Modern Management 现代管理, 2012, 2, 45-49
http://dx.doi.org/10.12677/mm.2012.21009 Published Online January 2012 (http://www.hanspub.org/journal/mm)

Estimation of GM(1,1) Model Parameter Based on LS-SVM Algorithm and Application in Load Forecasting

Deqiang Zhou

School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou
Email: zdqmfk@yahoo.com.cn

Received: Jun. 28th, 2011; revised: Jul. 20th, 2011; accepted: Aug. 15th, 2011

Abstract: In order to overcome the defects of traditional parameters estimation method in GM(1,1) model by means of least square procedure and enhance the forecasting accuracy of GM(1,1) in medium and long-term load forecasting precision, an improvement GM(1,1) model based on LS-SVM algorithm is presented. This method constructs the grey LS-SVM with background value and raw data series as the training sample according to the character of grey difference equation, converts the GM(1,1) model parameter estimation problem into a grey LS-SVM parameter estimation problem, then the regression parameters in the grey LS-SVM are solved based on the LS-SVM algorithm and the GM(1,1) model parameters estimation are also obtained. Using this method in this paper to estimate the GM(1,1) model, the method follows structural risk minimization principles, algorithm has the advantage of fast speed, strong robustness, suitable for GM(1,1) model of small samples. This method is applied to long-term load forecasting, compared with forecasting effect analysis of traditional GM(1,1) model to prove the validity and the superiority of the model.

Keywords: Load Forecasting; Parameter Estimation; GM(1,1) Model; Least Square Support Vector Machines Method

估计 GM(1,1)模型中参数的 LS-SVM 方法及其在负荷预测中的应用

周德强

长江大学信息与数学学院，荆州
Email: zdqmfk@yahoo.com.cn

收稿日期：2011 年 6 月 28 日；修回日期：2011 年 7 月 20 日；录用日期：2011 年 8 月 15 日

摘　要：为克服利用传统最小二乘法估计 GM(1,1)模型参数的缺陷，改善 GM(1,1)模型在中长期负荷预测中的精度，提出了基于 LS-SVM 算法估计 GM(1,1)模型中参数的方法。该方法根据 GM(1,1)灰色差分方程的特点，构造以背景值序列和原始序列为训练样本的灰色 LS-SVM，将 GM(1,1)模型参数的估计问题转化为灰色 LS-SVM 的参数估计问题，依据 LS-SVM 算法求得灰色 LS-SVM 的参数，进而得到 GM(1,1)模型的参数估计。利用本文方法估计 GM(1,1)模型的参数，方法上遵循了结构风险最小化原则，算法实现上具有速度快，稳健性强的优点，适合 GM(1,1)小样本建模的特点。将本文方法应用于中长期负荷预测，通过与传统的 GM(1,1)模型预测效果的对比分析，验证了该模型的有效性和优越性。

关键词：负荷预测；参数估计；GM(1,1)模型；LS-SVM 算法

1. 引言

电力负荷预测对电力系统的安全生产、经济运行、控制和规划非常重要。电力负荷预测的关键问题是预测技术和方法。众多学者提出了短期和中长期负荷预测的方法[1-6]。灰色 GM(1,1)模型适合处理少数据、小样本、信息不全的不确定性问题，计算简便。电力负荷系统是一种典型的灰色系统，因此灰色理论在负荷预测中得到了广泛应用[7-9]。在应用 GM(1,1)模型进行负荷预测时，首先要确定模型中的参数，GM(1,1)建模过程中的参数估计是非常重要的。因为其参数估计将直接影响预测的精度。一般地，估计修正和改进的 GM(1,1)模型中的参数，采用的是最小二乘法[7,8,10,11]。但最小二乘法首先需假设数据总体为正态分布，并且建立在残差平方和最小基础上，最小化的目标依据的是经验风险最小化(ERM)[12]原则，灰色预测模型所用统计数据一般较少、信息不完全，然而在参数估计的过程中采用 ERM 这种以大样本理论为基础的原则，往往无法保证在样本有限时仍能得到好的结果[12]，这也是传统 GM(1,1)模型精度不高的一个重要原因。其次，基于残差平方和最小寻优，很容易陷入局部最小，对于非线性较强的负荷，应用最小二乘法得到的结果会产生很大的偏差[9,13]。另一方面最小二乘法稳健性较差，若中长期负荷存在奇异点，应用最小二乘法会导致异常数据产生过分不恰当的影响，从而影响到 GM(1,1)模型的预测精度[9,13]。

