

Thermal Effect of Functionally Graded Piezoelectric Materials with Crack by Electric Shock*

Xing Li, Yongyi Long

School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan
Email: li_x@nxu.edu.cn

Received: Aug. 9th, 2012; revised: Aug. 17th, 2012; accepted: Aug. 24th, 2012

Abstract: This paper investigates the thermal effect of crack in functionally graded piezoelectric strip by electric shock, firstly, the system complex governing equations can be obtained by using the constitutive relations of functionally graded piezoelectric materials, secondly, the Laplace and Fourier integral transform techniques are used to reduce the problem to the solution of singular integral equations, thirdly, these singular integral equations are solved numerically by employing Gauss-Chebyshev quadrature formulas and the numerical results are obtained, then the effect of the parameters of the materials and the size of the crack to the thermal effect are discussed.

Keywords: Functionally Grade Piezoelectric Materials; Crack; Singular Integral Equation; Thermal Effect

电冲击下功能梯度压电带中裂纹尖端热效应*

李 星, 龙永义

宁夏大学数学计算机学院, 银川
Email: li_x@nxu.edu.cn

收稿日期: 2012年8月9日; 修回日期: 2012年8月17日; 录用日期: 2012年8月24日

摘 要: 本文探讨在高电冲击载荷作用下, 压电介质中裂纹尖端的热效应问题的奇异积分方程方法, 通过引入热源功率, 利用绝热近似, 由简化的热传导方程得到了裂纹尖端在电冲击作用下短时间范围的温度场。通过构造位错密度函数, 并利用 Laplace 变换和 Fourier 变换将原方程转化为 Cauchy 核的奇异积分方程, 进而利用 Chebyshev 多项式展开以及 Gauss-Chebyshev 积分公式对该奇异积分方程进行数值求解, 同时讨论了裂纹尺寸对温度升高值和升高区域大小的影响。

关键词: 功能梯度压电材料; 裂纹; 奇异积分方程; 热效应

1. 引言

通常对压电介质热相关问题的研究都是在热场与力电场互不耦合的假设下进行的, Fu 等^[1]关于压电介质断裂的实验研究表明在电载荷下, 压电介质的断裂韧性大大高于力载荷下的断裂韧性, 并且在压电介质裂纹尖端产生明显的升温现象。自象忠等^[2,3]的研究则表明在导体中可利用电冲击作用实现裂纹止裂。

*资助信息: 国家自然科学基金(10962008)和(51061015), 以及中国高等学校博士学科点基金(博导类)(20116401110002)的资助。

Bilyk 等^[4]的研究揭示了当施加高电流时, 导体内的温度升高值远远大于只作用力载荷的温度升高值。受上述压电介质的实验结果和导体中相关研究的启发, 本文利用我们常用的 Laplace 变换和 Fourier 变换将原方程转化为 Cauchy 核奇异积分方程, 进而利用 Chebyshev 多项式展开以及 Gauss-Chebyshev 积分公式对该奇异积分方程进行数值求解的方法^[5-9], 探讨在高电冲击载荷作用下, 压电介质中裂纹尖端的热效应问题, 通过引入热源功率, 利用绝热近似, 由简化的热传导方程

得到裂纹尖端在电冲击作用下短时间范围的温度场并讨论裂纹尺寸对温度升高值和升高区域大小的影响。

2. 问题的描述

本模板考虑如图 1 所示的结构，采用直角坐标系 (x, y, z) ，其中 z 轴为功能梯度压电体的极轴。长为 $2c$ 的裂纹位于 x 轴上，压电体为厚度为 $2h$ 的无限长条，裂纹上方区域和下方区域关于 x 轴对称，假设裂纹面上作用有电场冲击载荷。

下面求解承受电冲击作用下，裂纹尖端区域在电冲击下的热效应。求解上述问题时，在求裂纹尖端附近的力场和电场时不考虑与温度场相关的因素，在求解裂纹尖端的力 - 电场后再考虑温度的影响，该问题中压电介质的几何方程、本构方程分别为：

$$2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \mathbf{E}_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \mathbf{E}_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = c_{44}(y) \frac{\partial \omega}{\partial x} + e_{15}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \sigma_{yz} = c_{44}(y) \frac{\partial \omega}{\partial y} + e_{15}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \mathbf{D}_x = e_{15}(y) \frac{\partial \omega}{\partial x} - \kappa_{11}(y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \mathbf{D}_y = e_{15}(y) \frac{\partial \omega}{\partial y} - \kappa_{11}(y) \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

