

Duopoly Price Game Model and Its Stability*

Yali Lu

Department of Management and Economy, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou
Email: luyali676@163.com

Received: Nov. 8th, 2011; revised: Nov. 29th, 2011; accepted: Dec. 17th, 2011

Abstract: Based on the adaptive decision-rule, the bounded rationality decision-making method and the delayed price-expectation, we constructed the price game model of differentiation products between two oligopoly firms in this paper. Through extending the game model to the three-dimensional difference equation, we investigated the existence and stability of the fixed points of the price game model. The results show that the model has an unstable boundary fixed point and a local stable Nash equilibrium point, and the parameter conditions ensuring the local stability of Nash equilibrium point are given by employing the Jury's criteria. Simulation experiments confirm that the price adjustment speed is the major factor influencing on the stability of Nash equilibrium point. The variations of weight in the adaptive decision-rule and in the delayed price-expectation all have slight influence on the stability of Nash equilibrium point. The price evolution will give birth to bifurcation and chaos when price adjustment speed takes bigger values. Maintaining lower price-adjustment speed for the oligarchs with bounded rationality decision-making rule is a major route to avoid the chaotic variation of prices.

Keywords: Price Game; Stability; Duopoly; Bifurcation; Chaos

双寡头价格博弈模型及其稳定性*

卢亚丽

华北水利水电学院, 管理与经济学院, 郑州
Email: luyali676@163.com

收稿日期: 2011年11月8日; 修回日期: 2011年11月29日; 录用日期: 2011年12月17日

摘要: 基于适应性决策规则, 有限理性决策方法, 延迟价格预期, 构建了两寡头企业间有差异产品的价格博弈模型。通过把博弈模型扩阶为三维差分方程, 研究了价格博弈模型不动点的存在性和稳定性。结果表明, 该模型有一个不稳定的边界不动点和一个局部稳定的纳什平衡点, 并通过 Jury 判据给出了纳什平衡点局部稳定的参数条件。仿真实验证实, 价格调整速度是影响纳什平衡点稳定性的主要因素, 适应性决策规则与延迟预期价格估计中的权重变化均对纳什平衡点的稳定性影响轻微。在价格调整速度较大时, 价格演化会出现分岔与混沌现象。采用有限理性决策规则的寡头企业保持较低的价格调整速度是避免价格混沌变化的主要途径。

关键词: 价格博弈; 稳定性; 双寡头; 分岔; 混沌

1. 引言

*资助信息: 国家自然科学基金资助项目(71173248); 河南省科技攻关项目(112102210354); 河南省哲学社会科学规划项目(2011FJJ050); 河南省政府决策招标项目(2011B444); 华北水利水电学院高层次人才基金; 管理与经济学院青年教师培养专项基金。

在寡头垄断市场中, 少数寡头企业控制了某一产品的生产和销售。对于产品为同质的情形, 寡头企业间通过产量博弈追求利润最大化, 而对于产品有差异的情形, 寡头企业间通过价格博弈追求最大化利润。

由对同质产品进行产量博弈而建立的模型通常称为古诺(Cournot)模型,其理论研究源于1838年古诺在寡头理论研究所做的工作。由对差异产品通过价格博弈而建立的模型通常称为伯川德(Bertrand)模型,源于1883年伯川德关于该类模型的研究。寡头博弈模型通常具有简单的形式,但其动力学性质往往及其复杂,且非线性博弈模型通常没有解析解,这导致寡头博弈研究曾一度陷入困境。计算机技术的发展和混沌的发现为寡头博弈研究开辟了新的研究手段和方向。近年来,寡头博弈问题引起了众多学者的兴趣,不少学者用朴素决策规则^[1],适应性决策规则^[2,3],有限理性决策规则^[4-6]或它们之间组合的决策方法,研究了来自于不同背景的古诺博弈模型的动力学行为以及分岔与混沌等复杂现象,并发展了许多经济动力系统中混沌行为的控制方法^[7-10]。于此同时,有差异产品价格博弈的动力学复杂性研究也引起了许多学者的广泛关注^[11-14]。本文拟采用不同的决策规则,构建两寡头企业间有差异产品的价格博弈模型,并用解析分析与数值仿真相结合的方法对该模型的不动点及其稳定性进行研究。