统计学习理论[12]是专门针对小样本情况下的学习问题建立的一套新的理论体系．它建立在结构风险最小化原则(SRM)[12]基础上，对总体的分布不需做特殊要求，而由 Vapnik 等人所创立的支持向量机(SVM)[12]学习算法，以及 Suykens 等人在此基础上提出的最小二乘支持向量机(LS-SVM)[14]则是实现这一新原则的实际方法。这些算法是在模型的复杂性与推广性之间寻求折中，保证模型具有较强的推广性能和稳健性，适合 GM(1,1)模型小样本建模的特点。因此，本文将 LS-SVM 算法与 GM(1,1)模型相结合，提出了基于 LS-SVM 算法估计 GM(1,1)模型中的参数，克服传统 GM(1,1)建模存在的上述缺陷。该方通过构造以背景值序列和原始序列为训练样本的灰色 LS-SVM，将 GM(1,1)模型参数的估计问题转化为灰色 LS-SVM 的参数估计问题，依据 LS-SVM 算法求得灰色 LS-SVM 的参数，进而得到 GM(1,1)模型的参数估计。将模型应用于中长期负荷预测，表明本文的方法是可行的且有效的，比传统方法预测精度高。

2. 传统 GM(1,1)模型建模机理

建立 GM(1,1)模型的一般步骤如下[12]：

1) 设 $X^{(0)}=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)$ 表示原始电力负荷数据序列。

2) 作累加生成：$x_k^{(1)}=\sum_{j=1}^{k}x_j^{(0)},\left(k=1,2,3,\cdots,n\right)$，得到 $X^{(1)}=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}\right)$。

3) 模型建立：$X^{(1)}$ 的白化方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b, \tag{1}$$

其中 a,b 为参数，t 为时间。用原始数据序列 $x_k^{(0)}$ 近似代替微分方程中的 $\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}$，并利用 $z_k^{(1)}=0.5\left(x_k^{(1)}+x_{k-1}^{(1)}\right),\left(k=2,3,\cdots,n\right)$，作紧邻均值生成 $Z^{(1)}=\left(z_2^{(1)},z_3^{(1)},\cdots,z_n^{(1)}\right)$，代换 $x^{(1)}$，则式(1)变为

$$X^{(0)}+aZ^{(1)}=b, \tag{2}$$

4) 模型求解：对应 n 个时间序列，(2)式可构成一方程组：

$$Y=B\alpha, \tag{3}$$

其中：$Y=\left(x_2^{(0)},x_3^{(0)}\cdots,x_n^{(0)}\right)^T$，$B=\begin{pmatrix}-z_2^{(1)} & -z_3^{(1)} & \cdots & -z_n^{(1)}\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^T$，对参数 a,b 做最小二乘估计

$$\min_{a,b}\sum_{k=2}^{n}\left(x_k^{(0)}+az_k^{(1)}-b\right)^2, \tag{4}$$

解得 $\left(\hat{a},\hat{b}\right)^T=\left(B^TB\right)^{-1}B^TY$，解微分方程(1)，并进行累加，得到预测模型

$$\hat{x}^{(1)}\left(k+1\right)=\left(x_1^{(0)}-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right)e^{-\hat{a}k}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}, \tag{5}$$

从而可得原始数据的拟合值为

$$\hat{x}^{(0)}\left(k+1\right)=\hat{x}^{(1)}\left(k+1\right)-\hat{x}^{(1)}\left(k\right),\quad k=1,2,\cdots,n-1 \tag{6}$$

3. 基于 LS-SVM 算法估计 GM(1,1)的参数估计

3.1. 传统 GM(1,1)模型参数估计的缺陷

首先，从式(4)可见，在传统 GM(1,1)模型中，参数估计采用最小二乘法，可归结为对经验风险泛函[12]

$$R_{\text{emp}}=\sum_{k=2}^{n}\left(x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b\right)^2, \tag{7}$$

最小化的问题。灰色预测模型所用统计数据一般较少，式(7)依据的却是基于大样本统计理论的 ERM 原则最小化经验风险,往往无法保证在样本有限时仍能得到好的结果，即模型的推广性未必很好。