其中， ε 、 ω 、 \mathbf{E} 、 ϕ 、 σ 、 \mathbf{D} 分别代表应变张量、反平面位移、电场强度矢量、电势、应力张量、电位

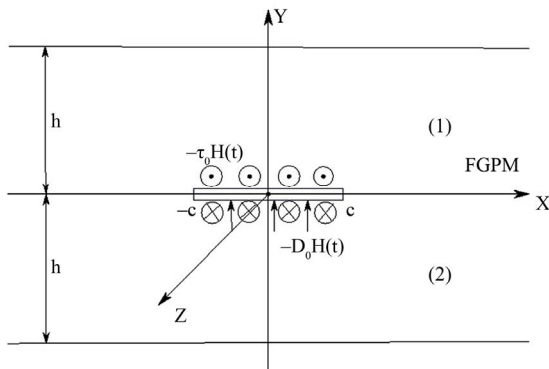


Figure 1. Model of thermal effect of functionally graded piezoelectric materials
图 1. 功能梯度压电带热效应问题的结构示意图

移矢量， $c_{44}(y)$ ， $e_{15}(y)$ ， $\kappa_{11}(y)$ 分别为剪切模量、压电常数、介电常数。

平衡方程和 Maxwell 方程为：

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{D}_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

假设功能梯度压电材料的剪切模量，压电常数，介电常数和密度沿其厚度方向按指数函数变化，即：

$$c_{44} = c_0 e^{\beta y}, \quad e_{15} = e_0 e^{\beta y}$$

$$\kappa_{11} = \kappa_0 e^{\beta y}, \quad \rho = \rho_0 e^{\beta y} \quad (4)$$

裂纹面边界条件： $(-c < x < c)$

$$\sigma_{yz}(x, 0, t) = -\tau_0 H(t), \quad \mathbf{D}_y(x, 0, t) = -D_0 H(t) \quad (5)$$

对称性边界条件： $(|x| > c)$

$$\omega(x, 0, t) = 0, \quad \phi(x, 0, t) = 0 \quad (6)$$

自由边界条件： $(-\infty < x < +\infty)$

$$\sigma_{yz}(x, h, t) = 0, \quad \mathbf{D}_y(x, h, t) = 0 \quad (7)$$

τ_0 和 D_0 分别为力场和电场冲击载荷的幅度， $H(t)$ 表示 Heaviside 函数。

3. 问题的求解

定义 Laplace 变换：

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} F(p) e^{px} dp \quad (8)$$

这里 Br 代表 Bromwith 积分路径。

定义 Fourier 变换：

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{-isx} ds \quad (9)$$

把(2)代入(3)，后再令 $\psi = \phi - \frac{e_0}{\kappa_0} \omega$ ，可得

$$\begin{cases} \nabla^2 \omega + \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} = s_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中 $s_0 = \rho_0 \left/ \left(c_0 + \frac{e_0^2}{\kappa_0} \right) \right.$ 。

对(10)式中的时间变量 t 进行 Laplace 变换后再对其中 x 变量进行 Fourier 变换后最终可得：

$$\begin{aligned} & (-s^2)F(s, y, p) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(s, y, p) + \beta \frac{\partial}{\partial y} F(s, y, p) \quad (11) \\ & = s_0 p^2 F(s, y, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-s^2)G(s, y, p) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} G(s, y, p) \\ & + \beta \frac{\partial}{\partial y} G(s, y, p) = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

令: $F(s, y, p) = A(s, p)e^{\gamma y}$, 代入(11)式:

$$\gamma = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4(s^2 + s_0 p^2)}}{2} \quad (13)$$

故

$$F(s, y, p) = A_1(s, p)e^{\gamma_1 y} + A_2(s, p)e^{\gamma_2 y}$$

其中

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2 + s_0 p^2} \\ t_2 &= -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2 + s_0 p^2} \quad (14) \end{aligned}$$

