Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(4), 1696-1708
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.134161

Hans汉斯

常矩阵耦合的热方程采样控制系统能控性

杨济通，刘汉兵

中国地质大学数学与物理学院，湖北 武汉

收稿日期：2024年3月27日；录用日期：2024年4月23日；发布日期：2024年4月30日

摘 要

本文研究由常矩阵耦合的热方程采样控制系统的零能控和近似能控问题，所考虑的是给定采样周期情况下系统的两种能控性。我们通过热方程的唯一延拓性，Kalman能控性秩条件和采样周期的选取对系统的能控性进行了刻画。提出在给定采样周期下此类系统近似能控的一个充要条件；并说明当控制施加在整体区域时，这一条件也是在给定采样周期下此类系统零能控的一个充要条件，而当控制只施加在局部区域时，此类系统对任意周期都不是零能控的。

关键词

采样控制，零能控，近似能控，采样周期

Controllability of the Sampled-Data Controlled System of Heat Equations Coupled by Constant Matrices

Jitong Yang, Hanbing Liu

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei

Received: Mar. 27th, 2024; accepted: Apr. 23rd, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

This paper studies the null controllability and approximate controllability for sampled-data controlled systems of heat equations coupled by constant matrices. We consider two types of controllability under a given sampled-data period and characterize the controllability of the system through the unique continuation property of the heat equation, the Kalman rank condition and the selection of the sampled-data period. We provide a necessary and sufficient condition for the approximate controllability of such systems under a given sampled-data period; and show that when the

文章引用: 杨济通, 刘汉兵. 常矩阵耦合的热方程采样控制系统能控性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(4): 1696-1708.
DOI: 10.12677/aam.2024.134161

control domain is equal to the entire space, this condition is also a necessary and sufficient condition for the null controllability of such systems under a given sampled-data period. However, when the control domain is a proper subset of the entire space, such systems are not null controllable for any period.

Keywords

Sampled-Data Controlled, Null Controllability, Approximate Controllability, Sampled-Data Period

1. 引言

本文的目标是研究关于一类常矩阵耦合的热方程采样控制系统的能控性，并分别提出此类系统的 $T-$零能控与 $T-$近似能控的充要条件，以及研究条件的适用范围。

在现有的研究文献中，连续时间控制系统及其时间离散化系统的能控性问题已取得诸多理论成果。如郭戈等[1]针对周期性系统(包括连续和离散两种情形)的能控性问题。对已有文献中有关周期为 T 的连续周期性系统的能控性结论进行了完善，推导出系统能控等价于单周期内能控的结论，并将这些结论直接推广到离散周期性系统；进一步探讨了离散前后周期性系统能控性保持不变的可能性[2]，证明在采用某种不等间距采样方式时，离散前后周期性系统的能控性保持不变。杨磊等[3]用循环不变子空间的性质研究了线性切换系统的能控性和能观性。得到线性周期切换系统完全能控和完全能观测的充分必要条件，进一步给出了一般线性切换系统完全能控和完全能观测的充分条件和必要条件。王俭等[4]就离散时间系统保持能控性与能观性的充分条件的物理意义，论证了该充分条件实质上就是信号可重构的临界条件，同时说明该充分条件实际上也是必要条件，在两个概念之间建立起类似于等价的联系。随着数字控制器以及计算机的发展，因为大多数控制都是通过数字技术在系统中实现的，这激发了对具有非连续控制的连续时间系统的研究。其中控制只在有限个时刻取到不为零的值的被称为脉冲控制，而控制在作用时间内取分段常值且只进行有限次变化的被称为采样控制[5]。有关热方程脉冲控制的能控性问题，Qin S.等[6]对 Liu X.等[7]关于实现常微脉冲控制系统能控性的最小控制个数问题进行了完善，并得到了具有脉冲控制的热方程连续时间系统近似能控的一个充要条件。Wang L.等[8]研究了含实矩阵的热方程的约束近似零能控性，分别给出控制作用于系统全局和局部两种情况下系统是全局约束近似零能控的条件。而对于热方程采样控制系统的能控性研究，Wang G.等[9]对有界域中热方程的采样周期最优时间和最优控制关于采样间隔做了上下界的误差分析，给出了一种具有一致代价的 L^2-近似零能控性。在此基础上设计了具有采样数据控制的热方程的时间最优控制，用来近似具有分布式控制的热方程的时间最优控制问题并证明其某种意义上的最优性。Lin P.等[10]中给出了一类具有时不变控制热方程的能观不等式和有一致代价的部分近似零能控性，并由此进一步建立了使有界域中采样控制的热方程稳定的输出反馈律。

与以往采样控制系统能控性有关的研究相比，本文所考虑的是关于热方程组的能控性问题，我们借鉴了 Qin S.等[6]关于系统能控性的一些想法。在本文中我们对由一对常矩阵 (A,B) 耦合的热方程采样控制系统进行了研究，定义了两种与采样周期 T 有关的能控性，结合热方程的唯一延拓性得出了关于系统能控性的两个主要结论。

2. 问题描述与主要结论

2.1. 问题介绍

为介绍本文研究的采样控制系统，这里我们先给出一些必要的定义和符号说明。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N\left(N\in\mathbb{N}^+=\{1,2,\cdots\}\right)$ 是一具有 C^2 边界 $\partial\Omega$ 的有界域，$\omega\subset\Omega$ 是一非空开子集，其特征函数为 χ_ω，ϖ 表示 ω 在 $\mathbb{R}^N$ 中的闭包，A 和 B 分别是 $n\times n$ 和 $n\times m$ 实矩阵，视为从 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性算子，$\Delta_n=diag\{\Delta,\cdots,\Delta\}$，$\Delta$ 为拉普拉斯算子。

定义 $\mathcal{A}=\Delta_n-A$，$D(\mathcal{A})=H^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\cap H_0^1\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，即对任意 $z\in D(\mathcal{A})$，$\mathcal{A}z=\Delta_n z-Az$，可以得出 $\mathcal{A}$ 在 $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 上生成了一个 C_0 半群 $\left\{e^{\mathcal{A}t}\right\}_{t\geq0}$。

