Modern Physics 现代物理, 2011, 1, 17-22
http://dx.doi.org/10.12677/mp.2011.11002 Published Online May 2011 (http://www.hanspub.org/journal/mp/)

Electromagnetic Field Equations Described with the Octonions

Zihua Weng
School of Physics and Mechanical & Electrical Engineering, Xiamen University, Xiamen
Email: xmuwzh@xmu.edu.cn
Received: Mar. 31st, 2011; revised: Apr. 28th, 2011; accepted: Apr. 29th, 2011.

Abstract: Inspired by J. C. Maxwell firstly using both the vector terminology and the algebra of quaternions to describe the property of electromagnetic fields, the paper summarizes three basic postulations to import the algebra of octonions into the field theory. In this case, the algebra of octonions can partly describe the electromagnetic theory by using the algebra of octonions to describe the Maxwell equations of electromagnetic field. The viewpoint of R. Descartes, M. Faraday, and A. Einstein etc claims that, the field is an irreducible element of physical description, while the space-time is only the extension of the field and does not claim existence on its own. According to the three basic postulations, the space-time extended from the electromagnetic field is different from the one extended from the gravitational field. They are quite similar but independent to each other. These two space-times, extended respectively from the electromagnetic field and the gravitational field, both can be considered as the quaternion space, and are perpendicular to each other so that they can combine together to become an octonion space. Therefore the octonion space can be used to describe the physical property of the electromagnetic field and the gravitational field. In order to maintain the dimensional homogeneity, the physical quantity of the electromagnetic field should be multiplied by the undetermined coefficient, when the two kinds of physical quantities exist in the same octonion formula. The undetermined coefficient can be determined by comparing with the classical theories of the electromagnetic field and the gravitational field. In math, the complex number can be divided into the real number and the imaginary number, while the imaginary number is the product of another real number and the imaginary unit. Just like the complex number, the octonion also can be divided into two components, the quaternion and the S-quaternion, while the S-quaternion is the product of another quaternion and the "fourth imaginary unit". The "fourth imaginary unit" is independent to the "three imaginary unit" in the quaternion. After several years studies the author finds out that the quaternion is suitable for describing the property of the gravitational field, while the S-quaternion is suitable for describing the property of electromagnetic field. Comparing the physical quantities describing by the algebra of octonions and the vector terminology can also prove this conclusion. This method is never been used before in all the theoretical studies of electromagnetic fields. And may be that can partly explain why it is not completely successful before to describe the electromagnetic field theory directly by the quaternion (rather than the S-quaternion). In the paper, the definition of field source described by the octonions can deduce Maxwell equation in the electromagnetic field. The Maxwell equations, the electromagnetic potential, and the field strength definition, deduced by the field source definition of electromagnetic describe by octonions, are respectively identical with that deduced by the vector terminology in classical electromagnetic theory, but the direction of displacement current and the gauge equation are not. The study claims that the electromagnetic field theory described by the algebra of octonions can cover most of the existing conclusions of classical electromagnetic field theory. And the Maxwell equations in the electromagnetic field can be described by S-quaternion.

Keywords: Maxwell Equations; Electromagnetic Field; Octonion; Quaternion; Vector

八元数描述的电磁场方程组

翁梓华
厦门大学物理与机电工程学院，厦门

Email: xmuwzh@xmu.edu.cn
收稿日期：2011 年 3 月 31 日；修回日期：2011 年 4 月 28 日；录用日期：2011 年 4 月 29 日

摘　要：麦克斯韦首先同时采用矢量和四元数两种方法描述电磁场性质。这启发本文总结出三条基本假设，试图解决将八元数引进场论的问题。应用八元数可以描述电磁场的麦克斯韦方程组，从而部分程度实现采用八元数代数描述电磁场理论的努力目标。如果将八元数分解成为四元数和 S－四元数两个部分，可以发现 S－四元数适合于描述电磁场性质。这种方法在电磁场理论的以往研究中是不曾遇到过的。由八元数描述的电磁场的场源定义式可以分解出麦克斯韦方程组。同时电磁场势、场强定义式和麦克斯韦方程组均分别等同于采用矢量方法得到的结果，但位移电流方向和规范条件方程有所不同。研究结果揭示，应用八元数描述的电磁场理论可以涵盖经典电磁场理论中的大部分已有结论。采用 S－四元数可以描述电磁场中的麦克斯韦方程组。

