Finance 金融, 2011, 1, 17-20
http://dx.doi.org/10.12677/fin.2011.11004 Published Online April 2011 (http://www.hanspub.org/journal/fin/)

Pricing of Reload Option on Stock Driven by Multidimensional Fractional Brown Motions*

Dianli Zhao
College of Science, University of Shanghai for Science & Technology, Shanghai
Email:Dianli-zhao@163.com
Received: Apr. 3rd, 2011; revised: Apr. 12th, 2011; accepted: Apr. 19th, 2011.

Abstract: Price of the reload option on stock driven by multidimensional fractional brown motions was investigated in the paper; two pricing formulas were presented by using neutral-risk method.

Keywords: Reload Option; Multidimensional Fractional Brown Motion; Neutral-Risk Method

多维分数布朗运动环境下再装期权定价公式*

赵佃立
上海理工大学理学院，上海
Email:Dianli-zhao@163.com
收稿日期：2011 年 4 月 3 日；修回日期：2011 年 4 月 12 日；录用日期：2011 年 4 月 19 日

摘　要：本文研究了股价过程服从多维分数几何布朗运动时的再装期权定价问题，通过风险中性定价方法分别给出了无风险利率与红利率为常数和非随机函数情况下再装期权的定价公式，并利用正态函数的联合分布给出精确表达式。

关键词：多维分数布朗运动；再装期权；红利

1. 基础知识

再装期权是一种奇异的欧式看涨期权，它锁定了持有人在到期前再装时刻的收益，从而相对降低了到期日只能获得较低收入的风险，主要应用于公司的激励机制。关于再装期权的理论研究已经吸引了许多研究者的关注：Johnson[1]研究了服从连续扩散过程的再装期权定价，冯广波等[2,3]利用二叉树模型研究了再装期权的定价，并给出了价格服从跳－扩散过程的再装期权定价公式；傅强等[4,5]研究了标的资产服从几何 O-U 过程的再装期权定价，并研究了其在经理激励中的应用；李超杰等[6]讨论了再装期权中执行价格的决定问题；本文将在标的资产符合几何分数布朗运动的情况下讨论再装期权的风险中性定价。

具有 Hurst 指数 $H\in(0,1)$ 的分数布朗运动过程 $B_H(t)$ 是指连续的 Gaussian 过程且满足 $B_H(0)=0$，

$$E\left(B_H(t)\right)=0,$$

$$E\left(B_H(s)\cdot B_H(t)\right)=\frac{1}{2}\left\{|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\right\}。$$

从定义可知分数布朗运动具有的自相似和长称相关性。设 $B_{H_i}(t)$ 是指概率空间 (Ω^H,F^H,P^H)：$F_t^H=\sigma\left(B_{H_i}(s);i=1,2,\cdots,m;0\le s\le t\right)$ 上参数为 $H_i\in(0,1)$ 的分数布朗运动，由构造过程知 $B_{H_i}=\int_R M_{H_i}(0,t)(s)\mathrm{d}B_i(s)$：$B_i(s)\in N(0,1)$ 满足：

$$\int_R M_{H_i}(0,t)M_{H_j}(0,s)\mathrm{d}x=\frac{|t|^{H_i+H_j}+|s|^{H_i+H_j}-|s-t|^{H_i+H_j}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(H_i+H_j\right)\right)\Gamma\left(H_i+H_j+1\right)}$$

设含有非随机红利率函数 $\delta(t)$ 的股价过程满足：

$$\mathrm{d}S_t=S_t\left[\left(\mu(t)-\delta(t)\right)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\mathrm{d}B_{H_i}(t)\right]\tag{1}$$

*基金项目：*上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金（No .slg029）。

由文献[7]知，存在风险中性概率测度 $\hat{P}^H$ ，在概率 $\hat{P}$ 下(1)可表示为：

$$\mathrm{d}S_t = S_t\left[\left(r(t)-\delta(t)\right)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{m}\sigma_i \mathrm{d}\hat{B}_{H_i}(t)\right] \quad (2)$$

其中 $\hat{B}_{H_i}(t)$ 为 $\hat{P}^H$ 下的分数布朗运动，$r(t)$ 为无风险利率。若记 $M=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i M(\alpha_i)$ 、$\hat{B}_M(t)=\sum_{i=1}^{m}\sigma_i \hat{B}_{H_i}(t)$，则(2)又可表示为：

$$\mathrm{d}S_t = S_t\left[\left(r(t)-\delta(t)\right)\mathrm{d}t+\mathrm{d}\hat{B}_M(t)\right],$$