本文考虑如下热方程采样控制系统的零能控与近似能控问题：

$$\begin{cases}\partial_t y(t)-\mathcal{A}y(t)=\chi_\omega B\sum\limits_{k=1}^{p}\chi_{[(k-1)T,kT)}(t)u_k, & \text{在 } \Omega\times\mathbb{R}^+ \text{ 中},\\ y(0)=y_0.\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $\chi_{[(k-1)T,kT)}(t)$ 表示区间 $\left[(k-1)T,kT\right)$ 上的特征函数，$\{kT\}_{k=1}^p\left(p\in\mathbb{N}^+\right)$ 被称为采样时刻，$T>0(T\in\mathbb{R})$ 被称为采样周期，$\{u_k\}_{k=1}^p\subseteq L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ 被称为采样控制，容易得出方程(2.1)是适定的。记 $y\left(\cdot;y_0,\{u_k\}_{k=1}^p\right)$ 为方程(2.1)的解，即

$$y\left(t;y_0,\{u_k\}_{k=1}^p\right)=e^{\mathcal{A}t}y_0+\sum_{k=1}^{p}\int_{(k-1)T}^{kT}e^{\mathcal{A}(t-\tau)}d\tau\chi_\omega Bu_k,t\geq0.\tag{2.2}$$

在本文中记 $\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 上的范数和内积，$\sigma(A)$ 和 $\sigma(\Delta_n)$ 分别表示所有 A 和 Δ_n 的特征值的集合，A^*，B^* 和 $\mathcal{A}^*$ 分别代表 A，B 和 $\mathcal{A}$ 的伴随算子。

本文所考虑关于系统(2.1)的零能控与近似能控定义如下：

定义 2.1

给定 $T>0$，若对任意 $y_0\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，存在 $p\in\mathbb{N}^+$，和 $\{u_k\}_{k=1}^p\subseteq L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ 使得

$$y\left(pT;y_0,\{u_k\}_{k=1}^p\right)=0.\tag{2.3}$$

则称系统(2.1)是 T-零能控的。

定义 2.2

给定 $T>0$，若对任意 $\varepsilon>0$，$y_0,y_1\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，存在 $p\in\mathbb{N}^+$ 和 $\{u_k\}_{k=1}^p\subseteq L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ 使得

$$\left\|y\left(pT;y_0,\{u_k\}_{k=1}^p\right)-y_1\right\|\leq\varepsilon.\tag{2.4}$$

则称系统(2.1)是 T-近似能控的。

定义 2.3

对给定 $n\times n$ 实矩阵 A，假设有 q $\left(q\in\mathbb{N}^+\right)$ 个互不相同的特征值 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q$，若 T 对满足

$$\mathrm{Re}\left[\beta_i-\beta_j\right]=0\text{，对任意 } i,j=1,2,\cdots,q$$

的 A 的特征值成立

$$T\neq\frac{2l\pi}{\mathrm{Im}\left(\beta_i-\beta_j\right)},l=\pm1,\pm2,\cdots\tag{2.5}$$

则称采样周期 T 是非病态的，反之称采样周期 T 是病态的。

定义 2.4

对给定 $n\times n$ 实矩阵 A，定义如下集合 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$：

$$\mathcal{T}_1 := \left\{T \mid \int_0^T \mathrm{e}^{(\lambda_i-\beta_j)\tau}\mathrm{d}\tau = 0, \exists i\in\mathbb{N}^+, j\in\{1,\cdots,q\}, \lambda_i\in\sigma(\Delta_n), \beta_j\in\sigma(A)\right\}. \tag{2.6}$$

$$\mathcal{T}_2 := \left\{T \mid \int_0^T \mathrm{e}^{(\lambda_i-\beta_j)\tau}\mathrm{d}\tau \neq 0, \forall i\in\mathbb{N}^+, j\in\{1,\cdots,q\}, \lambda_i\in\sigma(\Delta_n), \beta_j\in\sigma(A)\right\}. \tag{2.7}$$

易知若采样周期 T 是非病态的，则 $T\in\mathcal{T}_2$。

2.2. 主要结论

本文的主要结论阐述为以下两个定理。

定理 2.1

(i) 当 $\Omega\setminus\varpi\neq\varnothing$ 时，对于任意采样周期 T，系统(2.1)不是 T-零能控的。

(ii) $\omega=\Omega$ 时，系统(2.1)是 T-零能控的当且仅当 $T\in\mathcal{T}_2$ 且 $rank\left(B,\mathrm{e}^{AT}B,\cdots,\mathrm{e}^{A(n-1)T}B\right)=n$。

定理 2.2

系统(2.1)是 T-近似能控的当且仅当 $T\in\mathcal{T}_2$ 且 $rank\left(B,\mathrm{e}^{AT}B,\cdots,\mathrm{e}^{A(n-1)T}B\right)=n$。

推论 2.3

(i) $\omega=\Omega$ 时，若 T 非病态且 $rank\left(B,AB,\cdots,A^{n-1}B\right)=n$，则系统(2.1)是 T-零能控的。

(ii) 若 T 非病态且 $rank\left(B,AB,\cdots,A^{n-1}B\right)=n$，则系统(2.1)是 T-近似能控的。

3. 定理 2.1 的证明

下面我们先给出几个证明定理 2.1 所需要的引理，引理 3.1 和引理 3.2 的证明过程分别参见文献[6]的定理 3.2 和引理 4.3。

引理 3.1 设 ω_1 是 Ω 的非空开子集，V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，则以下两条结论成立：

(i) 若 $z\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 且 $t>0$，$z(x)\in V$ 对几乎处处的 $x\in\Omega \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\Delta_n t}z(x)\in V$ 对于所有 $x\in\omega_1$。

(ii) 若 $z\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 且 $t>0$，则 $\chi_{\omega_1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}t}z=0$ 当且仅当 $z=0$。

引理 3.2 设 (A,B) 满足 $rank\left(B,AB,\cdots,A^{n-1}B\right)<n$。则存在 $z\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 使得 $\chi_\omega B^*\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*t}z=0$ 对于任意 $t>0$。

引理 3.3 对任意 $t\geq 0$ 有以下等式成立

$$\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*t}=\mathrm{e}^{-A^*t}\mathrm{e}^{\Delta_n t}.$$