2. 模型

设两寡头企业(记为 F_1 和 F_2 ,其参数与变量也分别用下标1与2进行区分,下同)生产某种具有一定差异的可替代产品在市场上出售,其产品需求函数具有如下形式:

$$\begin{cases} Q_1 = a - bp_1 + dp_2 \\ Q_2 = a - bp_2 + dp_1 \end{cases}, \quad (1)$$

这里 Q_1 与 Q_2 分别表示 F_1 和 F_2 的产品需求量, p_1 与 p_2 分别表示 F_1 和 F_2 的产品销售价格, a, b, d 为正参数,其中参数 d 表示 F_1 和 F_2 的产品差异程度。特别地, $d=0$ 表示 F_1 和 F_2 的产品完全不同。随着参数 $d(>0)$ 的逐渐增大, F_1 和 F_2 的产品差异程度逐渐减小,产品的替代性逐渐增强。设 F_1 和 F_2 的常数边际成本分别记为 c_1 和 c_2 ,并设 F_1 和 F_2 的价格决策均在离散时刻点 $n=0, 1, 2, 3, \dots$ 做出,则 F_1 和 F_2 在第 $n+1$ 期的利润函数可分别表示为:

$$\begin{aligned} \pi_1(n+1) &= p_1(n+1) \cdot Q_1(n+1) - c_1 \cdot Q_1(n+1) \\ &= p_1(n+1) \cdot [a - b \cdot p_1(n+1) + d \cdot p_2^e(n+1)] \\ &\quad - c_1 \cdot [a - b \cdot p_1(n+1) + d \cdot p_2^e(n+1)] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \pi_2(n+1) &= p_2(n+1) \cdot Q_2(n+1) - c_2 \cdot Q_2(n+1) \\ &= p_2(n+1) \cdot [a - b \cdot p_2(n+1) + d \cdot p_1^e(n+1)] \\ &\quad - c_2 \cdot [a - b \cdot p_2(n+1) + d \cdot p_1^e(n+1)] \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $p_1^e(n+1)$ 表示 F_2 对 F_1 在第 $n+1$ 期的产品价格的预期, $p_2^e(n+1)$ 表示 F_1 对 F_2 在第 $n+1$ 期的产品价格的预期。由一阶最优条件 $\partial \pi_1(n+1)/\partial p_1(n+1)=0$ 与 $\partial \pi_2(n+1)/\partial p_2(n+1)=0$ 可求得两寡头企业的最优价格响应函数为:

$$\begin{cases} p_1(n+1) = f(p_2^e(n+1)) \\ p_2(n+1) = g(p_1^e(n+1)), \end{cases} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{cases} f(p_2^e(n+1)) = [a + b \cdot c_1 + d \cdot p_2^e(n+1)] / (2b) \\ g(p_1^e(n+1)) = [a + b \cdot c_2 + d \cdot p_1^e(n+1)] / (2b) \end{cases}$$

由于市场信息的不完全性,企业文化的差异,以及众多不确定因素对产品需求的影响等,企业 F_1 和 F_2 在进行价格决策时往往采用不同的决策规则。不妨假设 F_1 采用适应性决策规则进行价格决策,即第 $n+1$ 期的产品定价由其第 n 期的价格与第 $n+1$ 期的最优价格响应函数的加权和确定。假设 F_2 采用有限理性决策规则,即在第 n 期的边际利润为正(负)时,企业 F_2 将在第 $n+1$ 期提高(降低)其产品价格。因而,两寡头企业的价格博弈模型可表示为如下形式:

$$\begin{cases} p_1(n+1) = (1-\beta) \cdot p_1(n) + \beta \cdot f(p_2^e(n+1)) \\ p_2(n+1) = p_2(n) + v \cdot p_2(n) \cdot \frac{\partial \pi_2(n)}{\partial p_2(n)} \end{cases}, \quad (5)$$

这里 $\beta \in (0,1)$ 表示 F_1 设定的权重。特别地, $\beta=1$ 表示 F_1 按照最优价格响应函数进行价格决策。 $v(>0)$ 表示 F_2 的价格调整速度。由(3)式易求得 F_2 在第 n 期的边际利润函数为

$$\frac{\partial \pi_2(n)}{\partial p_2(n)} = a + b \cdot c_2 - 2b \cdot p_2(n) + d \cdot p_1(n). \quad (6)$$

