

# 结构力学国内外发展

曾声青, 张大朋\*, 严 谨

广东海洋大学船舶与海运学院, 广东 湛江

收稿日期: 2024年2月27日; 录用日期: 2024年3月21日; 发布日期: 2024年3月29日

## 摘 要

结构力学在工程设计和物理学中有不可取代的地位, 结构力学可以应用到桥梁、建筑、航天航空等大型的工程中, 也在纳米结构、细胞构造等微型仪器上有应用, 因此对结构力学的研究至关重要。想要对结构力学的研究有所突破, 那么对结构力学的发展的研究就是必不可少的。本文查询了之前的与结构力学有关的资料和文献, 综述了几篇论文, 并且将结构力学的发展进行了分类归纳和按照时间顺序进行了总结, 得到了结构力学的大致发展史, 并且发现了结构力学和其他物理分支, 比如能量、力法、位移法之间发展的关系。

## 关键词

结构力学, 时间追叙述法, 国内外发展历史

# Structural Mechanics Development at Home and Abroad

Shengqing Zeng, Dapeng Zhang\*, Jin Yan

Ship and Maritime College, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong

Received: Feb. 27<sup>th</sup>, 2024; accepted: Mar. 21<sup>st</sup>, 2024; published: Mar. 29<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Structural mechanics plays an irreplaceable role in engineering design and physics. Structural mechanics can be applied to bridges, buildings, aerospace and other large-scale projects, as well as micro-instruments such as nanostructures and cell structures. Therefore, the study of structural mechanics is of great importance. In order to make a breakthrough in the study of structural mechanics, it is necessary to study the development of structural mechanics. In this paper, the

\*通讯作者。

previous materials and literature related to structural mechanics were inquired, several papers were reviewed, and the development of structural mechanics was classified and summarized in chronological order. The general development history of structural mechanics was obtained, and the relationship between structural mechanics and other branches of physics, such as energy, force method and displacement method, was found.

## Keywords

Structural Mechanics, Time Chasing Narration, Development History at Home and Abroad

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

结构力学是研究物体在外部力作用下的力学行为和变形的力学学科。它探讨了各种结构在外界作用力下的力学行为，以及这些结构如何通过内部力来平衡和支撑。在实际应用中，结构力学被广泛应用于工程设计、建筑设计和材料科学等领域，以确保各种物体结构的稳定性和安全性[1]-[5]。

在 17 世纪由伽利略、开普勒等科学界的通过各自的著作如《新天文学》、《两门新科学的对话》等为经典力学奠定了基础。1687 年，牛顿的著作《自然哲学的数学原理》阐述和建立了牛顿运动定律和万有引力定律，构建了经典力学的框架，随后结构力学便从经典力学的基本框架下发展起来[6] [7]。随着能量原理和能量方法(1717 年虚位原理、1889 年余能方法、1950 年弹性力学的二类变量广义变分法[6] [7] [8])、力法和位移法(1864 年最初提出力法、1935 年提出的松弛法等[9] [10])、矩证位移法和有限元法(1943 年数学上提出过有限制元的思想)等技术的不断发展，结构力学领域也得到了发展。

随着科技的不断进步和国际上结构力学的发展，我们国家也开始加强对结构力学的研究。1950 年我国的钱令希发表了论文“余能理论”是我国研究变分原理的开端[11]，随后我国在这方面也诞生了如 1954 年胡海昌提出的三类变量广义变分原理等影响到国际的科研成果[12]。1960 年代初我国的冯康与西方并驾齐驱，独立发展了有限元法的理论，创立了数值求解偏微分方程的有限元方法，形成了标准的算法形态，编制了通用的工程结构分析计算程序，并在 1965 年发表了“基于变分原理的差分格式”，论文中证明了方法的收敛性和稳定性，给出了误差估计[13] [14]。

本文将从结构力学的研究对象和研究方法两方面回顾国内外结构力学的发展进程，介绍由于结构力学的发展，导致的结构力学本身的变化和结构力学在不同领域应用的变化。本文通过国内外研究现状的整理发现了该领域存在的问题和挑战，并对目前结构力学所存在的问题和挑战进行阐述和分析，以及对未来的技术进行展望并给出自己的见解和建议。本文某种程度上可以帮助该领域的初学者快速了解结构力学的发展历史和大致现状，为该领域的研究学者提供一定的参考。

## 2. 回顾研究历程

### 2.1. 结构力学的发展历程

结构力学作为固体力学的一个重要分支，其发展历程与人类文明和科技进步紧密相连。从 17 世纪牛顿经典力学的创立到 20 世纪五六十年代矩阵位移法和有限元法的形成，结构力学经历了从萌芽到成熟的

过程。

### 2.1.1. 结构力学形成阶段

在早期的结构力学形成阶段，人们对结构的认识主要局限于静态载荷下的反应。这阶段大约可以追溯到古希腊和罗马时代，当时的人们在建造桥梁和建筑物时已经开始考虑到力的传递和结构的稳定性。随着工业革命的兴起，工程结构变得越来越复杂，对设计的精确性要求提高，结构力学作为一门独立的学科应运而生。