利用 $Wick$ 积分求得

$$S_T = S_t \exp\left\{\int_t^T \left(r(s)-\delta(s)\right)ds - \frac{1}{2}\left[R(T,T)-R(t,t)\right]+\left[\hat{B}_M(T)-\hat{B}_M(t)\right]\right\}$$

其中，$\hat{B}_M(t)$ 为 $\hat{P}^H$ 下的正态分布：期望为零、协方差为

$$R(s,t)=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{|t|^{H_i+H_j}+|s|^{H_i+H_j}-|s-t|^{H_i+H_j}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(H_i+H_j)\right)\Gamma(H_i+H_j+1)} 。$$

引理[7] 任意有界 F_t 可测的终值收益 $h(S_T)\in L^2(P)$ 的欧式未定权益的定价为：

$$V(S_t,t)=e^{-\int_t^T r(s)ds}\tilde{E}\left(h(S_T)\right)$$

其中 $\tilde{E}(\cdot)$ 为在风险中性概率测度下的期望值。

2. 主要结论

执行价格为K，到期日为T，在 $T_1: 0\le T_1\le T$ 时刻通过一次再装的期权支付为：在再装时刻 T_1 的支付为

$$\max\left\{S_{T_1}-K,0\right\}$$

在到期日 T 时的支付为

$$F(K,T,T_1)=\begin{cases}\dfrac{K}{S_{T_1}}\max(S_T-S_{T_1},0) & S_{T_1}>K\\ \max(S_T-K,0) & S_{T_1}\le K\end{cases}$$

由此，可得如下结论：

定理 1 如果标的资产价格满足(1)，其中 $r(t)=r$ 、$\delta(t)=0$ ，则具有一次再装时刻 T_1、到期时刻 T、执行价格 K 的再装期权在零时刻的价格为：

$$\begin{aligned}V(K,T,T_1)=&S_0N(d_1)-Ke^{-rT_1}N(d_2)\\&+e^{-rT_1-(R(T,T_1)-R(T_1,T_1))}N\left(\hat{d}_2,\hat{d}_3,\rho_1\right)\\&-Ke^{-rT}N(d_2,d_3,\rho_1)\\&+S_0N\left(\hat{\hat{d}}_2,\hat{d}_4,\rho_2\right)-Ke^{-rT}N(d_2,d_4,\rho_2)\end{aligned}$$

其中

$$d_1=\left[\ln\frac{S_0}{K}+rT_1+\frac{1}{2}R(T_1,T_1)\right]\Big/\sqrt{R(T_1,T_1)},$$

$$d_2=\left[\ln\frac{S_0}{K}+rT_1-\frac{1}{2}R(T_1,T_1)\right]\Big/\sqrt{R(T_1,T_1)},$$

$$\hat{d}_2=d_2+\frac{R(T,T_1)-R(T_1,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}},$$

$$\hat{d}_3=d_3+\sqrt{R(T,T)-2R(T,T_1)+R(T_1,T_1)},$$

$$d_3=\frac{r(T-T_1)-\frac{1}{2}\left[R(T,T)-R(T_1,T_1)\right]}{\sqrt{R(T,T)-2R(T,T_1)+R(T_1,T_1)}},$$

$$\hat{\hat{d}}_2=d_2+\frac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}}, \quad \hat{d}_4=d_4+\sqrt{R(T,T)},$$

$$d_4=\left[\ln\frac{S_0}{K}+rT-\frac{1}{2}R(T,T)\right]\Big/\sqrt{R(T,T)}$$

$$\rho_1=\frac{R(T,T_1)-R(T_1,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)\cdot\left[R(T,T)-2R(T,T_1)+R(T_1,T_1)\right]}},$$

$$\rho_2=\frac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T,T)\cdot R(T_1,T_1)}}$$

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\left(-\frac{u^2}{2}\right)}\mathrm{d}u,$$

$$N(x,y,\rho)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{\left\{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x 。$$

证明：由引理1，

$$\begin{aligned}V(K,T,T_1)=&e^{-rT_1}E^Q\left[\max(S_{T_1}-K),0\right]\\&+e^{-rT}E^Q\left[\frac{K}{S_{T_1}}\left(\max(S_T-S_{T_1}),0\right)\cdot I_{\left[S_{T_1}>K\right]}\right]\\&+e^{-rT}E^Q\left[\left(\max(S_T-K),0\right)\cdot I_{\left[S_{T_1}\le K\right]}\right]\end{aligned}$$

对于等式右边的第一项，利用文献[7]的结果知：

$$V_1 = e^{-rT_1} E^Q\left[\max(S_{T_1} - K), 0\right] = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT_1} N(d_2)$$