则在 Laplace 域中有:

$$\begin{aligned} & \omega^*(x, y, p) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_1(s, p)e^{\gamma_1 y} + A_2(s, p)e^{\gamma_2 y}] e^{-isx} dx \quad (15) \end{aligned}$$

同理可得:

$$\begin{aligned} & \psi^*(x, y, p) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_3(s, p)e^{\gamma_3 y} + A_4(s, p)e^{\gamma_4 y}] e^{-isx} dx \quad (16) \end{aligned}$$

其中

$$t_3 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2}, \quad t_4 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + s^2} \quad (17)$$

由变换 $\psi = \phi - \frac{e_0}{\kappa_0} \omega$, 有:

$$\begin{aligned} & \phi^*(x, y, p) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} [A_1(s, p)e^{\gamma_1 y} + A_2(s, p)e^{\gamma_2 y}] e^{-isx} dx \quad (18) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_3(s, p)e^{\gamma_3 y} + A_4(s, p)e^{\gamma_4 y}] e^{-isx} dx \end{aligned}$$

即在 Laplace 域中的形式解为(15)和(18)式。

引入位错密度函数:

$$f^*(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial \omega^*(x, 0, p)}{\partial x} & |x| \leq c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (19)$$

$$g^*(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi^*(x, 0, p)}{\partial x} & |x| \leq c \\ 0 & |x| > c \end{cases} \quad (20)$$

由(15), (18)和(19), (20)以及边界条件(6), 得:

$$A_1(s, p) + A_2(s, p) = \frac{1}{-is} \int_{-c}^c f^*(t, p) e^{ist} dt \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & A_3(s, p) + A_4(s, p) \\ & = \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} \right) \cdot \frac{1}{-is} \int_{-c}^c f^*(t, p) e^{ist} dt \quad (22) \\ & + \frac{1}{-is} \int_{-c}^c g^*(t, p) e^{ist} dt \end{aligned}$$

由本构方程(2), 边界条件(7)及(15), (18), 得:

$$\begin{aligned} & \left(c_0 + \frac{e_0^2}{\kappa_0} \right) e^{\beta h} [t_1 A_1(s, p) e^{t_1 h} + t_2 A_2(s, p) e^{t_2 h}] \\ & + e_0 e^{\beta h} [t_3 A_3(s, p) e^{t_3 h} + t_4 A_4(s, p) e^{t_4 h}] = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2e_0 e^{\beta h} [t_1 A_1(s, p) e^{t_1 h} + t_2 A_2(s, p) e^{t_2 h}] \\ & + \kappa_0 e^{\beta h} [t_3 A_3(s, p) e^{t_3 h} + t_4 A_4(s, p) e^{t_4 h}] = 0 \quad (24) \end{aligned}$$

联立(21)-(24), 得:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-t_2 e^{t_2 h}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} f, \\ A_2 &= \frac{t_1 e^{t_1 h}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} f \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{-t_4 e^{t_4 h}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} f + g \right) \\ A_4 &= \frac{t_3 e^{t_3 h}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \left(-\frac{e_0}{\kappa_0} f + g \right) \quad (26) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{-is} \int_{-c}^c f^*(t, p) e^{ist} dt \\ g &= \frac{1}{-is} \int_{-c}^c g^*(t, p) e^{ist} dt \quad (27) \end{aligned}$$

把(25), (26)代入(15), (18), 由本构方程(2), 边界条件(5)得到如下第一类 Cauchy 奇异积分方程组:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{f^*(t,p)}{t-x} dt + \frac{e_0}{\pi} \int_{-c}^c \frac{g^*(t,p)}{t-x} dt \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c K_{11}(x,t,p) f^*(t,p) dt \\ & - \frac{e_0}{\pi} \int_{-c}^c K_{12}(x,t,p) g^*(t,p) dt = -\frac{\tau_0}{p} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{e_0}{\pi} \int_{-c}^c \frac{f^*(t,p)}{t-x} dt + \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-c}^c \frac{g^*(t,p)}{t-x} dt \\ & - \frac{e_0}{\pi} \int_{-c}^c K_{21}(x,t,p) f^*(t,p) dt \\ & + \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-c}^c K_{22}(x,t,p) g^*(t,p) dt = -\frac{D_0}{p} \end{aligned} \quad (29)$$