对价格预期 $p_2^e(n+1)$ 的估计有多种方法,利用状态延迟的加权和来估计价格预期是其中的一种,即:

$$p_2^e(n+1) = \sum_{i=1}^k w_i \cdot p_2(n-i+1),$$

这里 $w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1, 0 < w_i < 1, i=1, 2, \dots, k$ 。

本文取 $k=2$ 的情形, 并记 $w_1 = w$, $w_2 = 1-w$ 。从而有

$$p_2^e(n+1) = w \cdot p_2(n) + (1-w) \cdot p_2(n-1). \quad (7)$$

利用(5), (6), (7)式, 两寡头企业价格博弈模型的具体表达式如下:

$$\begin{cases} p_1(n+1) = (1-\beta) \cdot p_1(n) + \beta \cdot \frac{1}{2b} [a + b \cdot c_1 + d \cdot (w \cdot p_2(n) + (1-w) \cdot p_2(n-1))] \\ p_2(n+1) = p_2(n) + v \cdot p_2(n) \cdot [a + b \cdot c_2 - 2b \cdot p_2(n) + d \cdot p_1(n)] \end{cases} \quad (8)$$

3. 不动点稳定性分析

方程(8)包含价格的状态延迟, 为研究方程(8)的不

动点及其稳定性, 需要引入一个新的价格变量 p_3 来表示价格延迟。记 $p_3(n+1) = p_2(n)$, 则方程(8)可扩阶为如下的三维离散动力系统

$$\begin{cases} p_1(n+1) = (1-\beta) \cdot p_1(n) + \beta \cdot \frac{1}{2b} [a + b \cdot c_1 + d \cdot (w \cdot p_2(n) + (1-w) \cdot p_3(n))] \\ p_2(n+1) = p_2(n) + v \cdot p_2(n) \cdot [a + b \cdot c_2 - 2b \cdot p_2(n) + d \cdot p_1(n)] \\ p_3(n+1) = p_2(n) \end{cases} \quad (9)$$

解方程(9)可得其两个不动点: 边界不动点

$$E_1 = \left(\frac{a+bc_1}{2b}, 0, 0 \right) \text{ 和 纳什平衡点 } E_2 = (p_1^*, p_2^*, p_3^*),$$

这里

$$p_1^* = \frac{d(a+bc_2) + 2b(a+bc_1)}{4b^2 - d^2},$$

$$p_2^* = p_3^* = \frac{2b(a+bc_2) + d(a+bc_1)}{4b^2 - d^2}.$$

方程(9)在任意点 (p_1, p_2, p_3) 处的雅可比矩阵为

$$J(p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 1-\beta & \frac{\beta dw}{2b} & \frac{\beta d(1-w)}{2b} \\ vdp_2 & \Delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

这里 $\Delta = 1 + v(a+bc_2) - 4bvp_2 + vdp_1$ 。

命题 1. 不动点 E_1 是不稳定不动点。

事实上, 在不动点 $E_1 = \left(\frac{a+bc_1}{2b}, 0, 0 \right)$ 处, 雅可比

矩阵变为

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1-\beta & \frac{\beta dw}{2b} & \frac{\beta d(1-w)}{2b} \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

方程(10)中,

$$A_1 = \frac{(\beta-2)(4b^2-d^2) + 4vb^2(a+bc_2) + 2bvd(a+bc_1)}{4b^2-d^2},$$

$$A_2 = \left\{ (a+bc_1) [vd^3\beta w + 4db^2v(1-\beta)] + 2vb(a+bc_2) [d^2\beta w + 4b^2(1-\beta)] + 2b(1-\beta) [d^2 - 4b^2] \right\} / \left\{ 2b(d^2 - 4b^2) \right\},$$

这里符号 $\Lambda = 1 + v(a+bc_2) + \frac{vd(a+bc_1)}{2b}$ 。矩阵 $J(E_1)$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1 + v(a+bc_2) + \frac{vd(a+bc_1)}{2b}$, $\lambda_2 = 0$,