其中：

$$d_1 = \left[\ln\frac{S_0}{K} + rT_1 + \frac{1}{2}R(T_1,T_1)\right] \Big/ \sqrt{R(T_1,T_1)}$$

$$d_2 = \left[\ln\frac{S_0}{K} + rT_1 - \frac{1}{2}R(T_1,T_1)\right] \Big/ \sqrt{R(T_1,T_1)}$$

下面来求等式右边第二项

$$V_2 = e^{-rT} E^Q\left[\frac{K}{S_{T_1}}\left(\max\left(S_T - S_{T_1}\right),0\right)\cdot I_{\left[S_{T_1}>K\right]}\right] = e^{-rT} E^Q\left[\left(K\max\left(\frac{S_T}{S_{T_1}}-1\right),0\right)\cdot I_{\left[S_{T_1}>K\right]}\right] = e^{-rT} E^Q\left[K\left(\frac{S_T}{S_{T_1}}-1\right)\cdot I_{\left[S_T>S_{T_1}\right]}\cdot I_{\left[S_{T_1}>K\right]}\right]$$

作变换

$$\hat{B}_M(T) = \frac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}} X + \sigma Y,\ \hat{B}_M(T_1) = \sqrt{R(T_1,T_1)}\cdot X$$

其中，$\sigma^2 = \dfrac{R(T,T)R(T_1,T_1) - R^2(T,T_1)}{R(T_1,T_1)}$ 且互相独立的随机变量 $X,Y \in N(0,1)$。

若记

$$A = \frac{\ln\dfrac{K}{S_0} - r(T-T_1) + \dfrac{1}{2}\left[R(T,T) - R(T_1,T_1)\right]}{\sqrt{R(T_1,T_1)}},$$

$$B = r(T-T_1) - \frac{1}{2}\left[R(T,T) - R(T_1,T_1)\right],$$

$$a = \frac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}}$$

从而

$$V_2 = \frac{1}{2\pi} e^{-rT} \int_A^{+\infty} \int_{-\frac{\sqrt{R(T_1,T_1)}-a}{\sigma}x - \frac{B}{\sigma}}^{+\infty} K\left(\exp\{B + ax + \sigma y - bx\} - 1\right) \cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

整理后得

$$V_2 = e^{-rT_1 - \left(R(T,T_1) - R(T_1,T_1)\right)} N\left(\hat{d}_2, \hat{d}_3, \rho_1\right) - Ke^{-rT} N\left(d_2, d_3, \rho_1\right)$$

其中

$$\hat{d}_2 = d_2 + \frac{R(T,T_1) - R(T_1,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}},$$

$$d_3 = \frac{r(T-T_1) - \frac{1}{2}\left[R(T,T) - R(T_1,T_1)\right]}{\sqrt{R(T,T) - 2R(T,T_1) + R(T_1,T_1)}}$$

$$\hat{d}_3 = d_3 + \sqrt{R(T,T) - 2R(T,T_1) + R(T_1,T_1)}$$

$$\rho_1 = \frac{R(T,T_1) - R(T_1,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)\cdot\left[R(T,T) - 2R(T,T_1) + R(T_1,T_1)\right]}}$$

下面来求等式右边第三项

$$V_3 = e^{-rT} E^Q\left[\left(\max(S_T - K), 0\right)\cdot I_{\left[S_{T_1}\le K\right]}\right] = e^{-rT} E^Q\left[S_T - K\cdot I_{\left[S_T>K\right]}\cdot I_{\left[S_{T_1}>K\right]}\right]$$

作变换

$$\hat{B}_M(T) = \frac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}} X + \sigma Y,\ \hat{B}_M(T_1) = \sqrt{R(T_1,T_1)}\cdot X$$

记

$$C = \left[\ln\frac{S_0}{K} + rT_1 - \frac{1}{2}R(T,T)\right] \Big/ \sigma$$

则有

$$V_3 = \frac{1}{2\pi} e^{-rT} \int_A^{+\infty} \int_{-\frac{a}{\sigma}x - C}^{+\infty} \left(S_0 \exp\left\{rT - \frac{1}{2}\sigma_M^2(T) + ax + \sigma y\right\} - K\right) \cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

从而有

$$V_3 = S_0 N\left(\hat{\hat{d}}_2, \hat{d}_4, \rho_2\right) - Ke^{-rT} N\left(d_2, d_4, \rho_2\right)$$