其次，基于残差平方和最小寻优，很容易陷入局部最小，对于非线性较强的负荷，应用最小二乘法得到的结果会产生很大的偏差。

另一方面，最小二乘法利用

$$\left[x_k^{(0)}-\left(-az_k^{(1)}+b\right)\right]^2$$

刻画真实值 $x_k^{(0)}$ 与模型值 $-az_k^{(1)}+b$ 的偏差，主要考虑到计算简便，参数估计易于用公式求解，但当原始数据存在奇异点时，平方会放大奇异点对可信度的影响，导致 GM(1,1)模型的预测效果不好，即最小二乘法的稳健性不好[9,13]。在中长期负荷预测中，经常会出现异常点，而异常点恰好在某些方面反映了一些特殊的信息，不应随意剔除。

综上所述，利用 GM(1,1)模型进行中长期负荷预测时，不宜用最小二乘法估计模型参数，需要修正传统 GM(1,1)模型中参数的估计原则，采用针对小样本的估计原则更适合 GM(1,1)建模。

Suykens 等人提出的 LS-SVM 算法，建立在 SRM 原则下，具备非线性拟合性好、泛化能力强，运算速度快[7]、不依赖样本的分布类型、小样本等特点。因此，用 LS-SVM 算法估计 GM(1,1)模型的参数，符合 GM(1,1)模型的小样本建模特点，不仅可将两种小样预测技术进行结合，而且可有效克服传统 GM(1,1)模型中参数估计的缺陷。

3.2. LS-SVM 算法下的 GM(1,1)的参数估计

假定训练样本 $\left\{(x_i,y_i),x_i\in R^n,y_i\in R\right\}_{i=1}^{l}$，用非线性映射 $\varphi(x)$ 将样本从原空间映射到一个维数为 k 的高维特征空间 Z 中，在该空间中构造最优线性回归函数

$$f(x)=w^T\varphi(x)+b, \tag{8}$$

式中 $w\in R^k$ 为权向量，$b\in R$ 为偏移量。

为使实际风险最小，根据 SRM 原则，LS-SVM 算法可表述为优化问题[14]：

$$\begin{aligned}&\min_{w,b,\xi}\frac{1}{2}\|w\|^2+\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{l}\xi_i^2\\ &\text{s.t.}\quad y_i=w^T\varphi(x_i)+b+\xi_i,i=1,2,\cdots l\end{aligned} \tag{9}$$

其中 ξ_i 为误差项，λ 是一个调节因子，当 λ 为无穷大时，所得的解为最小二乘解。在 GM(1,1)模型的参数估计中，通常所用的最小二乘方法可视为该方法的特例，此时相当于仅考虑模型的复杂性。目标函数中 $\frac{1}{2}\|w\|^2$ 这一项，是为了保证模型的推广性，LS-SVM 算法在模型的复杂性与推广性之间寻求折中，更适合解决有限样本集的 GM(1,1)预测问题。

根据 LS-SVM 算法的特点，设计 LS-SVM 算法下的 GM(1,1)模型中参数的估计方法如下：

1) 将式(2)变形为 $X^{(0)}=a\left(-Z^{(1)}\right)+b$，进一步令 $Y=X^{(0)},X=-Z^{(1)}$, 其中 $Y=\left(x_2^{(0)},x_3^{(0)}\cdots,x_n^{(0)}\right)^T$，$Z^{(1)}=\left(z_2^{(1)},z_3^{(1)},\cdots,z_n^{(1)}\right)$，则估计 GM(1,1)模型中参数 a,b 的问题，可描述为利用训练样本

$$\left\{(x_k,y_k)\middle|(x_k,y_k)=\left(-z_k^{(1)},x_k^{(0)}\right)\right\}_{k=2}^{n}, \tag{10}$$

在样本空间中构造最优线性回归函数

$$y=ax+b, \tag{11}$$

其回归系数是 GM(1,1)模型中的灰色参数，考虑到这是一个一元回归问题，利用 LS-SVM 算法，等价于求解优化问题

$$\begin{aligned}&\min_{a,b,\xi}\frac{1}{2}a^2+\frac{\lambda}{2}\sum_{k=2}^{l}\xi_k^2\\ &\text{s.t.}\quad y_k=ax_k+b+\xi_k,k=2,3,\cdots,n\end{aligned} \tag{12}$$