### 2.1.2. 结构力学发展奠基

17 世纪和 18 世纪是结构力学发展的关键时期。随着科学革命的推进，牛顿力学的建立为结构力学的发展奠定了基础。牛顿的三大运动定律和万有引力定律为分析和计算结构在受力时的反应提供了理论依据。

### 2.1.3. 分析方法诞生阶段

20 世纪初，随着科学研究的深入，结构力学的分析方法进一步丰富，包括能量法、力法和位移法等。其中，位移法的进一步发展促成了矩阵位移法的诞生，该方法将结构的位移和内力用矩阵表示，极大地简化了计算过程。

### 2.1.4. 计算机时代

20 世纪，尤其是中叶以后，计算机技术的飞速发展和有限元法的出现，极大地推进了结构力学的发展。结构力学不再局限于传统的解析方法，可以利用计算机对复杂结构进行模拟和分析，这使得结构力学的应用范围进一步扩大，从传统的建筑和桥梁工程扩展到了航空航天、海洋工程、生物医学工程等多个领域。

## 3. 结构力学不同分析方法的发展

结构力学在 19 世纪中叶成为了一门独立的学科[15]。结构力学的研究主要分成了三种分析方法[16]，第一种分析方法是由 John Bernoulli 等研究学者，以能量原理和能量方法为理论基础出发推导出了多个用于计算单位位移和内力分析的普遍性方法；在 Maxwell 提出了力法，以及位移法提出之后解决了力法方程求解难的问题，这也形成了结构力学的第二种分析方法；第三种分析方法，是以矩阵法为雏形的有限元法，有限元法的出现使许多待求解问题归结为了代数方程组求解使力学的求解更加统一和简单直观，之后有限元法与计算机相结合，这使得有限元法的影响被进一步放大，有限元法已经成为了涉及力学的科学研究和工程技术等方面中不可缺少的重要工具。

### 3.1. 能量原理和能量方法

能量原理是物理学中的一个基本原理，表述为能量在封闭系统中是守恒的。能量原理的发现和发

#### 3.1.1. 发展历程

17 世纪伽利略提出的在重力场中重力加速度恒定和牛顿提出的万有引力定律为最早的势能原理奠定了基础[17]。19 世纪 Julius Robert von Mayer 等当时的科学家阐明了能量守恒定律[18]。在算法方面拉格朗日和拉格朗日量哈密顿通过引入和哈密顿方程为能量守恒定律建立的严格的数学框架[19] [20]。在能量守恒原理的理论基础上 Arbitrary Lagrangian-Eulerian 最早在 18 世纪提出了虚功原理[21]。在实际应用方面在 19 世纪，Hermann von Helmholtz 和 Lord Kelvin's isotropic helicoid 等科学家便将虚位原理应用到了

如各向同性螺旋面等物理现象和各工程问题上[22] [23], 同时期 Maxwell 和 OttoMohr 在虚位原理的基础推导可以计算梁、钢架等结构指定点位或转角的通用方法——单位载荷法[24], Muller-Breslau 也基于虚位原理进行了深入的研究并且提出了 Muller-Breslau 原理也就是机动法。随着意大利的铁路工程师 Castigliano 在 1879 年发表《弹性系统平衡理论》, 同时把弹性系统运用到了实际当中[23] [24] [25], 在 20 世纪虚功原理正式在弹性材料上进行大规模的应用, 并且受此启发虚功原理被运用到了更多的方面和引进了更多的领域当中。

### 3.1.2. 现阶段状况

在全世界科技快速发展, 人类生活质量显著提高的今天。能量方法和能量原理与其他的学科相结合使得能量原理和方法的到了进一步的发展, 同时生活质量的提高也促进了能量原理和能量方法的进步。

#### (1) 新能源技术

随着全球人口的不断上升, 人类对可再生能源的需求不断增长, 研究人员在太阳能、风能、水能和其他可再生能源领域取得了突破性进展, 以及核能、氢能等该效率能源。例如, 高效太阳能电池、风力发电技术和能量存储系统以及储氢技术和核聚变技术的研发都在不断推进, 以提高能源转换效率和降低成本[26]。

#### (2) 纳米技术和材料科学

纳米技术和材料科学的进步为能量原理和能量方法的应用提供了新的平台。新型纳米材料和器件的开发可能会改变能源转换、能量传输、能量收集等各方面的方式, 从而提高能源效率和降低能源消耗[27]。

#### (3) 生物能量转换

科技的不断进步, 使得生物的研究更进一步, 生物本就是能量的载体, 生物体内时时刻刻都在进行着能量的转换。生物能量转换领域的研究关注如何模仿自然界中的能量转换过程, 例如呼吸作用和生物体内的能量代谢[28]。这些研究可能会带来更高效和可持续的能量转换技术, 例如人工光合作用和生物能源系统的开发。