$\lambda_3 = 1 - \beta$ 。由 $\beta \in (0, 1)$, 以及 v, a, b, c_1, c_2, d 为正参数可知, $\lambda_1 > 1$, $0 < \lambda_3 < 1$, 从而, 由离散动力系统稳定性理论可知, 不动点 E_1 为不稳定不动点。

命题 2. 纳什平衡点 $E_2 = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ 是局部稳定不动点。

在纳什平衡点 $E_2 = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ 处, 雅可比矩阵变为

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} 1-\beta & \frac{\beta dw}{2b} & \frac{\beta d(1-w)}{2b} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

这里

$$\Delta_1 = \frac{vd[d(a+bc_1) + 2b(a+bc_2)]}{4b^2 - d^2},$$

$$\Delta_2 = 1 + v(a+bc_2) - \frac{2bvd(a+bc_1) + v(a+bc_2)(8b^2 - d^2)}{4b^2 - d^2}.$$

雅可比矩阵 $J(E_2)$ 的特征方程为

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0, \quad (10)$$

$$A_3 = \frac{vd^2\beta(1-w)[d(a+bc_1)+2b(a+bc_2)]}{2b(d^2-4b^2)}$$

由离散动力系统稳定性理论知, 纳什平衡点

$E_2 = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ 稳定的充要条件为: 特征方程(10)的三个特征根的模均小于 1。该条件等价于下面的 Jury 判据^[15,16]:

$$3 + A_1 - A_2 - 3A_3 > 0, \quad (11)$$

$$1 - A_2 + A_3(A_1 - A_3) > 0, \quad (12)$$

$$1 - A_1 + A_2 - A_3 > 0. \quad (13)$$

$$6.6593v + 2\beta + 0.2997v\beta w - 3.32967v\beta - 0.8990v\beta(w-1) > 0 \quad (14)$$

$$0.2997v\beta w + \beta + 3.3297v - 3.3297v\beta + 0.2997v\beta(w-1)(-2 + 3.3297v + \beta - 0.2997v\beta(w-1)) > 0 \quad (15)$$

$$4 - 6.6593v - 2\beta - 0.2997v\beta w + 3.3297v\beta - 0.2997v\beta(w-1) > 0 \quad (16)$$

对于 $w = 0.2$, $w = 0.5$, $w = 0.8$ 三种情形, 纳什平衡点 $E_2 = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ 在 (β, v) 平面上的局部稳定性区域分别见图 1, 图 2 和图 3。仔细观察图 1, 图 2 和图 3 可以看出, 沿着稳定性区域的上边界, 随着 β 增大, 图 1 中价格调整速度 v 缓慢递增, 图 2 中 v 几乎无变化, 图 3 中 v 缓慢递减。这表明, 预期价格 $p_2^e(n+1)$ 估计中的状态延迟因素对不动点 E_2 局部稳定性区域的影响非常轻微。另一方面, 由图 1, 图 2 和图 3 还可以看出, 当权重 β 在区间 $[0,1]$ 上变动时, 价格调整速度 v 沿局部稳定性区域上边界变动的波动范围很小。这说明权重 β 变动对不动点 E_2 的局部稳定性区域的影响也很小。不动点 E_2 的局部稳定性主要由价格调整速度 v 的取值决定。

为研究价格调整速度 v 对方程(9)动力学性质的影响, 取 $\beta = 0.6$, $w = 0.5$, 其它参数取值同前。让价格调整速度 v 在区间 $[0,0.9]$ 上按步长 0.001 变化, 对于 v 在区间 $[0,0.9]$ 上的每一个取值, 取价格初值 $p_1(0) = 0.3$, $p_2(0) = 0.2$, $p_3(0) = 0.2$, 把方程(9)迭代 500 次并用后 300 次稳态价格数据绘制的价格 p_1 , p_2 关于调整速度 v 的分岔图见图 4。用定义法^[17] 计算出的方程(9)的最大李雅普诺夫指数关于价格调整速度 v 的变动曲线见图 5。比较图 4 和图 5 可以看出, 价格 p_1 , p_2 的分岔点与最大李雅普诺夫指数的零点对应的 v 值是相同, 这表明用分岔图 4 和最大李雅普诺夫指数曲线图 5 来识别方程(9)价格演化的稳定性可以得出一致的结论。最大李雅普诺夫指数大于 0