将所得到的回归函数称为灰色 LS-SVM。

2) 求解优化问题(11)，引入如下拉格朗日函数

$$L(a,b,\xi,\alpha)=\frac{1}{2}a^2+\frac{\lambda}{2}\sum_{k=2}^{n}\xi_i^2-\sum_{k=2}^{n}\alpha_k\left[ax_k+b+\xi_k-y_k\right]$$

式中 $\alpha_k\left(k=2,3,\cdots,n\right)$ 为拉格朗日乘子。根据库恩–图克优化条件有

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{a}}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \xi_k}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha}}=0\ ,$$

得到如下等式约束条件

$$\begin{aligned}&a=\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x_k,\sum_{k=2}^{n}\alpha_k=0,\quad \alpha_k=\lambda\xi_k,\\&ax_k+b+\xi_k-y_k=0\end{aligned}\ ,\tag{13}$$

3) 对于样本集(9)，消去 $\boldsymbol{a}$ 和 ξ，问题归结为求解如下线性方程组

$$\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{e}^T\\ \boldsymbol{e} & \Omega+\dfrac{\boldsymbol{I}}{\lambda}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}b\\ \boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}\tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{e}$ 为元素为 1 的 $\left(n-1\right)\times 1$ 向量，$\boldsymbol{I}$ 为 $\left(n-1\right)\times\left(n-1\right)$ 的单位阵，$\boldsymbol{\alpha}=\left[\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n\right]^T,\boldsymbol{y}=\left[y_2,y_3,\cdots,y_n\right]^T$，$\Omega=\left(x_i x_j\right)_{(n-1)\times(n-1)}$。

根据 Mercer 条件[12]，定义线性(多项式)核函数 $K\left(x_i,x_j\right)=x_i x_j$，带入方程组(14)，利用最小二乘法求出拉格朗日乘子 α^* 以及参数 b^*。根据式(13)中的关系式 $a=\sum_{k=2}^{n}\alpha_k x_k$，可得最优线性回归函数的系数，即 GM(1,1)模型的参数估计为

$$\hat{a}=\sum_{k=2}^{n}\alpha_k^* x_k,\hat{b}=b^*\ ,\tag{15}$$

比较式(12)和式(7)结构上的变化，可见本文方法是将 GM(1,1)模型参数的估计问题转化为灰色 LS-SVM 的参数估计问题，方法上遵循了结构风险最小化原则，这一变化不仅适应了 GM(1,1)模型小样本建模的特点，而且增强了模型的鲁棒性，提高了模型的推广性。LS-SVM 算法与模型的调节因子和核参数有较大关系[12,14]，然而，在利用 LS-SVM 算法估计 GM(1,1)模型参数的过程中，只需利用线性核，避免了支持向量机算法中核函数参数选择[3]上的困难。

4. 实例分析

为了说明本文所提出的改进模型的有效性，以文献[9]中 1990 年到 1997 年京津塘历年最大电力负荷为例进行验证，负荷数据见表 1。

根据文[9]的计算结果，历史负荷的年增长率最大为 10.56%，最小为 1.97%，极差达到 8.59%，而且每一年负荷与上一年相比，波动较大，负荷有奇异值。将 1990 年到 1995 年的据作为样本集，对 1996 年、1997 年的负荷进行预测，利用本文预测方法，在基于 LS-SVM 算法求 GM(1,1)的模型参数时，分别取调节因子 $\lambda=1\times10^{-5},\lambda=1\times10^{-6}$，将结果与传统方法进行对比，不同方法的预测结果见表 2。

对于城市电网中长期规划，当年用电量预测相对误差小于 10%时，该年的预测结果可视为高精度预测[8]，由表 2 可见，基于本文模型得到的 1996 和 1997 年该市用电量预测相对误差均在 5%以内，预测精度较好。从以上数据可得，若中长期负荷存在奇异点，利用本文方法估计 GM(1,1)模型的参数可以使模型的预测精度相对于传统方法得到显著改善。但在实验中发现当 λ 取得较大时，本文方法的估计效果与传统方法相当，这恰好说明通常所用的最小二乘方法可视为 LS-SVM 方法的特例。