#### (4) 能源系统优化和智能电网

人口的急剧增加导致的能源高速消耗以及气候的不断变化带来的危机, 都为人类敲响了警钟。为了应对能源危机和气候变化, 研究人员正在开发更高效的能源系统优化方法和智能电网技术。这些技术可以帮助实现能源的高效分配和利用, 减少能源浪费, 并提高能源供应的可靠性和可持续性。

## 3.2. 力学和位移法

力法和位移法是分析超静定结构等多种结构和不同结构状态的基本方法[29] [30], 在结构力学领域内都有着不可替代的作用, 都占有重要的地位。力法和位移法的发展与结构力学的演变紧密相连。

### 3.2.1. 发展历程

在 1864 年, 物理学家 Maxwell 提出了力法[31], Muller-Breslau 于 1886 年作出了根本性的发展, 通过研究提出了 Muller-Breslau 原理并同时拓展到了许多不同的结构和领域[32] [33]。19 世纪末 Ernst Magnús Encke 求解了超静定结构的内力和位移, 对于不同领域的应用 Maxwell 将力学方面和磁学进行了结合建立了电磁场理论等[34]。20 世纪瑞士工程师 Heinrich Gsell 提出了力法的数学模型, 后续科学家们对其进行了验证并将数学模型应用到了工程结构中[35], 这为力法的计算提供了数学基础。基于力法和数学模型的进步, 位移法也孕育而生[36] [37], 位移法很快就运用到了如埃菲尔铁塔等工程设计当中[38], 在 20 世纪中后叶, 约翰·F.霍兰德(John F. Holland)的遗传算法用来优化结构设计。在科技飞速发展的今天, 力法和位移法与计算机等现代的各种科技产品结合在了一起, 使得力法的计算更加简单, 应用更加

灵活和广泛[39] [40] [41] [42]。

### 3.2.2. 现阶段状况

力法和位移法作为分析超静定结构内力的两种基本方法，涉及大量理论基础的同时也需要大量的计算。在现阶段的发展中，力法和位移法的主要研究方向是两者和目前计算能力极强的计算机结合，如何运用最先进的计算方法优化两者的问题，以及在两者的基础上拓展新的计算方法。

#### (1) 计算机辅助计算

现代科技的不断进步带来计算能力和分析能力更强的计算机，同时诞生了大量的结构分析软件。力法和位移法的研究学者可以通过结构分析软件，如 SAP2000、ANSYS 等，进行复杂的力法计算。计算能力极强的计算机以及这些软件能够自动处理大量的计算数据，提高了计算的准确性和效率[41] [42]。

#### (2) 优化算法应用

近年来，力法的求解已经不止局限于传统的计算方法，许多改良优化后的算法更加适合部分的情况，在适当情况的力法分析中引入优化算法，可以更加高效地寻找最优的结构设计方案。如遗传算法、模拟退火算法、未定乘法[36]等，已被应用于力法的求解过程中，以提高求解的效率和准确性。

#### (3) 非线性位移法的开发

在研究时，研究学者所研究的对象不全是线性的，在处理材料非线性、几何非线性以及接触非线性问题时就需运用新的研究方法，非线性位移法便得到了开发和应用。这类方法能够更真实地反映结构的受力情况。

## 3.3. 矩阵位移法和有限元法

矩阵位移法是结构力学中一种重要的计算方法，该方法的基本思想是将结构分解为若干个基本单元，然后通过矩阵的形式来组织和编排这些基本参数，从而求解出结构的未知量，主要是结点位移[43]，矩阵位移法普遍被认为是有限元法的雏形[16]。

### 3.3.1. 回顾发展

美国数学家 Courant 使用线性三角形单元技术结合最小势能原理建立了求解扭转问题泊松方程的变分法，这在之后被认为是有限元法的诞生年[43]，19 世纪 50 年代，有限元法已经开始被用于解决实际如航天航空工程、桥梁和建筑设计、电磁场模拟、流体力学计算等的工程问题[10] [44] [45]，在航空领域于 1953 年 Ray W Clough 提出了 Ritz 分析方法[14] [46] [47]，该方法也在之后也被 Besseling、Melos 和 Jones 陆续证实[48] [49]。有限元法在 1960 年被 Clough 正式命名[50]。1965 年，中国数学家冯康发表了《基于变分原理的差分格式》一文，奠定了有限元法的数学理论基础，并首次提出了有限元法的概念 20 世纪 70 年代，随着计算机技术的进步，有限元分析软件开始商业化，如 ANSYS、ABAQUS 等，这些软件的出现极大地推动了有限元法的普及和应用[51]。进入 21 世纪，随着并行计算技术的发展，有限元法开始利用高性能计算资源，如超级计算机和云计算平台，以处理更大规模的计算问题[52]。