因为引理 3.3 的证明要点是 Δ_n 和 A^* 的交换性，方便起见将这部分放在了引理 3.5 的证明中，这里省略了具体证明。

引理 3.4 对任意 $t>0$，$T\in\mathcal{T}_2$ 则有以下两结论成立：

(i) 对于任意的 $\overline{y}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，存在唯一 $\hat{y}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 使得

$$\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\,\hat{y}=\mathrm{e}^{\mathcal{A}t}\overline{y}.$$

(ii) 对于任意的 $\overline{y}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，存在唯一 $\hat{y}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 使得

$$\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\,\hat{y}=\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*t}\overline{y}.$$

引理 3.4 的证明：(i) 首先我们先证明对于任意的 $\overline{y}_1\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，$T\in T_2$，$t>0$，存在唯一

$\hat{y} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 使得

$$\int_0^T \mathrm{e}^{\Delta_n - A\tau} \mathrm{d}\tau \hat{y} = \mathrm{e}^{\Delta_n t} \overline{y}_1 \tag{3.1}$$

设 $\Psi_{kj} = \varphi_k e_j$，$e_j$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的单位向量，则 $\{\Psi_{ij}\}_{i\ge 1, 1\le j\le n}$ 是 $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 的一组正交基。对于任意的 $\overline{y}_1 \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 可将其表示为

$$\overline{y}_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \Psi_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{R}.$$

并且有 $\|\overline{y}_1\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^2\right)^{1/2}$。显然 $\hat{y} \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 是 (3.1) 的解等价于 $\hat{y}$ 可唯一表示为 $\hat{y} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\Psi_{kj}, a_{kj} \in \mathbb{R}$，其中 $k \in \mathbb{N}^+$，$1 \le j \le n$。满足

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} \int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_i \tau} \mathrm{e}^{-A\tau} \mathrm{d}\tau a_{ij} e_j \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i t} b_{ij} e_j \varphi_i(x). \tag{3.2}$$

且 $\|\hat{y}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2\right)^{1/2} < \infty$，其中 $\lambda_i \in \sigma(\Delta_n)$。用 b_i 表示 $(b_{i1},\cdots,b_{in})'$，则(3.1)有唯一解 $\hat{y}$ 等价于存在唯一 $\{\mathrm{a}_i\}_{i\in\mathbb{N}^+} \in L^2(\mathbb{N}^+;\mathbb{R}^n)$ 使得对每一 $i \in \mathbb{N}^+$ 有

$$\int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_i \tau} \mathrm{e}^{-A\tau} \mathrm{d}\tau \mathrm{a}_i = \mathrm{e}^{\lambda_i t} \mathrm{b}_i. \tag{3.3}$$

对任意 A 存在非奇异矩阵 P，使得 $\hat{A} = P^{-1}(A)P$ 是 A 的若当形式，用 $\beta_j, j = 1,2,\cdots,r$ 表示的 A 特征值，对每个 j，β_j 的代数重数记为 m_j，即

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix},$$

其中 J_j 是对角线为 β_j 的若当块 $j = 1,2,\cdots,r$。记 $\hat{\mathrm{a}}_i = P^{-1}\mathrm{a}_i$，$\hat{\mathrm{b}}_i = P^{-1}\mathrm{b}_i$。则存在唯一 $\{\mathrm{a}_i\}_{i\in\mathbb{N}^+} \in L^2(\mathbb{N}^+;\mathbb{R}^n)$ 满足(3.3)等价于存在唯一 $\{\hat{\mathrm{a}}_i\}_{i\in\mathbb{N}^+} \in L^2(\mathbb{N}^+;\mathbb{R}^n)$ 使得每一 $i \in \mathbb{N}^+$ 有

$$\int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_i \tau} \mathrm{e}^{-\hat{A}\tau} \mathrm{d}\tau \hat{\mathrm{a}}_i = \mathrm{e}^{\lambda_i t} \hat{\mathrm{b}}_i. \tag{3.4}$$

而矩阵 $\int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_i \tau} \mathrm{e}^{-\hat{A}\tau} \mathrm{d}\tau$ 是上三角形式，又 $T \in \mathcal{T}_2$，故矩阵对角线上元素 $\int_0^T \mathrm{e}^{(\lambda_i - \beta_j)\tau} \mathrm{d}\tau$ 非零，$j = 1,2,\cdots,r$。因此对每一 $i \in \mathbb{N}^+$，有

$$\det\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_i \tau} \mathrm{e}^{-\hat{A}\tau} \mathrm{d}\tau\right) = \prod_{j=1}^{r} \left(\int_0^T \mathrm{e}^{(\lambda_i - \beta_j)\tau} \mathrm{d}\tau\right)^{m_j} \neq 0. \tag{3.5}$$

这意味着矩阵 $\int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_i \tau} \mathrm{e}^{-\hat{A}\tau} \mathrm{d}\tau$ 可逆，由此可得对每一 $i \in \mathbb{N}^+$，存在唯一 $\hat{\mathrm{a}}_i$ 满足方程(3.4)，即

$$\hat{\mathrm{a}}_i = \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\lambda_i \tau} \mathrm{e}^{-\hat{A}\tau} \mathrm{d}\tau\right)^{-1} \mathrm{e}^{\lambda_i t} \hat{\mathrm{b}}_i. \tag{3.6}$$

接下来证明 $\|\hat{y}\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)} < \infty$，即存在常数 $C > 0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left\|P\hat{\mathrm{a}}_i\right\|_{\mathbb{R}^n}^2 \le C \sum_{i=1}^{+\infty} \left\|P\hat{\mathrm{b}}_i\right\|_{\mathbb{R}^n}^2. \tag{3.7}$$