由于满足不等式组(11), (12), (13)的参数取值区域是参数空间的局部区域, 从而可知, 不动点 E_2 是局部稳定的不动点。

4. 数值仿真

为直观了解两寡头企业价格博弈模型(8)的动力学性质, 下文用 MATLAB 7.0 编写程序进行仿真研究。取参数值为^[13]: $a = 2$, $b = 0.5$, $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.8$, $d = 0.3$, 由(11), (12), (13)式, 纳什平衡点 $E_2 = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ 局部稳定性的 Jury 判据可表示为如下三个不等式:

是价格演化出现混沌的标志。由图 4, 图 5 及数值计算结果知, 在 $0 < v < 0.6$ 时, 企业 F_1 和 F_2 的价格分别被稳定到不动点 3.0989 与 3.3297。 $v = 0.6$ 时计算的最大李雅普诺夫指数值为 -0.0136 , 几乎接近于 0。在 $v > 0.6$ 时, F_1 和 F_2 的价格演化开始出现倍周期分岔现象。在 $0.6 < v < 0.751$ 时, F_1 和 F_2 的价格演化被控制到周期 2 状态。此时, 与采用适应性决策规则的企业 F_1 的价格波动幅度相比, 采用有限理性决策方法的企业 F_2 的价格演化波动幅度较大。 $v = 0.751$ 时计算出的最大李雅普诺夫指数值为 -0.0078 , 也几乎接近于 0。在 $v > 0.751$ 时, F_1 和 F_2 的价格演化继续发生倍周期分岔现象, ..., 在 $v = 0.787$ 时, 最大李雅普诺夫指数值为 0.0483, 从图 4 和图 5 也可明显看出, 在 $v > 0.787$ 时, 价格演化开始发生混沌变化。同时结合最大李雅普诺夫指数计算结果也可以看出, 在 $v = 0.854$ 时, 分岔图中出现明显的周期窗口。此外, 由图 4 可以明显看出, 在价格演化出现分岔与混沌变化时, 采用适应性决策规则的企业 F_1 的价格波动幅度远小于采用有限理性决策方法的企业 F_2 的价格波动幅度。

为研究产品差异度对不动点 E_2 稳定性的影响, 取参数 $\beta = 0.6$, $w = 0.5$, 不动点 E_2 在 (d, v) 平面上的局部稳定性区域见图 6。由图 6 可见, 在 $d = 0$ 时(即 F_1 和 F_2 的产品完全不同时), 能使不动点 E_2 稳定的调整速度 v 的取值范围最大, 即 $v \in (0, 0.836)$ 。随着 d 的增大(即产品差异程度的减小), 能使不动点 E_2 稳定的价格调整速度 v 的最大取值沿着局部稳定性区域的上

边界几乎呈直线快速下降趋势。当 $d > 0.968$ 时，对于任意价格调整速度 v ，不动点 E_2 都是不稳定的。

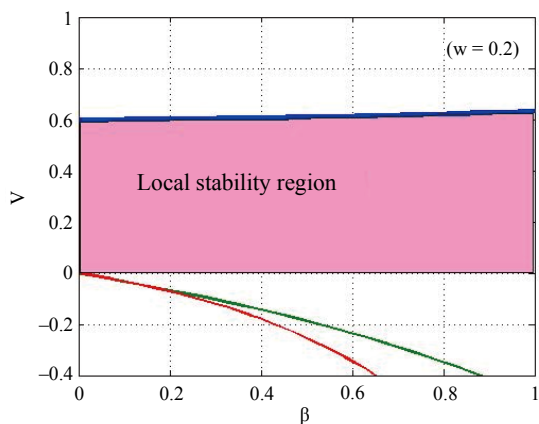


Figure 1. Local stability region of fixed point E_2 on (β, v) plane
图 1. 不动点 E_2 在 (β, v) 平面上的局部稳定性区域

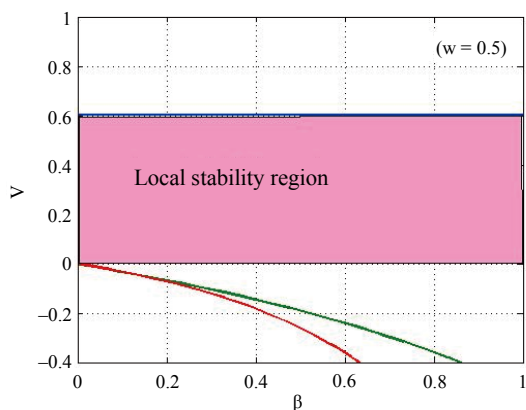


Figure 2. Local stability region of fixed point E_2 on (β, v) plane
图 2. 不动点 E_2 在 (β, v) 平面上的局部稳定性区域