### 3.3.2. 现阶段状况

现阶段，有限元法的发展趋势主要体现在以下几个方面：

(1) 高精度模拟：随着计算机性能的提升，有限元分析可以进行更加精细的网格划分和更高精度的计算，使得模拟结果更加接近实际[53]。

(2) 多物理场耦合分析：现代有限元软件能够同时处理多种物理现象，如热力、流体、电磁等，使得复杂的耦合问题得到更加全面的分析[54]。

(3) 材料模型的发展: 不断有新的材料模型和破坏理论被开发, 以适应更加广泛的应用场景, 如考虑材料疲劳、腐蚀、蠕变等长期行为[55]。

(4) 机器学习和人工智能的融合: 利用机器学习算法对有限元模型进行训练, 以预测复杂系统的响应; 同时, 通过人工智能优化计算过程, 提高效率[56]。

(5) 并行计算和云计算: 大规模并行计算技术的发展使得有限元分析可以利用高性能计算资源, 云计算技术的应用也使得有限元资源可以按需获取, 降低了用户的使用门槛。

(6) 开源软件的兴起: 如 OpenFOAM、Salome-Meca 等开源软件, 提供了有限元分析的能力, 并促进了技术的传播和交流[57]。

(7) 教学和培训的普及: 有限元法已经成为高等院校相关专业的必修课程之一, 同时也在各种短期培训课程和在线教育平台上也非常受欢迎。

(8) 行业规范和标准的完善: 随着有限元法的普及, 越来越多的行业开始制定相关的规范和标准, 以确保使用有限元法的质量和可靠性。

有限元法的发展依然面临着一些挑战, 如算法的优化、计算资源的合理分配、结果的精确性与可靠性等问题。但随着科技的不断进步, 有限元法在工程和科学研究中的应用将变得更加广泛和深入。

## 4. 国内发展

从古代开始结构力学相关的知识就已经有所应用, 如古代建筑、桥梁等。直到近代结构力学才被系统的归纳和总结, 中国在结构力学上的发展和研究同样也经历了一波三折, 从古代的领先到近代的止步不前落后于世界再到现代的飞速发展走在世界前列。中国结构力学的发展和研究可以分成四个阶段。

### 4.1. 古代时期(公元前 2000 年~1644 年)

在该时期中国的建筑和工程实践就已经涉及到了结构力学的一些基本概念, 如力的平衡、材料的稳定性和强度等, 这些基础的概念纵使在该阶段没有被归纳成一门学科, 但是许多基础理论已经应用到了古代木、石建筑, 以及船只、车辆农业用具上。

### 4.2. 缓慢发展时期(公元 1644 年~1840 年)

这一时期清朝实施的闭关锁国政策断绝了中国与西方国家的学术、商业、农业等交流, 也正是这一时期外国正处于工业革命时期, 外国的工业水平、医疗水平等飞速发展, 由于没有与外界进行交流国内的技术领域缓慢发展甚至是止步不前, 于是中国的工程学科逐渐落后于世界。

### 4.3. 引入和学习应用阶段(公元 1840~1949 年)

随着鸦片战争的发生, 清政府的上级官员清楚认识到了清朝和西方列强各方面的差距, 开始引进和学习西方的军事工程等技术, 并派遣留学生出国学习[3], 先进的工程知识便由此进入了中国, 这一阶段工程知识的引进以及为了面对战争购买的大量军事装备都是之后深入研究的重要参考。

### 4.4. 快速发展和深入研究阶段(公元 1949 年~至今)

#### 4.4.1. 快速发展阶段

新中国成立之后, 中国正式开始学习和研究结构力学, 这也是中国结构力学的起步阶段, 由于刚刚结束战争且工业基础薄弱, 许多的研究都是依靠苏联提供的器械和技术支持, 该阶段中国主要是在学习国外近代的研究成果, 以及搭建国内的研究平台, 为国内的工业发展建立起工业基础。

由于国内工业建设的需要，中国开始注重人才的培养并且派遣了一部分学者出国进行学习，在积极的培养政策下，诞生了一众优秀如胡海昌、冯康等一众优秀的研究学者，这一时期中国的结构力学得到了飞速的发展，弥补上了中国在前几百年闭关锁国导致的工业上的落后[58] [59]。

20 世纪 80 年代，中国改革开放带来了经济上的腾飞，以及更多国外高新技术的引进，中国结构力学学者充分结合引进的高新技术和结构力学加速了我国结构力学的发展，经济的迅速发展也提高了我国对结构力学应用的需求，在各方面优势的推动下，中国结构力学逐走到了世界前列的水平，中国也成为了引领结构力学发展的国家之一。

#### 4.4.2. 深入研究阶段(现阶段研究现状)

在中国，结构力学的发展受益于国家对基础设施建设和科技创新的重视，以及高等教育和研究机构的持续投入。当前，中国结构力学的发展状况可以从以下几个方面进行概述：

(1) 教育和研究：中国的大学和研究机构在结构力学的基础理论和应用研究方面取得了显著成就。众多的教授和研究人员在国际上享有声誉，他们在结构优化、抗震设计、高层建筑结构、桥梁工程和隧道工程等领域的成果丰硕。

(2) 规范和标准：中国已经建立了一系列结构设计和施工的规范和标准，如《建筑结构荷载规范》、《工程结构通用规范》等，这些规范不断更新，以反映最新的科学研究成果和技术进步[60]。