其中:

$$K_{11} = \int_0^{+\infty} [U_1(s,p) - 1] \sin s(t-x) ds \quad (30)$$

$$K_{12} = \int_0^{+\infty} [U_2(s,p) + 1] \sin s(t-x) ds \quad (31)$$

$$K_{21} = K_{22} = \int_0^{+\infty} [U_2(s,p) - 1] \sin s(t-x) ds \quad (32)$$

$$\begin{aligned} U_1 = \frac{1}{s} & \left[\frac{e_0^2}{\kappa_0} \cdot \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h} - t_3 t_4 e^{t_4 h}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right. \\ & \left. - \left(c_0 + \frac{e_0^2}{\kappa_0} \right) \cdot \frac{t_1 t_2 e^{t_1 h} - t_1 t_2 e^{t_2 h}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$U_2 = \frac{1}{s} \cdot \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h} - t_3 t_4 e^{t_4 h}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \quad (34)$$

奇异积分方程组(28), (29)的单值条件为:

$$\begin{cases} f^*(0,p) = 0 \\ g^*(0,p) = 0 \end{cases} \quad (35)$$

引入变量 $t = uc$, $x = rc$ 并令

$$f^*(t,p) = F(u,p),$$

$$g^*(t,p) = G(u,p),$$

$$K_{ij}(x,t,p) = K_{ij}^*(u,r,p) (i, j = 1, 2)$$

积分方程组(28), (29)化为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(u,p)}{u-r} du + \frac{e_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{G(u,p)}{u-r} du \\ & + \frac{c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{11}^*(r,u,p) \cdot F(u,p) du \\ & - \frac{e_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}^*(r,u,p) \cdot G(u,p) du = -\frac{\tau_0}{p} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{e_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F(u,p)}{u-r} du + \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{G(u,p)}{u-r} du \\ & - \frac{e_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{21}^*(r,u,p) \cdot F(u,p) du \end{aligned} \quad (37)$$

$$+ \frac{\kappa_0 c}{\pi} \int_{-1}^1 K_{22}^*(r,u,p) \cdot G(u,p) du = -\frac{D_0}{p}$$

$$F(0,p) = 0 \quad (38)$$

$$G(0,p) = 0 \quad (39)$$

利用 $F(0,p)$ 和 $G(0,p)$ 的 Chebyshev 多项式展开形式:

$$f^*(t,p) = F(u,p) = \frac{R(u,p)}{\sqrt{1-u^2}} \quad (40)$$

$$g^*(t,p) = G(u,p) = \frac{S(u,p)}{\sqrt{1-u^2}} \quad (41)$$

将(40)~(41)代入(36)~(39), 并利用 Gauss-Chebyshev 积分公式^[10], 得如下线性方程组:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N \left[\frac{1}{u_l - r_m} + c K_{11}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{R(u_l, p)}{N} \\ & + \sum_{l=1}^N \left[\frac{e_0}{u_l - r_m} + e_0 c K_{12}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{S(u_l, p)}{N} = -\frac{\tau_0}{p} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N \left[-\frac{e_0}{u_l - r_m} + e_0 c K_{21}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{R(u_l, p)}{N} \\ & + \sum_{l=1}^N \left[\frac{\kappa_0}{u_l - r_m} + \kappa_0 c K_{22}^*(r_m, u_l, p) \right] \frac{S(u_l, p)}{N} = -\frac{D_0}{p} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{R(u_l, p)}{N} = 0 \quad (44)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{S(u_l, p)}{N} = 0 \quad (45)$$

其中:

$$u_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2N}\pi\right), \quad (l=1, 2, \dots, N) \quad (46)$$

$$r_m = \cos\left(\frac{m}{N}\pi\right), \quad (m=1, 2, \dots, N-1) \quad (47)$$

式(42)~(45)是一个以 $R(u_l, p)$ 和 $S(u_l, p)$ 为未知数的具有 $2N$ 个方程的方程组, 求解即可得到 $R(u_l, p)$ 和 $S(u_l, p)$ ($l=1, 2, \dots, N$)。