这里$\|\hat{y}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}=\sum_{i=1}^{+\infty}\|P\hat{a}_i\|^2_{\mathbb{R}^n}$，$\|\overline{y}_1\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}=\sum_{i=1}^{+\infty}\|P\hat{b}_i\|^2_{\mathbb{R}^n}$。易知矩阵$\int_0^T e^{\lambda_i\tau}e^{-\hat{A}\tau}d\tau$的元素是$\int_0^T e^{(\lambda_i-\beta_j)\tau}d\tau$对于某些$j=\{1,2,\cdots,r\}$或者是$\frac{1}{k!}\int_0^T\tau^k e^{(\lambda_i-\beta_j)\tau}d\tau$对于某些$j=\{1,2,\cdots,r\}$，$k\in\{1,2,\cdots,\overline{m}-1\}$，其中$\overline{m}=\max\{m_j,j=1,2,\cdots,r\}$。存在与$i,j,k$无关的常数$C_1(\sigma(A),T)\geq 1$和$C_2(\sigma(A),T)\geq 1$使得对于所有$i\in\mathbb{N}^+$，$j=\{1,2,\cdots,r\}$，$k\in\{1,2,\cdots,\overline{m}-1\}$，

$$\frac{1}{k!}\int_0^T\tau^k e^{(\lambda_i-\beta_j)\tau}d\tau\leq C_1\int_0^T e^{(\lambda_i-\beta_j)\tau}d\tau\leq C_2\int_0^T e^{\lambda_i\tau}d\tau. \tag{3.8}$$

定义集合$O_i:=\{i\in\mathbb{N}^+,\lambda_i-\beta_j=0,\text{对某些 }j\in\{1,2,\cdots,r\}\}$。存在与$i,j,k$无关的常数$C_3(\sigma(A),T)\geq 1$，使得对于所有$i\in\mathbb{N}^+\setminus O_i$，$j=\{1,2,\cdots,r\}$，

$$\int_0^T e^{(\lambda_i-\beta_j)\tau}d\tau\geq C_3\int_0^T e^{\lambda_i\tau}d\tau. \tag{3.9}$$

用A_{jk}表示矩阵$\int_0^T e^{\lambda_i\tau}e^{-\hat{A}\tau}d\tau$的代数余子式。由(3.8)可知存在与$i,j,k$无关的常数$C_4\geq 1$，使得$A_{jk}\leq C_4\left(\int_0^T e^{\lambda_i\tau}d\tau\right)^{n-1}$，$1\leq j,k\leq n$。由(3.9)可知存在与$i$无关的常数$C_5\geq 1$，使得对于所有$i\in\mathbb{N}^+\setminus O_i$，$\det\left(\int_0^T e^{\lambda_i\tau}e^{\hat{A}\tau}d\tau\right)\geq C_5\left(\int_0^T e^{\lambda_i\tau}d\tau\right)^n$。因此对于所有$i\in\mathbb{N}^+\setminus O_i$，

$$\left\|\left(\int_0^T e^{\lambda_i\tau}e^{-\hat{A}\tau}d\tau\right)^{-1}\right\|\leq\left(\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{A_{jk}^2}{\left(\det\int_0^T e^{\lambda_i\tau}e^{-\hat{A}\tau}d\tau\right)^2}\right)^{1/2}\leq\frac{C_4 n}{C_5\int_0^T e^{\lambda_i\tau}d\tau}. \tag{3.10}$$

对于$i\in O_i$，可知存在与i无关的常数$C_6\geq 1$，使得$\det\left(\int_0^T e^{\lambda_i\tau}e^{-\hat{A}\tau}d\tau\right)\geq C_6\left(\int_0^T e^{\lambda_i\tau}d\tau\right)^{n-1}$，故对于$i\in O_i$，

$$\left\|\left(\int_0^T e^{\lambda_i\tau}e^{-\hat{A}\tau}d\tau\right)^{-1}\right\|\leq\frac{C_4 n}{C_6}. \tag{3.11}$$

综上，我们由(3.6)，(3.10)和(3.11)推得使不等式(3.7)成立只需取

$$C=\max\left\{\max_{i\in\mathbb{N}^+\setminus O_i}\frac{C_4 n e^{\lambda_i t}}{C_5\int_0^T e^{\lambda_i\tau}d\tau},\max_{i\in O_i}\frac{C_4 n e^{\lambda_i t}}{C_6}\right\}<\infty.$$

而不等式(3.7)成立意味着

$$\|\hat{y}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}\leq C\|P\|\|P^{-1}\|\|\overline{y}_1\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}<\infty. \tag{3.12}$$

由此得映射$\left(\int_0^T e^{\Lambda_n-A\tau}d\tau\right)^{-1}e^{\Lambda_n t}:\overline{y}_1\mapsto\hat{y}$在$L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$上有界，于是我们证明了存在唯一$\hat{y}$是(3.1)的解。又对于$t>0$，$e^{At}$可逆，故对任意$\overline{y}_1\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$，存在唯一$\overline{y}\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$使得

$$\overline{y}_1=e^{-At}\overline{y}.$$

结合(3.12)我们得到$\|\hat{y}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}\leq C\|P\|\|P^{-1}\|\|e^{-At}\overline{y}\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)}<\infty.$ 综上我们证明了引理 3.4 的(i)。

(ii) 同理可证引理 3.4 的(ii)成立。

引理 3.5 对任意$n\times n$矩阵A，$t>0$，$T\in\mathcal{T}_2$有下列等式成立

(i) $\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau e^{\mathcal{A}t} = e^{\mathcal{A}t}\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau$ 且 $e^{\mathcal{A}t}\left(\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\right)^{-1} = \left(\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\right)^{-1}e^{\mathcal{A}t}$。

(ii) $\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau e^{\mathcal{A}^*t} = e^{\mathcal{A}^*t}\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau$ 且 $e^{\mathcal{A}^*t}\left(\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau\right)^{-1} = \left(\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau\right)^{-1}e^{\mathcal{A}^*t}$。

引理 3.5 的证明：(i)由 $\mathcal{A}$ 的定义知 $\mathcal{A} = \Delta_n - A$，$\Delta_n = \Delta I_{n\times n}$，$I_{n\times n}$ 表示 n 阶单位阵。$\mathcal{A}$ 在 $L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 上生成了一个 C_0 半群 $\left\{e^{\mathcal{A}t}\right\}_{t\geq 0}$，$e^{\mathcal{A}t} = e^{\Delta_n t}e^{-At}$。于是对任意 $n\times n$ 矩阵 A，$z = \left(z_1,\cdots,z_n\right)^{\mathrm{T}} \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，有

$$e^{\Delta_n t}Az = \begin{pmatrix} e^{\Delta t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\Delta t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}e^{\Delta t}z_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}e^{\Delta t}z_n\end{pmatrix}.$$

$$Ae^{\Delta_n t}z = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\Delta t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\Delta t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}e^{\Delta t}z_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}e^{\Delta t}z_n\end{pmatrix}.$$