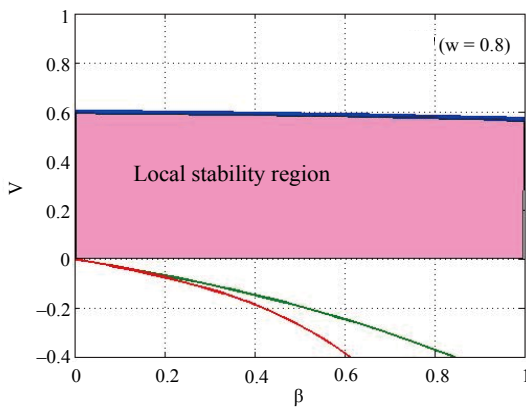
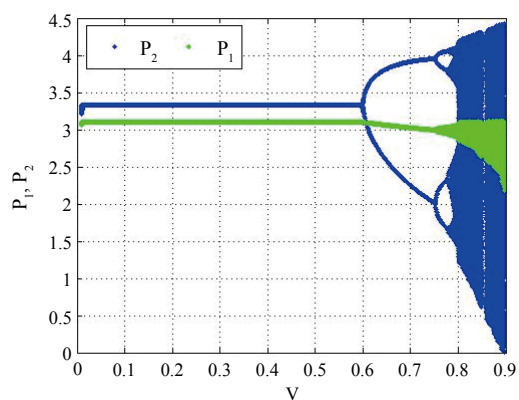
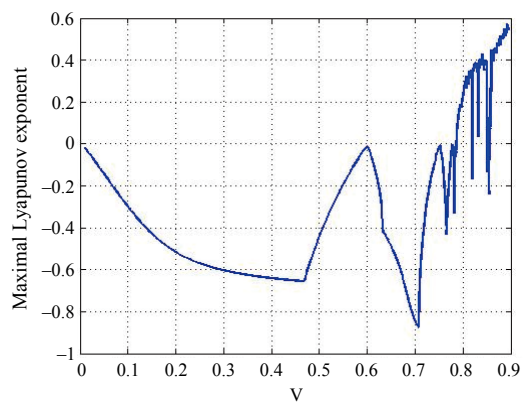


Figure 3. Local stability region of fixed point E_2 on (β, v) plane
图 3. 不动点 E_2 在 (β, v) 平面上的局部稳定性区域



($a = 2, b = 0.5, c_1 = 0.2, c_2 = 0.8, \beta = 0.6, w = 0.5, d = 0.3$)

Figure 4. Bifurcation diagram of both price p_1 and p_2 with respect to adjustment speed v
图 4. 价格 p_1, p_2 关于调整速度 v 的分岔图



($a = 2, b = 0.5, c_1 = 0.2, c_2 = 0.8, \beta = 0.6, w = 0.5, d = 0.3$)

Figure 5. Maximal Lyapunov exponent curve of Equation (9) with respect to v
图 5. 方程(9)最大李雅普诺夫指数随 v 变动曲线

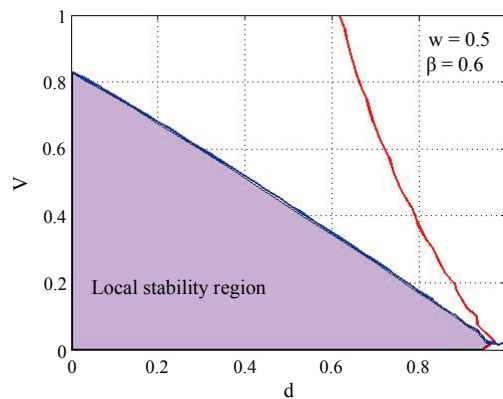


Figure 6. Local stability region of fixed point E_2 on (d, v) plane
图 6. 不动点 E_2 在 (d, v) 平面上的局部稳定性区域