4. 裂纹尖端的温度场

本小节对裂纹尖端热效应的讨论基于以下两个假设：1) 热场与力、电场互不耦合，因此在热传导方程中不包括力电场的量；2) 短时间内的近似绝热过程。这种假设是成立的，因为根据 Bilyk 等^[4]的研究表明当作用电流载荷时，电磁场扩散的时间尺度远小于热传导的时间尺度，因此在电磁场扩散的时间尺度范围内可近似为绝热过程。

根据上述假设，作为压电介质中热传导图程的一级近似，绝热条件下的方程为：

$$p = c_0 \cdot \partial T / \partial t \quad (48)$$

其中 c_0 为比热，对无外部热源作用的情况，根据白象忠等^[2]对导电薄板中利用电冲击阻滞裂纹扩展的研究，可引入热源功率来等效外部点热源作用。导体中的热源功率定义为：

$$p = E \cdot J \quad (49)$$

其中， J 为导体中的电流密度矢量。

功能梯度压电材料属于电介质材料，而对于电介质，电流密度矢量可表示为：

$$J = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (50)$$

类似于导体问题，在压电材料中由式(49)和(50)引入热源功率，将其代入式(48)并对时间积分，得到的压电介质中温度场为：

$$T(x, y, t) = \frac{1}{c_0} \int_0^t E(x, y, \tau) \frac{\partial D(x, y, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (51)$$

由几何方程(1)，本构方程(2)以及式(15)，(18)，有：

$$\begin{aligned} E_x^*(x, y, p) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} is \cdot \frac{e_0}{\kappa_0} [A_1(s, p)e^{t_1 y} + A_2(s, p)e^{t_2 y}] e^{-isx} ds \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} is \cdot [A_3(s, p)e^{t_3 y} + A_4(s, p)e^{t_4 y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} E_y^*(x, y, p) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} [t_1 A_1(s, p)e^{t_1 y} + t_2 A_2(s, p)e^{t_2 y}] e^{-isx} ds \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [t_3 A_3(s, p)e^{t_3 y} + t_4 A_4(s, p)e^{t_4 y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} D_x^*(x, y, p) &= \left(e_{15} - \kappa_{11} \cdot \frac{e_0}{\kappa_0} \right) \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-is) [A_1(s, p)e^{t_1 y} + A_2(s, p)e^{t_2 y}] e^{-isx} ds \\ &- \kappa_{11} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-is) \cdot [A_3(s, p)e^{t_3 y} + A_4(s, p)e^{t_4 y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} D_y^*(x, y, p) &= \left(e_{15} - \kappa_{11} \cdot \frac{e_0}{\kappa_0} \right) \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [t_1 A_1(s, p)e^{t_1 y} + t_2 A_2(s, p)e^{t_2 y}] e^{-isx} ds \\ &- \kappa_{11} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [t_3 A_3(s, p)e^{t_3 y} + t_4 A_4(s, p)e^{t_4 y}] e^{-isx} ds \end{aligned} \quad (55)$$

把(25)~(26)代入上式，并利用(42)~(45)的解，得到(48)中电场强度和电位移强度在 Laplace 变换域中的解为：

$$\begin{aligned} E_x^*(x, y, p) &= c \left[\sum_{l=1}^N K_{ex1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} \right. \\ &\left. + \sum_{l=1}^N K_{ex2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} E_y^*(x, y, p) &= c \left[\sum_{l=1}^N K_{ey1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} \right. \\ &\left. + \sum_{l=1}^N K_{ey2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} D_x^*(x, y, p) &= c \left[\sum_{l=1}^N K_{dx1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} \right. \\ &\left. + \sum_{l=1}^N K_{dx2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} D_y^*(x, y, p) &= c \left[\sum_{l=1}^N K_{dy1}(u_l, x, y, p) \frac{R(u_l, p)}{N} \right. \\ &\left. + \sum_{l=1}^N K_{dy2}(u_l, x, y, p) \frac{S(u_l, p)}{N} \right] \end{aligned} \quad (59)$$