(3) 工程应用：结构力学在超高层建筑、大型桥梁、高速铁路、水电工程等众多工程实践中得到了广泛应用。中国工程师运用结构力学原理设计并建造了许多世界级的工程结构，如北京鸟巢体育场、上海塔、港珠澳大桥等[61]。

(4) 计算机辅助设计(CAD)和有限元分析(FEA)：中国工程师广泛使用计算机辅助设计软件进行结构设计，并利用有限元分析软件进行复杂结构的应力、应变分析，这些软件已成为设计和分析过程中不可或缺的工具。

(5) 抗震研究：鉴于中国地处地震多发区，抗震研究一直是结构力学的重点。研究人员在地震工程、结构抗震设计、地震反应分析等方面进行了大量的工作，以提高结构在地震中的安全性和可靠性[62]。

(6) 可持续发展：随着对绿色建筑和可持续发展的重视，结构力学在新型材料研究、节能结构设计、废物利用等方面也在不断取得新的进展[63]。

(7) 国际合作：中国的结构力学研究者和工程师与世界各地的同行保持着密切的交流和合作，参与国际项目和研究计划，不断吸取国际先进技术和管理经验。

总体来看，中国结构力学的发展是全面的，无论是在基础理论研究、工程应用，还是在教育和国际影响力方面都取得了显著的成就。未来，随着科技进步和经济社会的发展，结构力学在中国仍然有着广阔的应用前景和深入研究的价值。

## 5. 现阶段结构力学

现阶段随着经济建设的快速发展，结构力学在高层建筑、大跨度桥梁、地下工程等领域的应用得到了极大的拓展[3] [64]。同时，计算机技术的引入使得结构力学的计算和分析能力得到了显著提升[55] [65]，以及新材料的诞生也让结构力学到达了新阶段[66]。

### 5.1. 新型材料与结构力学结合

现代材料学研究出了一些诸如纳米铁电材料的新型材料，这些新型材料在性能，功能性等方面与传统的木材、石材、钢材等相比能作为信息载体、具有更优秀的导电能力、具有更高效的储能效率等多方面的优点。新型材料的诞生，让建筑或者是器具有了更多样化的功能，同时更多样化的功能也让这些建

筑和器具具有了更多样的结构[55] [65] [66]。

## 5.2. 全新技术在结构力学的应用

21 世纪以来, 计算机飞速发展, 计算机的运算能力和建模能力达到了全新的高度, 这极大地推进了结构力学的发展。结构力学不再局限于传统的解析方法, 可以利用计算机对复杂结构进行模拟和分析, 这使得结构力学的应用范围进一步扩大[55] [65]。

## 5.3. 结构力学在不同领域的应用

现代随着新型材料的研发和全新技术诞生, 结构力学与这些全新的材料和技术进行融合使得工程器械有了更多的功能以及更加强大的性能, 带动了各工程领域的发展。现在结构力学不再仅限于传统的建筑、桥梁、车辆等工程的运用, 而是已经拓展到了航天航空、海洋工程、生物医学工程等全新工程领域的应用[65]。

## 5.4. 现阶段结构力学面临的挑战

- (1) 结构力学中前沿问题的探索, 如新的计算分析方法的探索;
- (2) 新型材料在不断更新, 结构力学如何更好的与新型材料进行结合, 使得新型材料和结构力学发挥出更大的作用;
- (3) 科学技术在不断进步, 结构力学如何能够更加合理的运用这些技术, 使得结构力学的计算更加简便;
- (4) 全新领域的出现必定带来更多的前沿问题, 结构力学如何结合其他领域的优势解决在新领域的探索中产生的问题。

## 6. 总结

本文对中国以及国外的结构力学的发展历程进行了分析, 回顾了中国以及国外结构力学的大致发展过程。通过对历史的分析发现结构力学与其他物理学的领域如能量、力法、有限元法有着密不可分的关系。并对现阶段结构力学的情况进行了简单分析, 得出了结构力学正在和其他领域结合并且运用到了更多的工程领域, 同时也发现了结构力学目前面临的部分挑战。本文简单概述了国内外结构力学的大致发展流程, 以能量、力法和位移法、有限元法三种方法为主体着重论述了结构力学中不同的分析方法的发展历程, 并且发现不同的分析方法最终都会与计算机进行结合, 回顾发展这其实也就是与时代最先进的技术以及科技进行结合, 这说明在未来的研究和发展过程中结构力学不仅仅只在分析方法上有所拓展, 还会将分析方法与时代最先进的科技进行结合以达到更加精确和迅速的分析和计算。本文在一定程度上对结构力学的学习和研究有指导意义。