5. 结论

1) 最小二乘法具有良好的解析性，易于求解，使得该方法在 GM(1,1)模型中成为普遍采用的参数估计方法，但是它基于大样本理论的 ERM 原则估计参数，容易陷入局部最小、稳健性较差，使得在处理存在奇异负荷的预测问题时，不能很好地拟合。GM(1,1)模型具有小样本建模的特点，利用 GM(1,1)模型进行中长期负荷预测时，不宜用最小二乘法估计模型参数，

Table 1. Beijing and Tianjin pond all previous years maximum load from 1990 to 1997
表 1. 1990 年~1997 年京津塘历年最大负荷

年份	1990	1991	1992	1993
实际值/万 KW	538.99	548.66	602.21	654.05
年份	1994	1995	1996	1997
实际值/万 KW	723.12	753.84	803.35	877.22

Table 2. The forecasting results and relative errors based on different models
表 2. 基于不同模型得到的预测结果及其相对误差

年份	预测结果/万 KW			相对误差/%		
	GM(1,1)模型	本文方法 λ 1×10^{-5}	本文方法 λ 1×10^{-6}	GM(1,1)模型	本文方法 λ 1×10^{-5}	本文方法 λ 1×10^{-6}
1996	829.60	825.65	796.69	3.26	2.77	0.83
1997	899.05	893.14	850.48	2.48	1.81	3.04
平均值				2.87	2.29	1.94

需要修正传统 GM(1,1)模型中参数的估计原则，采用针对小样本的 SRM 估计原则估计参数更适合 GM(1,1)建模。

2) 本文提出利用LS-SVM算法估计GM(1,1)模型的参数，理论上可以克服最小二乘法估计 GM(1,1)模型参数的缺陷，对实例进行预测，在负荷有突变的情况下，本文方法的预测精度高于传统模型的推算结果，这进一步说明其合理性。

3) LS-SVM 算法与模型的调节因子和核参数有较大关系，本文方法在利用 LS-SVM 算法估计 GM(1,1)模型参数时，虽不用考虑核参数的选取，但如何准确、快速地选取模型的调节因子是需要进一步研究的问题。

参考文献 (References)

[1] 徐军华, 刘天琪. 基于小波分解和人工神经网络的短期负荷预测[J]. 电网技术, 2004, 28(8): 30-33.

[2] 李元诚, 方廷健, 于尔铿. 短期负荷预测的支持向量机方法研究[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(6): 55-59.

[3] 吴景龙, 杨淑霞, 刘承水. 基于遗传算法优化参数的支持向量机短期负荷预测方法[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2009, 40(1): 180-184.

[4] 杨延西, 刘丁. 基于小波变换和最小二乘支持向量机的短期电力负荷预测[J]. 电网技术, 2005, 29(13): 60-64.

[5] 马文晓, 白晓民, 沐连顺. 基于人工神经网络和模糊推理的短期负荷预测方法[J]. 电网技术, 2003, 27(5): 29-32.

[6] 俞明生, 冯桂宏, 杨祥. 组合优化灰色模型在中长期电力负荷预测中的应用[J]. 沈阳工业大学学报, 2007, 29(2): 450-453.

[7] 牛东晓, 贾建荣. 改进 GM(1,1)模型在电力负荷预测中的应用[J]. 电力科学与工程, 2008, 24(4): 28-30.

[8] 王成山, 杨军, 张崇见. 灰色系统理论在城市年用电量预测中的应用——不同预测方法的分析比较[J]. 电网技术, 1999, 23(2): 15-18.

[9] 苗增强, 李婷, 陈芳等. 基于最小一乘法的组合赋权法在中长期负荷预测中的应用[J]. 电力系统保护与控制, 2009, 37(2): 28-31.

[10] 陈超英. 累加生成的改进和 GM(1,1,t)灰色模型[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(2): 105-109.

[11] 何文章, 宋国乡. 基于遗传算法估计灰色模型中的参数[J]. 系统工程学报, 2005, 20(4): 432-436.

[12] V. N. Vapnik. The nature of statistical learning theory. Heidell-berg: Springer Verlag, 1995.

[13] 安德洪, 韩文秀, 岳毅宏. 组合预测法的改进及其在负荷预测中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 26(6): 842-844.

[14] J. A. K. Suykens, J. Vandewalle. Least squares support vector machine classfiers. Neural Processing Letters, 1999, 9(3): 293-300.