5. 结论

本文基于双寡头市场上具有一定差异的产品的价格博弈问题, 假设两寡头企业分别采用适应性决策规则和有限理性决策方法, 同时考虑用时间延迟方法对价格预期进行估计, 构建了两寡头企业间的价格博弈模型。通过把博弈模型扩阶为三维差分方程, 证明了价格博弈模型具有一个不稳定的边界不动点和一个局部稳定的纳什平衡点, 并利用 Jury 判据, 给出了纳什平衡点的局部稳定性区域所满足的解析条件。数值仿真(价格演化关于价格调整速度的分岔图, 最大李雅普诺夫指数曲线图, 以及参数空间上的局部稳定性区域图等)进一步证实, 两寡头企业的价格演化在价格调整速度较大时会引起价格演化的分岔与混沌现象。适应性决策方法中的权重(β)变化, 以及预期价格估计中的权重(w)变动等对纳什平衡点 E_2 的局部稳定性区域的形状和面积没有显著的影响。价格调整速度 v 的变动是影响纳什平衡点 E_2 稳定性的主要因素。随着两企业产品差异程度的减小(即随着 d 的增大), 能使纳什平衡点 E_2 稳定的调整速度 v 的取值范围缩小。与采用有限理性决策规则的企业 2 相比, 采用适应性决策方法的企业 1 的价格波动幅度较小。采用有限理性决策方法的企业 2 保持较低的价格调整速度是避免价格混沌变化的主要途径。

参考文献 (References)

- [1] L. Chen, G. R. Chen. Controlling chaos in an economic model. *Physica A*, 2007, 374(1): 349-358.
- [2] H. N. Agiza, A. A. Elsadany. Chaotic dynamics in nonlinear duopoly game with heterogeneous players. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 149(3): 843-860.
- [3] 陈国华, 李煜, 盛昭瀚. 基于不同决策规则的产出系统的混沌与控制[J]. *系统工程理论与实践*, 2004, 24(5): 84-90.
- [4] A. A. Elsadany. Dynamics of a delayed duopoly game with bounded rationality. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 52(9-10): 1479-1489.
- [5] 卢亚丽, 薛惠锋, 李战国. 一类经济博弈模型的复杂动力学分析及混沌控制[J]. *系统工程理论与实践*, 2008, 28(4): 118-123.
- [6] H. N. Agiza, A. A. Elsadany. Nonlinear dynamics in the Cournot duopoly game with heterogeneous player. *Physica A*, 2003, 320: 512-524.
- [7] W. J. Wu, Z. Q. Chen and W. H. Ip. Complex nonlinear dynamics and controlling chaos in a Cournot duopoly economic model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(5): 4363-4377.
- [8] J. A. Ho lyst, K. Urbanowicz. Chaos control in economical model by time-delayed feedback method. *Physica A*, 2000, 287(3-4): 587-598.
- [9] J. G. Du, T. W. Huang, Z. H. Sheng and H. B. Zhang. A new method to control chaos in an economic system. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 217(6): 2370-2380.
- [10] J. S. Cánovas, S. Paredes. On the control of some duopoly games. *Mathematical and Computer Modelling*, 2010, 52(7-8): 1110-1115.
- [11] E. Ahmed, M. F. Elettrey and A. S. Hegazi. On Puu's incomplete information formulation for the standard and multi-team Bertrand game. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 30(5): 1180-1184.
- [12] B. G. Xin, T. Chen. On a master-slave Bertrand game model. *Economic Modelling*, 2011, 28(4): 1864-1870.
- [13] J. X. Zhang, Q. L. Da and Y. H. Wang. The dynamics of Bertrand model with bounded rationality. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 39(5): 2048-2055.
- [14] C. H. Tremblay, V. J. Tremblay. The Cournot-Bertrand model and the degree of product differentiation. *Economics Letters*, 2011, 111(3): 233-235.
- [15] E. M. Elabbasy, H. N. Agiza and A. A. Elsadany. Analysis of nonlinear triopoly game with heterogeneous players. *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, 57(3): 488-499.
- [16] S. N. Elaydi. *An introduction to difference equations*. New York: Springer-Verlag Publishers, 1996.
- [17] 吕金虎, 陆君安, 陈士华. *混沌时间序列分析及其应用*[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.