其中 $a_{ij}\left(i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,n\right)$ 表示 A 的元素，由此可得 $e^{-At}e^{\Delta_n t} = e^{\Delta_n t}e^{-At}$。故有

$$\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau e^{\mathcal{A}t} = \int_0^T e^{\Delta_n\tau}e^{-A\tau}d\tau e^{\Delta_n t}e^{-At} = e^{\Delta_n t}e^{-At}\int_0^T e^{\Delta_n\tau}e^{-A\tau}d\tau = e^{\mathcal{A}t}\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau.$$

有上述等式成立则有

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{A}t}\left(\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\right)^{-1} &= \left(\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\right)^{-1}\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau e^{\mathcal{A}t}\left(\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\right)^{-1} \\ &= \left(\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\right)^{-1}e^{\mathcal{A}t}\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\left(\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\right)^{-1} \\ &= \left(\int_0^T e^{\mathcal{A}\tau}d\tau\right)^{-1}e^{\mathcal{A}t}. \end{aligned}$$

(ii)与(i)同理可证，接下来我们依次证明定理 2.1 的(i)和(ii)。

证明：(i) 当 $\Omega\setminus\varpi\neq\varnothing$ 时，因为对任意 $T>0$ 或 $T\in\mathcal{T}_1$ 或 $T\in\mathcal{T}_2$，故第一步证明此时对任意 $T\in\mathcal{T}_1$ 系统(2.1)不是 T-零能控的，第二步证明此时对任意 $T\in\mathcal{T}_2$ 系统(2.1)也不是 T-零能控的。第一步，任取采样周期 $T\in\mathcal{T}_1$，故此时存在 $i\in\mathbb{N}^+$，$j\in\left(1,\cdots,r\right)$，使得

$$\int_0^T e^{\left(\lambda_i-\beta_j\right)\tau}d\tau = 0.$$

结合引理(3.5)可知对此时的 $i\in\mathbb{N}^+$，$j\in\left(1,\cdots,r\right)$

$$\det\left(\int_0^T e^{\lambda_i\tau}e^{-\hat{A}\tau}d\tau\right) = \prod_{j=1}^r\left(\int_0^T e^{\left(\lambda_i-\beta_j\right)\tau}d\tau\right)^{m_j} = 0.$$

这意味着存在 $\varphi'\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 使得

$$\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau\varphi' = 0.$$

这意味着存在 $\varphi\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 使得

$$\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\varphi = 0. \tag{3.13}$$

采用反证法，假设存在采样周期$T \in \mathcal{T}_1$使系统(2.1)是 T-零能控的。由定义 2.1 知，对于任意 $y_0 \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，存在 $p \in \mathbb{N}^+$，$\{u_k\}_{k=1}^p \subseteq L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ 使

$$y\left(pT; y_0, \{u_k\}_{k=1}^p\right) = \mathrm{e}^{\mathcal{A}pT} y_0 + \sum_{k=1}^{P} \mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-k)T} \int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k = 0.$$

于是与(3.13)一起有

$$\begin{aligned}&\left\langle \varphi, \mathrm{e}^{\mathcal{A}pT} y_0 + \sum_{k=1}^{P} \mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-k)T} \int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k \right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}^* pT}\varphi, y_0\right\rangle + \sum_{k=1}^{p}\left\langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*(p-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\varphi, \chi_\omega Bu_k\right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}^* pT}\varphi, y_0\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

由于 $y_0 \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 为任取的，这意味着 $\mathrm{e}^{\mathcal{A}^* pT}\varphi = 0$，再由引理 3.3 与热方程的倒向唯一性我们得 $\varphi = 0$，与 $\varphi \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 相矛盾，由此得出，当取采样周期$T \in \mathcal{T}_1$时，系统(2.1)不是 T-零能控的。注意到当取采样周期$T \in \mathcal{T}_1$，此时无论控制域ω是否是全空间Ω，系统(2.1)都不是 T-零能控的。

第二步，采用反证法，我们假设此时系统(2.1)对于某采样周期$T \in \mathcal{T}_2$是 T-零能控的。那么根据定义 2.1，任取 $y_0 \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$，存在 $p \in \mathbb{N}^+$，$\{u_k\}_{k=1}^p \subseteq L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ 使得

$$\begin{aligned}0 &= y\left(pT; y_0, \{u_k\}_{k=1}^p\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathcal{A}pT} y_0 + \sum_{k=1}^{p}\int_{(k-1)T}^{kT} \mathrm{e}^{\mathcal{A}(pT-\tau)}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k \\ &= \mathrm{e}^{\mathcal{A}pT} y_0 + \sum_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k \\ &= \mathrm{e}^{\mathcal{A}pT} y_0 + \sum_{k=1}^{p-1} \mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k + \int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_P \\ &= \int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\left[\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}T}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1)T}y_0 + \sum_{k=1}^{p-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k\right) + \chi_\omega Bu_p\right].\end{aligned}$$

结合引理 3.4，其中

$$\overline{y} = 0, \hat{y} = \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}T}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1)T}y_0 + \sum_{k=1}^{p-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k\right) + \chi_\omega Bu_p.$$

可得

$$\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}T}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1)T}y_0 + \sum_{k=1}^{p-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k\right) + \chi_\omega Bu_p = 0.$$

因$\Omega\setminus\overline{\omega} \neq \varnothing$，存在 $B_r\left(x_0\right) \subset \Omega$ 使得

$$B_r\left(x_0\right) \subset \Omega\setminus\overline{\omega}. \tag{3.14}$$

这里 $B_r\left(x_0\right)$ 表示在 $\mathbb{R}^N$ 上以 x_0 为中心以 $r > 0$ 为半径的邻域，这意味着在 $B_r\left(x_0\right)$ 上 $\chi_\omega Bu_p = 0$，结合引理 3.5 可知在 $B_r\left(x_0\right)$ 上

$$0=\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}T}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1)T}y_0+\sum_{k=1}^{p-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k\right)$$
$$=\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1)T}y_0+\sum_{k=1}^{p-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k\right).$$

令 $g=\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1)T}y_0+\sum_{k=1}^{p-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k\right)$。