其中 $K_{exi}(u, x, y, p)$ ， $K_{eyi}(u, x, y, p)$ ， $K_{dxi}(u, x, y, p)$ ， $K_{dyi}(u, x, y, p)$ ($i=1,2$) 均为已知函数，具体形式如下：

$$K_{ex1}(u, x, y, p) = \int_0^{+\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} \left[\frac{t_2 e^{t_2 h + t_1 y} - t_1 e^{t_1 h + t_2 y}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} + \frac{t_3 e^{t_3 h + t_4 y} - t_4 e^{t_4 h + t_3 y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right] \times \cos[s(cu - x)] ds \quad (60)$$

$$K_{ex2}(u, x, y, p) = \int_0^{+\infty} \frac{t_4 e^{t_4 h + t_3 y} - t_3 e^{t_3 h + t_4 y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \cos[s(cu - x)] ds \quad (61)$$

$$K_{ey1}(u, x, y, p) = \int_0^{+\infty} \frac{e_0}{\kappa_0} \left[\frac{t_1 t_2 e^{t_1 h + t_2 y} - t_1 t_2 e^{t_2 h + t_1 y}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} + \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h + t_4 y} - t_3 t_4 e^{t_4 h + t_3 y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right] \times \sin[s(cu - x)] ds \quad (62)$$

$$K_{ey2}(u, x, y, p) = \int_0^{+\infty} \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h + t_4 y} - t_3 t_4 e^{t_4 h + t_3 y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \sin[s(cu - x)] ds \quad (63)$$

$$K_{dx1}(u, x, y, p) = \int_0^{+\infty} \left(e_{15} - \kappa_{11} \frac{e_0}{\kappa_0} \right) \frac{t_1 e^{t_1 h + t_2 y} - t_2 e^{t_2 h + t_1 y}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} + \kappa_{11} \left[\frac{t_3 e^{t_3 h + t_4 y} - t_4 e^{t_4 h + t_3 y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right] \cos[s(cu - x)] ds \quad (64)$$

$$K_{dx2}(u, x, y, p) = \int_0^{+\infty} \kappa_{11} \frac{t_4 e^{t_4 h + t_3 y} - t_3 e^{t_3 h + t_4 y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \cos[s(cu - x)] ds \quad (65)$$

$$K_{dx1}(u, x, y, p) = \int_0^{+\infty} \left(e_{15} - \kappa_{11} \frac{e_0}{\kappa_0} \right) \frac{t_1 t_2 e^{t_2 h + t_1 y} - t_1 t_2 e^{t_1 h + t_2 y}}{t_1 e^{t_1 h} - t_2 e^{t_2 h}} - \kappa_{11} \left[\frac{t_3 t_4 e^{t_3 h + t_4 y} - t_3 t_4 e^{t_4 h + t_3 y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \right] \sin[s(cu - x)] ds \quad (66)$$

$$K_{dx2}(u, x, y, p) = \int_0^{+\infty} -\kappa_{11} \frac{t_3 t_4 e^{t_3 h + t_4 y} - t_3 t_4 e^{t_4 h + t_3 y}}{t_3 e^{t_3 h} - t_4 e^{t_4 h}} \times \sin[s(cu - x)] ds \quad (67)$$

通过 Laplace 变换的数值反演, 得到时间域中的电场强度和电位移, 然后根据(51)即可求出裂纹尖端的温度场。其中(60)-(67)在积分路径上不存在奇异点, 可直接进行数值计算。

5. 结果与讨论

本文假定裂纹面 $y = 0$ 处为压电材料 BaTiO_3 , 其材料性质如下^[7-9]: $c_{44} = 44 \text{ Gpa}$, $e_{15} = 11.4 \text{ C/m}^2$, $\kappa_{11} = 1.283 \times 10^{12} \text{ C/Vm}$, $\rho = 5700 \text{ Kg/m}^3$, 只考虑电冲击作用, 令 $\tau_0 = 0$ 。

图 2 给出了在不同的裂纹尺寸下, 裂纹尖端温度随时间变化的关系, 结果表明在时间一定的情况下, 温度随 c/h 的增大而升高, 并且温度在刚开始直线上升达到一个峰值后逐渐趋于一个稳定状态。