其中 $\hat{\hat{d}}_2 = d_2 + \dfrac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}}$，

$$d_4 = \left[\ln\frac{S_0}{K} + rT - \frac{1}{2}R(T,T)\right] \Big/ \sqrt{R(T,T)},$$

$$\hat{d}_4 = d_4 + \sqrt{R(T,T)},\quad \rho_2 = \frac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T,T)\cdot R(T_1,T_1)}}$$

结合(3)(4)(5)可知结论成立。

证毕。

定理2 如果标的资产价格满足(1)，其中 $r(t)$、$\delta(t)$ 为非随机函数，则具有一次再装时刻T_1、到期时刻T_1、

执行价格K的再装期权在零时刻的价格为：

$$\begin{aligned}&V(K,T,T_1)=S_0e^{-\int_0^{T_1}\delta(s)ds}N(d_1)-Ke^{-\int_0^{T_1}r(s)ds}N(d_2)\\&+e^{-\int_0^{T_1}r(s)ds-\int_{T_1}^{T}\delta(s)ds-(R(T,T_1)-R(T_1,T_1))}N(\hat{d}_2,\hat{d}_3,\rho_1)\\&-Ke^{-\int_0^{T}r(s)ds}N(d_2,d_3,\rho_1)\\&+S_0e^{-\int_0^{T}\delta(s)ds}N(\hat{\hat{d}}_2,\hat{d}_4,\rho_2)-Ke^{-\int_0^{T}r(s)ds}N(d_2,d_4,\rho_2)\end{aligned}$$

其中

$$d_1=\frac{\left[\ln\frac{S_0}{K}+\int_0^{T_1}(r(s)-\delta(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{2}R(T_1,T_1)\right]}{\sqrt{R(T_1,T_1)}}$$

$$d_2=\frac{\left[\ln\frac{S_0}{K}+\int_0^{T_1}(r(s)-\delta(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}R(T_1,T_1)\right]}{\sqrt{R(T_1,T_1)}}$$

$$\hat{d}_2=d_2+\frac{R(T,T_1)-R(T_1,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}},$$

$$\hat{d}_3=d_3+\sqrt{R(T,T)-2R(T,T_1)+R(T_1,T_1)}$$

$$d_3=\frac{\int_{T_1}^{T}(r(s)-\delta(s))ds-\frac{1}{2}\left[R(T,T)-R(T_1,T_1)\right]}{\sqrt{R(T,T)-2R(T,T_1)+R(T_1,T_1)}},$$

$$\hat{d}_4=d_4+\sqrt{R(T,T)},\quad \hat{\hat{d}}_2=d_2+\frac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)}},$$

$$d_4=\frac{\left[\ln\frac{S_0}{K}+\int_0^{T}(r(s)-\delta(s))\mathrm{d}s-\frac{1}{2}R(T,T)\right]}{\sqrt{R(T,T)}}$$

$$\rho_1=\frac{R(T,T_1)-R(T_1,T_1)}{\sqrt{R(T_1,T_1)\cdot\left[R(T,T)-2R(T,T_1)+R(T_1,T_1)\right]}},$$

$$\rho_2=\frac{R(T,T_1)}{\sqrt{R(T,T)\cdot R(T_1,T_1)}}$$

证明：证明类似于定理 1。

3. 结束语

再装期权作为一类奇异的欧式看涨期权，比具有相同执行价格和相同有效期的经典欧式期权有更多的权益，因而其价格高于经典期权的价格；不难发现再装期权的价格低于两个期权价格的加和，从而为投资者提供了更多的选择机会，与传统期权的结合将有可能为期权理论取得更为广泛的应用。

参考文献 (References)

[1] S. A. Johnson, Y. S. Tian. The value and incentive effects of nontraditional executive stock option plans. Journal of Finance Economics, 2000, 57(1): 3-34.

[2] 冯广波，刘再明，候振挺. 用二项式期权定价模型估价美式再装期权的价值[J]. 长沙铁道学院学报, 2002, 20(3): 71-73.

[3] 冯广波，刘再明，候振挺. 服从跳－扩散过程的再装股票期权的定价[J]. 系统工程学报, 2003, 18(1): 91-93.

[4] 傅强，喻建龙. 股票价格服从指数 O-U 过程的再装期权定价[J]. 经济数学, 2006, 23(1): 36-40.

[5] 傅强，喻建龙. 再装期权定价及其在经理激励中的应用[J]. 商业研究, 2006, 49(343): 147-150.

[6] 李超杰，何建敏. 再装股票期权执行价格最低水平的决定[J]. 系统工程理论方法应用, 2004, 13(6): 508-511.

[7] 刘韶跃，丛金明，杨向群. 多为分数次 Black-Scholes 模型中欧式未定权的定价[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2006, 33(3): 128-131.