再由引理 3.1 的(ii)，其中

$$\omega_1=B_r(x_0),t=\frac{T}{2},z=g.$$

我们得到对几乎处处的 $x\in\Omega$ 有

$$g=0.$$

由引理 3.4 和热方程倒向唯一性可知

$$\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1)T}y_0+\sum_{k=1}^{p-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-1-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_k=0. \tag{3.15}$$

同理重复上述得到(3.15)的过程最终我们可得

$$\mathrm{e}^{\mathcal{A}T}y_0+\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_1=0. \tag{3.16}$$

由(3.16)结合引理 3.5 得

$$0=\mathrm{e}^{\mathcal{A}T}y_0+\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\chi_\omega Bu_1$$
$$=\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\left[\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}y_0+\chi_\omega Bu_1\right].$$

再由引理 3.4 得

$$\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}y_0+\chi_\omega Bu_1=0.$$

结合(3.14)我们发现在 $B_r(x_0)$ 上 $\chi_\omega Bu_1=0$，再根据引理 3.1 的(ii)

此时 $\omega_1=B_r(x_0)$， $t=\frac{T}{2}$， $z=\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}y_0$。

得到

$$\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}y_0=0.$$

令 $\overline{g}=\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}y_0$，于是有

$$\mathrm{e}^{\mathcal{A}\frac{T}{2}}y_0=\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\overline{g}=0.$$

进一步由倒向唯一性我们得出 $y_0=0$，这与 $y_0\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ 相矛盾，因此假设不成立，故当 $\Omega\setminus\overline{\omega}\neq\varnothing$ 时，系统(2.1)对于任意非病态周期 $T\in\mathcal{T}_2$ 不是 T-零能控的。定理 2.1 的(i)得证。

(ii) 当 $\omega=\Omega$ 时，我们先证明其充分性，为此，任取 $T\in\mathcal{T}_2$，并设 $rank\left(B,\mathrm{e}^{AT}B,\cdots,\mathrm{e}^{A(n-1)T}B\right)=n$。我们定义如下 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 V_k， $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，

$$V_k=\left\{\mathrm{e}^{AkT}Ba\in\mathbb{R}^n:a\in\mathbb{R}^m\right\}. \tag{3.17}$$

由假设和(3.17)得 $\mathbb{R}^n=\sum_{k=0}^{n-1}V_k$，因此存在线性映射 $P_k:\mathbb{R}^n\to V_k$ 使对任意 $a\in\mathbb{R}^n$ 有 $a=\sum_{k=0}^{n-1}P_k a$。从 V_k 的定义可以看出对任意 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，有

$$\mathrm{e}^{-AkT}V_k\in RangeB. \tag{3.18}$$

因此根据的 P_k 定义与(3.18)可知对于 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，任意 $z\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 有

$$\mathrm{e}^{-AkT}P_k z\in RangeB. \tag{3.19}$$

由引理 3.1 的(i)，此时

$$\omega_1\in\Omega, V=RangeB, t=kT, z=\mathrm{e}^{-AkT}P_k z.$$

我们可推得对于几乎处处的 $x\in\Omega$，当 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$ 有

$$\mathrm{e}^{\Delta_n kT}\mathrm{e}^{-AkT}P_k z\in RangeB. \tag{3.20}$$

因为映射 $B:\mathbb{R}^m\to RangeB$ 是满射，故存在线性映射 $C:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 使得对于所有 $a\in RangeB$ 成立

$$BCa=a. \tag{3.21}$$

结合(3.20)和(3.21)可知对于任意 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，取 $u_{(k+1)}=-C\mathrm{e}^{\Delta_n kT}\mathrm{e}^{-AkT}P_k z$ 可使

$$\mathrm{e}^{\Delta_n kT}\mathrm{e}^{-AkT}P_k z+Bu_{(k+1)}=0. \tag{3.22}$$

因 $\omega=\Omega$，任取 $y_0\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，结合(3.21)，(3.22)和引理 3.5 我们得出

$$\begin{aligned} y\left(nT;y_0,\{u_k\}_{k=1}^n\right)&=\mathrm{e}^{\mathcal{A}nT}y_0+\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-k)T}\int_0^T\mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau Bu_k\\ &=\int_0^T\mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\left[\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-1)T}\left(\int_0^T\mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}T}y_0+\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-k)T}Bu_k\right].\end{aligned}$$

其中令 $\tilde{y}_0=\left(\int_0^T\mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}T}y_0$，因 $y_0\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 由引理 3.4 知 $\tilde{y}_0\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 于是

$$\begin{aligned} y\left(nT;y_0,\{u_k\}_{k=1}^n\right)&=\int_0^T\mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\left[\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-1)T}\tilde{y}_0+\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-k)T}Bu_k\right]\\ &=\int_0^T\mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\left[\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-1)T}P_{(k-1)}\tilde{y}_0+\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-k)T}Bu_k\right]\\ &=\int_0^T\mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\sum_{k=1}^n\left[\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-1)T}P_{(k-1)}\tilde{y}_0+\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-k)T}Bu_k\right]\\ &=\int_0^T\mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau\sum_{k=1}^n\left[\mathrm{e}^{\mathcal{A}(n-k)T}\left(\mathrm{e}^{\mathcal{A}(l-1)T}P_{(k-1)}\tilde{y}_0+Bu_k\right)\right]=0\end{aligned}$$

此时取 $u_k=-C\mathrm{e}^{\mathcal{A}(k-1)T}P_k\tilde{y}_0$，由定义 2.1 我们可知系统(2.1)是 T-零能控的，充分性得证。

下面我们证明其必要性，设系统(2.1)是 T-零能控的，在定理 2.1 的(i)中证明了当 $T\in\mathcal{T}_1$ 时，系统(2.1)不是 T-零能控的，这意味着若系统(2.1)是 T-零能控的，则 $T\in\mathcal{T}_2$。于是我们现在只需说明：若系统(2.1)是 T-零能控的，那么则有 $rank\left(B,\mathrm{e}^{AT}B,\cdots,\mathrm{e}^{A(n-1)T}B\right)=n$。为此采用反证法，假设 $rank\left(B,\mathrm{e}^{AT}B,\cdots,\mathrm{e}^{A(n-1)T}B\right)<n$，于是根据引理 3.2，又 $\omega=\Omega$，存在 $\overline{z}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 使得对于任意 $t>0$ 有

$$B^*\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*t}\overline{z}=0 \tag{3.23}$$