## 参考文献

- [1] Zhou, X. and Wang, X. (2018) A Large-Scale Test Method for Mechanical Response of Pavement Structure. *Advances in Materials Science and Engineering*, **2018**, Article ID: 2642409. <https://doi.org/10.1155/2018/2642409>
- [2] Faluweki, M.K. and Goehring, L. (2022) Supplementary Material from “Structural Mechanics of Filamentous Cyanobacteria”. The Royal Society Collection.
- [3] Farajpour, A., Ghayesh, M.H. and Farokhi, H. (2018) A Review on the Mechanics of Nanostructures. *International Journal of Engineering Science*, **133**, 231-263. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.09.006>
- [4] Patekar, V. and Kale, K. (2022) State of the Art Review on Mechanical Properties of Sandwich Composite Structures. *Polymer Composites*, **43**, 5820-5830. <https://doi.org/10.1002/pc.26989>
- [5] Weitao, L., Li, D. and Dong, L. (2020) Study on Mechanical Properties of a Hierarchical Octet-Truss Structure. *Com-*

- posite Structures*, **249**, Article ID: 112640. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112640>
- [6] 郭突玲, 沈慧君. 物理学史[M]. 北京: 清华大学出版社, 1993.
- [7] 武际可. 力学史[M]. 重庆: 重庆出版社, 2000.
- [8] Reissner, E. (1950) On a Variational Theorem in Elasticity. *Journal of Mathematical Physics*, **29**, 90-95. <https://doi.org/10.1002/sapm195029190>
- [9] Hibbeler, R.C. (1997) Structural Analysis. 3rd Edition, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River.
- [10] Samuelsson, A. and Zienkiewicz, O.C. (2006) History of the Stiffness Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **67**, 149-157. <https://doi.org/10.1002/nme.1510>
- [11] 钱令希. 余能理论[J]. 中国科学, 1950, 1(2-4): 449-456.
- [12] 胡海昌. 论弹性体力学和受范性体力学中的一般变分原理[J]. 物理学报, 1954, 10(3): 259-290.
- [13] 冯康. 基于变分原理的差分格式[J]. 应用数学和计算数学, 1965, 2(4): 237-261.
- [14] Besseling, J.F. (1963) The Com, Petites Analogy between the Matrix Equations and Continuous Field Equations of Structural Analysis. *International Symposium on Analogue and Digital Techniques Applied to Aeronautics*, Liege, 223-242.
- [15] 李正良. 结构力学的前世今生[J]. 大学科普, 2012, 6(3): 30-31.
- [16] 杨迪雄. 结构力学发展的早期历史和启示[J]. 力学与实践, 2007, 29(6): 85-86.
- [17] Fantoli, A. (2011) Two New, Remarkable Galileo Biographies. *History: Reviews of New Books*, **39**, 99-103. <https://doi.org/10.1080/03612759.2011.598493>
- [18] Aquilini, E., Cosentino, U., Pasqualetti, N. and Signori, F. (2021) Julius Robert Mayer and the Principle of Energy Conservation. *ChemTexts*, **7**, Article No. 22. <https://doi.org/10.1007/s40828-021-00147-w>
- [19] Cheng, C.-A. and Huang, H.-P. (2016) Learn the Lagrangian: A Vector-Valued RKHS Approach to Identifying Lagrangian Systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **46**, 3247-3258. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2015.2501842>
- [20] Bravetti, A., Cruz, H. and Tapias, D. (2017) Contact Hamiltonian Mechanics. *Annals of Physics*, **376**, 17-39. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.11.003>
- [21] Chen, K.-D., Liu, J.-P., Chen, J.-Q., Zhong, X.-Y., Mikkola, A., Lu, Q.-H. and Ren, G.-X. (2019) Equivalence of Lagrange's Equations for Non-Material Volume and the Principle of Virtual Work in ALE Formulation. *Acta Mechanica*, **231**, 1141-1157. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02576-8>
- [22] Collins, D., Hamati, R.J., Candelier, F., Gustavsson, K., Mehlig, B. and Voth, G.A. (2021) Lord Kelvin's Isotropic Helicoid. *Physical Review Fluids*, **6**, Article ID: 074302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.6.074302>
- [23] Romero, I. (2017) A Generalization of Castigliano's Theorems for Structures with Eigenstrains. *Archive of Applied Mechanics*, **87**, 1727-1737. <https://doi.org/10.1007/s00419-017-1282-5>
- [24] Timoshenko, S.P. and Young, D.H. (1965) Structural Theory. 2nd Edition, McGraw Inc., New York. (中译本: Timoshenko, S.P. and Young, D.H. 结构理论[M]. 第2版. 叶红玲, 杨庆生, 译. 北京: 机械工业出版社, 2005)
- [25] Argyris, J.H. 能量原理和结构分析[M]. 郁成勋, 译. 北京: 科学出版社, 1978.
- [26] Davydov, R. (2022) Nuclear and New Energy Technology. *Energies*, **15**, Article No. 6046. <https://doi.org/10.1038/068193a0>
- [27] Shepelin, N.A., Glushenkov, A.M., Lussini, V.C., et al. (2019) New Developments in Composites, Copolymer Technologies and Processing Techniques for Flexible Fluoropolymer Piezoelectric Generators for Efficient Energy Harvesting. *Energy & Environmental Science*, **12**, 1143-1176. <https://doi.org/10.1039/C8EE03006E>
- [28] Röpke, M., Saura, P., Riepl, D., Pöverlein, M.C. and Kaila, V.R.I. (2020) Functional Water Wires Catalyze Long-Range Proton Pumping in the Mammalian Respiratory Complex I. *Journal of the American Chemical Society*, **142**, 21758-21766. <https://doi.org/10.1021/jacs.0c09209>
- [29] Li, W., Chen, S. and Huang, H. (2023) System Reduction-Based Approximate Reanalysis Method for Statically Indeterminate Structures with High-Rank Modification. *Structures*, **55**, 1423-1436. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.06.063>
- [30] Yao, W. and Ye, Z.D. (2004) Internal Force Analysis Due to the Supporting Translation in Statically Indeterminate Structures for Different Elastic Modulus. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, **8**, 274-280. <https://doi.org/10.1007/s11741-004-0063-x>
- [31] Rosales, C. and Lim, K.M. (2005) Numerical Comparison between Maxwell Stress Method and Equivalent Multipole Approach for Calculation of the Dielectrophoretic Force in Single-Cell Traps. *Electrophoresis*, **26**, 2057-2065. <https://doi.org/10.1002/elps.200410298>
- [32] Charlton, T.M. (1980) The Principle of Virtual Work in Relation to Müller-Breslau's Principle. *International Journal*