图 3 给出了材料参数对温度的影响, 结果显示这些曲线在振荡后趋于稳态。

结果表明: 当作用高电冲击载荷时, 会在裂纹尖端引起较高的温度变化。在此情况下, 裂纹尖端的温

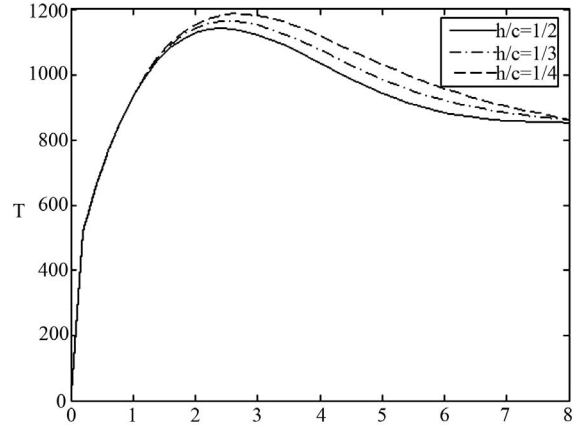


Figure 2. Thermal effects of the size of crack ($\beta = 0.5$, $\tau_0 = 0$, $D_0 = 5 \times 10^4$)

图 2. 裂纹尺寸对温度的影响($\beta = 0.5$, $\tau_0 = 0$, $D_0 = 5 \times 10^4$)

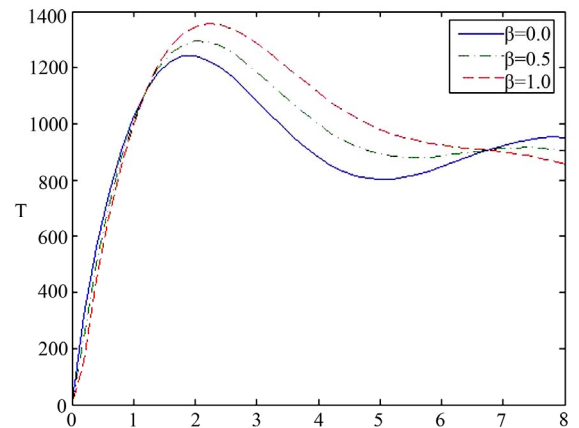


Figure 3. Thermal effect of the parameters β of the materials ($h = 0.5 c$, $\tau_0 = 0$, $D_0 = 5 \times 10^4$)

图 3. 材料参数 β 对温度的影响($h = 0.5 c$, $\tau_0 = 0$, $D_0 = 5 \times 10^4$)

度效应是不能被忽略的。

参考文献 (References)

- [1] R. Fu, C. F. Qian and T. Y. Zhang. Electrical fracture toughness for conductive cracks driven by electric fields in piezoelectric materials. *Applied Physics Letters*, 2000, 76(1): 126-128.
- [2] 白象忠, 胡宇达. 电磁热效应在导电薄板裂纹中的应用[Z]. 白以龙, 杨卫, 主编, 力学 2000-力学 2000 学术会议, 北京, 2000 年 8 月 22-24 日, 331-333.
- [3] 白象忠, 乔桂英, 栾金雨等. 电磁热效应裂纹止裂的实验研究[J]. *实验力学*, 2000, 15(3): 354-360.
- [4] S. B. Bilyk, K. T. Ramesh and T. W. Wright. J. Y. Yang, G. A. Maugin, Eds. Numerical modeling of electro-mechanical interactions in mental cylinders, *mechanics of electro-magnetic materials and structures*, 2000: 1-16.
- [5] 周跃亭. 功能梯度材料中界面裂纹对弹性波的散射及热断裂问题[D]. 上海交通大学, 2007.
- [6] 丁生虎. 功能梯度材料共线裂纹、任意角度裂纹断裂以及热应力问题研究[D]. 上海交通大学, 2009.
- [7] S. H. Ding, X. Li. Thermal stress intensity factors for an interface crack in a functionally graded layered structures. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, 81(7): 943-955.
- [8] Y. T. Zhou, X. Li and D. H. Yu. A partially insulated interface crack between an orthotropic graded coating and an orthotropic homogeneous substrate under heat flux supply. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(6): 768-778.
- [9] Y. T. Zhou, X. Li and J. Q. Qin. Transient thermal stress analysis of orthotropic functionally graded materials with a crack. *Journal of Thermal Stresses*, 2007, 30(12): 1211-1231.
- [10] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 5366- 5370.