11.004

[13] Zhou, K., Gao, J.J., Li, D. and Cui, X. (2017) Dynamic Mean-VaR Portfolio Selection in Continuous Time. *Quantitative Finance*, **17**, 1631-1643. https://doi.org/10.1080/14697688.2017.1298831

[14] Niu, Y.W. and Gao, J.J. (2016) Dynamic Mean-LPM Portfolio Optimization under the Mean-Reverting Market. 2016 *Chinese Control and Decision Conference* (*CCDC*), Yinchuan, 28-30 May 2016, 1108-1113. https://doi.org/10.1109/CCDC.2016.7531149

[15] Guan, G.H., Liang, Z.X. and Xia, Y. (2023) Optimal Management of DC Pension Fund under the Relative Performance Ratio and VaR Constraint. *European Journal of Operational Research*, **305**, 868-886. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.06.012

[16] Bi, J. and Cai, J. (2019) Optimal Investment-Reinsurance Strategies with State Dependent Risk Aversion and VaR Constraints in Correlated Markets. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **85**, 1-14. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2018.11.007

[17] Kramkov, D. and Schachermayer, W. (1999) The Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets. *Annals of Applied Probability*, **9**, 904-950. https://doi.org/10.1214/aoap/1029962818

[18] Michelbrink, D. and Le, H. (2012) A Martingale Approach to Optimal Portfolios with Jump-Diffusions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **50**, 583-599. https://doi.org/10.1137/100784412

[19] Junca, M. and Serrano, R. (2021) Utility Maximization in a Multidimensional Semimartingale Model with Nonlinear Wealth Dynamics. *Mathematics and Financial Economics*, **15**, 775-809. https://doi.org/10.1007/s11579-021-00296-z

[20] Bielecki, T.R. and Jang, I. (2006) Portfolio Optimization with a Defaultable Security. *Asia-Pacific Financial Markets*, **13**, 113-127. https://doi.org/10.1007/s10690-007-9037-x

[21] Jia, L.J., Pistorius, M. and Zheng, H. (2019) Dynamic Portfolio Optimization with Looping Contagion Risk. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, **10**, 1-36. https://doi.org/10.1137/17M1154424