- of Mechanical Sciences*, **22**, 523-525. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(80\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0020-7403(80)90006-5)
- [33] Shen, W. (1992) The Generalized Müller-Breslau Principle for Higher-Order Elements. *Computers & Structures*, **44**, 207-212. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90239-V](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90239-V)
- [34] Müller, P.C., Pfeiffer, F. and Schiehlen, W. (2012) Kurt Magnus: Commemorating His 100th Birthday. *Archive of Applied Mechanics*, **82**, 1705-1708. <https://doi.org/10.1007/s00419-012-0710-9>
- [35] Huedo, J.I.D., Martínez, J.M. and Montero, P.G. (2005) Dimensioning of Longitudinal Reinforcements in Concrete Beams with a Non-Rectangular Section and Variable Height. *Spanish Journal of Agricultural Research*, **3**, 367-376. <https://doi.org/10.5424/sjar/2005034-163>
- [36] Miller, P.R. and Sarin, R.K. (1971) Modification Techniques in the Matrix Force Method. *The Aeronautical Journal*, **75**, 126-128. <https://doi.org/10.1017/S0001924000044870>
- [37] Boucard, J. (2013) Cyclotomie et formes quadratiques dans l'œuvre arithmétique d'Augustin-Louis Cauchy (1829-1840). *Archive for History of Exact Sciences*, **67**, 349-414. <https://doi.org/10.1007/s00407-013-0115-3>
- [38] Shampo, M.A. and Kyle, R.A. (1982) Leonhard Euler. *JAMA*, **248**, 1072-1072. <https://doi.org/10.1001/jama.248.9.1072>
- [39] Koohestani, K. (2018) Structural Reanalysis via Force Method. *International Journal of Solids and Structures*, **136-137**, 103-111. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.12.008>
- [40] Rezaiee-Pajand, M. and Gharaei-Moghaddam, N. (2017) Frame Nonlinear Analysis by Force Method. *International Journal of Steel Structures*, **17**, 609-629. <https://doi.org/10.1007/s13296-017-6019-3>
- [41] Long, H., Liu, Y., Huang, C., Wu, W. and Li, Z. (2019) Modelling a Cracked Beam Structure Using the Finite Element Displacement Method. *Shock and Vibration*, **2019**, Article ID: 7302057. <https://doi.org/10.1155/2019/7302057>
- [42] Zhou, W., Zhao, Y., Yuan, H. and Wang, X. (2023) Study of the Hull Structural Deformation Calculation Using the Matrix Displacement Method and Its Influence on the Shaft Alignment. *Journal of Marine Science and Engineering*, **11**, Article No. 1495. <https://doi.org/10.3390/jmse11081495>
- [43] Mavriplis, C. (1994) Adaptive Mesh Strategies for the Spectral Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **116**, 77-86. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(94\)80010-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(94)80010-3)
- [44] Hafeez, M.B. and Krawczuk, M. (2023) A Review: Applications of the Spectral Finite Element Method. *Archives of Computational Methods in Engineering*, **30**, 3453-3465. <https://doi.org/10.1007/s11831-023-09911-2>
- [45] Clough, R.W. (2001) Thoughts about the Origin of the Finite Element Method. *Computers and Structures*, **79**, 2029-2030. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00123-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00123-7)
- [46] Cough, R.W. (2004) Early History of the Finite Element Method from the Viewpoint of a Pioneer. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **60**, 283-287. <https://doi.org/10.1002/nme.962>
- [47] Clough, R.W. (1960) The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *Proceedings of 2nd ASCE Conference of Electron Computation*, Pittsburg, 8-9 September 1960, 8.
- [48] Jones, R.E. (1964) A Generalization of the Direct Stiffness Method of Structural Analysis. *AIAA Journal*, **2**, 821-826. <https://doi.org/10.2514/3.2437>
- [49] Wilson, E.L. (1993) Automation of the Finite Element Method—A Personal Historical View. *Finite Elements in Analysis and Design*, **13**, 91-104. [https://doi.org/10.1016/0168-874X\(93\)90049-V](https://doi.org/10.1016/0168-874X(93)90049-V)
- [50] Melosh, R.J. (1963) Basis for the Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method. *AIAA Journal*, **1**, 1631-1637. <https://doi.org/10.2514/3.1869>
- [51] Li, J., Shang, D., Liu, J., *et al.* (2019) Sound Scattering from Targets in Shallow Water by Finite Element Method Combined with Normal-Mode Method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **145**, 1692-1692. <https://doi.org/10.1121/1.5101207>
- [52] Okubo, K., Rougier, E., Lei, Z., *et al.* (2020) Modeling Earthquakes with Off-Fault Damage Using the Combined Finite-Discrete Element Method. *Computational Particle Mechanics*, **7**, 1057-1072. <https://doi.org/10.1007/s40571-020-00335-4>
- [53] Goel, V.K. and Nyman, E. (2016) Computational Modeling and Finite Element Analysis. *Spine*, **41**, S6-S7. <https://doi.org/10.1097/BRS.0000000000001421>
- [54] Dodig, H., Poljak, D. and Cvetković, M. (2021) On the Edge Element Boundary Element Method/Finite Element Method Coupling for Time Harmonic Electromagnetic Scattering Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **122**, 3613-3652. <https://doi.org/10.1002/nme.6675>
- [55] Khaniki, H.B. and Ghayesh, M.H. (2020) A Review on the Mechanics of Carbon Nanotube Strengthened Deformable Structures. *Engineering Structures*, **220**, Article ID: 110711. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110711>
- [56] Chandra, P. and Das, R. (2023) Finite-Element-Based Machine-Learning Algorithm for Studying Gyrotactic-Nanofluid