因系统(2.1)是 T-零能控的，根据定义 2.1，则对任意 $\hat{z}$，存在 $p\in\mathbb{N}^+$ 和 $\{u_k\}_{k=1}^p\subseteq L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ 使得

$$0 = y\left(pT;\hat{z},\{u_k\}_{k=1}^{p}\right) = \mathrm{e}^{\mathcal{A}pT}\hat{z} + \sum_{k=1}^{P}\mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau Bu_k. \tag{3.24}$$

其中取 $\hat{z} = \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*(p+1)T}\overline{z}$ ，则有

$$\begin{aligned}\left\|\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*(p+1)T}\overline{z}\right\|^2 &= \left\langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}pT}\left[\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*(p+1)T}\overline{z}\right],\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*T}\overline{z}\right\rangle \\ &= -\sum_{k=1}^{p}\left\langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}(p-k)T}\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}\tau}\mathrm{d}\tau Bu_k,\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*T}\overline{z}\right\rangle \\ &= -\sum_{k=1}^{p}\left\langle u_k, B^*\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*(p-k+1)T}\overline{z}\right\rangle.\end{aligned}$$

结合(3.23)意味着

$$\left\|\left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau\right)^{-1}\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*(p+1)T}\overline{z}\right\|^2 = 0. \tag{3.25}$$

根据引理 3.4 和(3.25)我们可以得到 $\mathrm{e}^{\mathcal{A}^*pT}\overline{z} = 0$ ，再由热方程倒向唯一性得出 $\overline{z} = 0$ 而这与 $\overline{z} \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\backslash\{0\}$ 矛盾。由此可知假设错误，故 $rank\left(B,\mathrm{e}^{AT}B,\cdots,\mathrm{e}^{A(n-1)T}B\right) = n$ 。必要性得证，综上我们证明了定理 2.1。

4. 定理 2.2 的证明

证明定理 2.2 之前我们先给出以下两个引理。

引理 4.1 设 $T > 0$， $\{kT\}_{k=1}^{p}\left(p \in \mathbb{N}^+\right)$ 则有以下两条结论等价

(i) 系统(2.1)是 T-近似能控的。

(ii) 若 $z_0 \in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$，则

$$\chi_\omega B^*\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*(p-k)T}z_0 = 0 \text{ 对于所有 } k \in \{1,\cdots,p\} \Rightarrow z_0 = 0 \text{ 在 } \Omega \text{ 上。}$$

根据近似能控性与唯一延拓性之间的等价关系结合系统(2.1)的解(2.2)我们容易推得引理 4.1，这里省略了具体证明。

引理 4.2 设 $T > 0$ 满足

$$rank\left(B,\mathrm{e}^{AT}B,\cdots,\mathrm{e}^{A(n-1)T}B\right) = n.$$

则有

$$\bigcap_{k=1}^{p}\ker\left(B^*\mathrm{e}^{-A^*(p-k)T}\right) = \{0\}.$$

引理 4.2 的证明参见文献[6]定理 5.2 的证明。有了以上理论基础，下面我们证明定理 2.2。

证明：我们先证明其充分性，设周期 $T \in \mathcal{T}_2$ 且设 $rank\left(B,\mathrm{e}^{AT}B,\cdots,\mathrm{e}^{A(n-1)T}B\right) = n$，由引理 4.2 有

$$\bigcap_{k=1}^{n}\ker\left(B^*\mathrm{e}^{-A^*(n-k)T}\right) = \{0\}. \tag{4.1}$$

若 $z \in L^2\left(\Omega;\mathbb{N}^n\right)$ 满足

$$\chi_\omega B^*\int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*\tau}\mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{\mathcal{A}^*(n-k)T}z = 0 \text{ 对于所有 } k \in \{1,\cdots,n\} \tag{4.2}$$

根据引理 3.5 与(4.2)这意味着对所有 $k \in \{1,\cdots,n\}$

$$\chi_\omega B^*\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau e^{\mathcal{A}^*(n-k)T}z = B^*e^{-A^*(n-k)T}\chi_\omega\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau e^{\Delta_n(n-k)T}z = 0. \tag{4.3}$$

由(4.3)推出对所有 $k\in\{1,\cdots,n\}$

$$\chi_\omega\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau e^{\Delta_n(n-k)T}z\in\ker\left(B^*e^{-A^*(n-k)T}\right). \tag{4.4}$$

再由引理 3.5 有

$$\chi_\omega\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau e^{\Delta_n(n-k)T}z = \chi_\omega e^{\Delta_n(n-k)T}\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau z.$$

再根据(4.4)与引理 3.1 的(i)一起对所有 $k\in\{1,\cdots,n\}$，其中

$$\omega_1=\omega, V=\ker\left(B^*e^{-A^*(n-k)T}\right), t=(n-k)T.$$

我们可知几乎处处的 $x\in\Omega$，所有 $k\in\{1,\cdots,n\}$

$$\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau z\in\ker\left(B^*e^{-A^*(n-k)T}\right).$$

再由(4.1)得出

$$\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau z = 0.$$

由引理 3.4 我们得到 $z=0$，进一步由引理 4.1 我们得出系统(2.1)是 T-近似能控的，充分性得证。

下面我们证明其必要性，设系统(2.1)是 T-近似能控的，第一步先说明此时 $T\in\mathcal{T}_2$，采用反证法，假设 $T\in\mathcal{T}_1$，故此时存在 $\hat{z}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 使得

$$\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau\hat{z} = 0. \tag{4.5}$$

再由引理 3.5 得对 $p\in\mathbb{N}^+$，$k\in\{1,\cdots,p\}$ 有

$$\chi_\omega B^*\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau e^{\mathcal{A}^*(p-k)T}\hat{z} = \chi_\omega B^*e^{\mathcal{A}^*(p-k)T}\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau\hat{z} = 0.$$