- Flow via Stretching Surface. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **95**, 1888-1912. <https://doi.org/10.1002/flid.5229>
- [57] Muhammad, N., Zaman, F.D. and Mustafa, M.T. (2022) OpenFOAM for Computational Combustion Dynamics. *The European Physical Journal Special Topics*, **231**, 2821-2835. <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-022-00606-6>
- [58] Park, Y.-S., Kim, S., Kim, N. and Lee, J.-J. (2018) Evaluation of Bridge Support Condition Using Bridge Responses. *Structural Health Monitoring*, **18**, 767-777. <https://doi.org/10.1177/1475921718773672>
- [59] Quan, Y., Chen, J. and Gu, M. (2020) Aerodynamic Interference Effects of a Proposed Taller High-Rise Building on Wind Pressures on Existing Tall Buildings. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, **29**, E1703. <https://doi.org/10.1002/tal.1703>
- [60] Fang, Q., Wang, G., Du, J., *et al.* (2023) Prediction of Tunnelling Induced Ground Movement in Clay Using Principle of Minimum Total Potential Energy. *Tunnelling and Underground Space Technology*, **131**, Article ID: 104854. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2022.104854>
- [61] Faluweki, M.K. and Goehring, L. (2022) Structural Mechanics of Filamentous Cyanobacteria. *Journal of the Royal Society Interface*, **19**, Article ID: 20220268. <https://doi.org/10.1098/rsif.2022.0268>
- [62] 潘毅, 包韵雷, 刘永鑫, 等. 基于中国规范的近断层区竖向抗震设计谱研究[J]. 工程力学, 2021, 38(12): 183-190.
- [63] 毛帮笑, 夏细胜, 王大奎, 等. 烧结温度对 SiO<sub>2</sub>(f)/SiO<sub>2</sub> 陶瓷基复合材料的微观结构和力学性能的影响[J/OL]. 陶瓷学报, 2024(1): 125-132. <https://doi.org/10.13957/j.cnki.txcb.2024.01.012>
- [64] Gao, W. (2018) Integrated Intelligent Method for Displacement Prediction in Underground Engineering. *Neural Processing Letters*, **47**, 1055-1075. <https://doi.org/10.1007/s11063-017-9685-4>
- [65] Yang, C., Wang, C. and Cheng, Z. (2022) Editorial for the Special Issue “Nanoscale Ferroic Materials—Ferroelectric, Piezoelectric, Magnetic, and Multiferroic Materials”. *Nanomaterials*, **12**, Article No. 2951. <https://doi.org/10.3390/nano12172951>
- [66] Lu, W., Thouless, M.D., Hu, Z., Wang, H., Ghelichi, R., Wu, C.-H. and Parks, D. (2016) CASL Structural Mechanics Modeling of Grid-To-Rod Fretting (GTRF). *JOM*, **68**, 2922-2929. <https://doi.org/10.1007/s11837-016-2095-7>