而系统(2.1)是 T-近似能控的，结合引理 4。1 我们推出 $\hat{z}=0$，而这与 $\hat{z}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 矛盾，故此时 $T\in\mathcal{T}_2$。第二步说明此时 $rank\left(B, e^{AT}B,\cdots,e^{A(n-1)T}B\right)=n$，仍采用反证法，假设此时 $rank\left(B, e^{AT}B,\cdots,e^{A(n-1)T}B\right)<n$。于是由引理 3.2 可知存在 $z\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 使得 $\chi_\omega B^*e^{\mathcal{A}^*t}z=0$ 对于任意 $t>0$，特殊的有

$$\chi_\omega B^*e^{\mathcal{A}^*kT}z = 0 \text{ 对于任意 } k\in\mathbb{N}^+\text{。}$$

任取 $T\in\mathcal{T}_2$，由引理 3.4 可知存在 $\overline{z}\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)$ 使得

$$e^{\mathcal{A}^*T}z = \int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau\overline{z}. \tag{4.6}$$

于是对任意 $k\in\mathbb{N}^+$

$$\chi_\omega B^*e^{\mathcal{A}^*kT}z = \chi_\omega B^*e^{\mathcal{A}^*(k-1)T}e^{\mathcal{A}^*T}z = \chi_\omega B^*e^{\mathcal{A}^*(k-1)T}\int_0^T e^{\mathcal{A}^*t}dt\overline{z} = 0. \tag{4.7}$$

由(4.7)结合引理 3.5 可推得对 $p\in\mathbb{N}^+$

$$\chi_\omega B^*\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau e^{\mathcal{A}^*(p-k)T}\overline{z} = 0 \text{ 对于所有 } k\in\{1,\cdots,p\}\text{。}$$

根据假设系统(2.1) T-近似能控，由引理 4.1 则

$$\chi_\omega B^*\int_0^T e^{\mathcal{A}^*\tau}d\tau e^{\mathcal{A}^*(p-k)T}\overline{z} = 0 \text{ 对于所有 } k\in\{1,\cdots,p\}\Rightarrow\overline{z}=0 \text{ 在 }\Omega\text{ 上。}$$

再由(4.6)得 $e^{A^*T}z=0$，进一步根据热方程倒向唯一性可得 $z=0$，与 $z\in L^2\left(\Omega;\mathbb{R}^n\right)\setminus\{0\}$ 矛盾。这意味着 $rank\left(B,e^{AT}B,\cdots,e^{A(n-1)T}B\right)=n$，必要性得证。至此我们证明了本文的主要定理。

5. 结论

关于主要结论下面给出一些说明：

1) 本文中定义的 T-零能控性和 T-近似能控性均与采样周期 T 有关，即考虑的是在给定周期 T 选择下系统(2.1)的能控性问题。

2) 定理 2.1 说明系统(2.1)是否 T-零能控与控制域 ω 是否为全空间 Ω 有关，若 ω 是 Ω 的真子集时，则对任意采样周期 T，系统(2.1)都不是 T-零能控的。

3) 当 $\omega=\Omega$ 时，我们得到了系统(2.1)是 T-零能控的一个充要条件，此条件为 $T\in\mathcal{T}_2$ 且 $rank\left(B,e^{AT}B,\cdots,e^{A(n-1)T}B\right)=n$。在本文定理(2.1)的证明中我们说明了当 $T\in\mathcal{T}_1$ 时，无论控制域 ω 是否为全空间 Ω，系统(2.1)都不是 T-零能控的。

4) 在定理 2.2 中我们给出了系统(2.1)是 T-近似能控的一个充要条件，也是 $T\in\mathcal{T}_2$ 且 $rank\left(B,e^{AT}B,\cdots,e^{A(n-1)T}B\right)=n$。与系统(2.1) T-零能控相比系统(2.1) T-近似能控并不依赖于控制域 ω 的大小。

5) 推论 2.3 分别给出了系统(2.1)是 T-零能控的和 T-近似能控的充分条件。由定义 2.3 和定义 2.4 易知，若采样周期 T 是非病态的，则 $T\in\mathcal{T}_2$，而采样周期 T 非病态与 (A,B) 满足 $rank\left(B,AB,\cdots,A^{n-1}B\right)=n$ 是 $rank\left(B,e^{AT}B,\cdots,e^{A(n-1)T}B\right)=n$ 的一充分条件(参见文献[11]的第四章)，故推论 2.3 是定理 2.1 和定理 2.2 的特殊情形，因此推论 2.3 给出的也是一充分条件。

基金项目

湖北省自然科学基金面上项目支持(项目编号：2023AFB622)。

参考文献

[1] 郭戈, 王伟. 保证能控性和能观性的采样方式[J]. 控制与决策, 2003, 18(1): 66-68.

[2] 郭戈. 周期性系统的能控性理论[J]. 控制与决策, 2004, 19(4): 468-470.

[3] 杨磊，李俊民. 一类线性切换系统的能控性和能观测性的充要条件[J]. 系统工程与电子技术，2003，25(5): 588-590.

[4] 王俭, 肖金球, 施颂椒. 离散时间系统能控能观测与信号重构的关系[J]. 电路与系统学报, 2003, 8(6): 136-138.

[5] Chen, T. and Francis, B.A. (2012) Optimal Sampled-Data Control Systems. Springer Science & Business Media, Berlin.

[6] Qin, S. and Wang, G. (2017) Controllability of Impulse Controlled Systems of Heat Equations Coupled by Constant Matrices. *Journal of Differential Equations*, **263**, 6456-6493. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.07.018

[7] Liu, X. (1995) Impulsive Control and Optimization. *Applied Mathematics and Computation*, **73**, 77-98. https://doi.org/10.1016/0096-3003(94)00204-H

[8] Wang, L., Yan, Q. and Yu, H. (2021) Constrained Approximate Null Controllability of the Coupled Heat Equation with Impulse Controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **59**, 3418-3446. https://doi.org/10.1137/20M1338393

[9] Wang, G., Yang, D. And Zhang, Y. (2017) Time Optimal Sampled-Data Controls for the Heat Equation. *Comptes Rendus Mathematique*, **355**, 1252-1290. https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.11.006

[10] Lin, P., Liu, H. and Wang, G. (2020) Output Feedback Stabilization for Heat Equations with Sampled-Data Controls. *Journal of Differential Equations*, **268**, 5823-5854. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.11.019

[11] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002.