关键词：麦克斯韦方程组；电磁场；八元数；四元数；矢量

1. 引言

同时采用四元数(quaternion)和矢量两种方法研究电磁场性质是麦克斯韦(J. C. Maxwell)的研究特点之一。四元数[1]由哈密顿(W. R. Hamilton)于 1843 年发明。八元数(octonion)作为四元数的有序对分别由格拉夫(J. T. Graves)于 1843 年和凯莱(A. Cayley)于 1845 年先后独立发现。随后二十多年四元数被拆为标量和矢量。麦克斯韦在 1850 年左右开始电磁场研究并自然地混用两种方法描述电磁场性质。目前，采用矢量描述的电磁场理论较为成熟，采用四元数描述的电磁场理论并不成功，采用八元数描述的电磁场理论则研究进展缓慢。现在已经发现采用八元数与矢量分别描述的电磁场性质之间拥有大量的相同之处，但也存在一定的差异之处。

八元数可以分解为两个组成部分，这类似于复数的情况。复数可以分解为实数和虚数两个部分，而虚数等于另一个实数与虚数单位的乘积。同理，八元数可以分解为四元数和 S－四元数两个部分，而 S－四元数等于另一个四元数乘上“第四个虚数单位”[2]。后者不同于四元数中的三个“虚数单位”。通过多年的反复尝试可以发现，四元数适合于描述重力场性质，而 S－四元数适合于描述电磁场性质。只要将八元数描述的作用力和能量等物理量与矢量描述的分别进行比较就可以得到这一结论[3]。这种方法在电磁场理论的以往研究中是不曾遇到过的。这也许是以往人们直接采用四元数(而不是 S－四元数)描述电磁场理论并不十分成功的原因之一。

1.1. 研究现状

应用八元数(含四元数)方法研究电磁场性质已成一种重要的发展趋势，并有可能逐渐成为国际上的研究前沿和热点。电磁场性质在八元数和矢量分别描述中的差异之处已凸显出来成为关注的焦点。国际上每年都会出现一定量的相关学术论文。

在中国，北京大学[4]对四元数描述的力学和电磁场进行了研究。清华大学[5]采用四元数研究光学系统。天津理工大学应用八元数研究电磁场性质[6]。西安电子科技大学采用四元数描述光线的传播性质[7]。汕头大学应用八元数研究电磁场理论[8]。厦门大学采用八元数开展电磁场和量子力学的研究[9]。此外，还有一些单位也在开展类似研究。

在其它国家和地区，美国普林斯顿高级研究所(Institute for Advanced Study)研究四元数量子力学和场论[10]。日本名古屋大学(Nagoya University)开展四元数场论研究[11]。墨西哥国立工学院(National Polytechnic Institute)利用四元数研究时变电磁场[12]。印度库茂恩大学(Kumaun University)采用八元数开展场论和量子力学研究[13]。斯洛伐克科学院(Slovak Academy of Sciences)应用四元数开展作用力研究[14]。美国加州州立大学(California State University)采用八元数开展电磁场研究[15]。希腊雅典国家技术大学(National

Technical University of Athens)采用四元数描述电磁场性质[16]。

目前，已有不少学者采用八元数研究电磁场理论，都试图推动电磁场理论的进一步深入发展。然而，大部分研究尚未取得关键性突破，目前的研究水平几乎都处于起步阶段。

1.2. 主要问题

按照电磁场理论的关键内容(物理概念和演绎推论)的研究方式划分，应用八元数研究电磁场性质的方法分为复述型、改进型和拓展型三种类型。目前的研究多数是复述型的，少数是改进型的。前者是采用八元数方法纯粹地重复描述已有的物理概念和推论，后者是在前者的基础上搜寻一些新的推论或预言。

通过比较和分析，可以发现这两类方法的一些问题。(1) 复述已有物理概念。这些研究多采用八元数复述电磁场已有的物理概念。将八元数视作为复数或实数的一种单纯的替代工具加以使用。这与新方法带来新结论的愿望还有一段距离。(2) 难有突破性的新结论。这些研究多采用八元数复述电磁场的已有结论，或改进性地搜寻一些推论，但不能解答如何将八元数(含四元数)引入场论等疑难问题。(3) 缺乏具体的推论对比。这些研究在理论上没有比较两种方法所得推论的相同点与差异之处，并加以总结和分析。

在代数学里，一对实数的有序排列构成了一个复数。同理，一对复数可以构成一个四元数；一对四元数可以构成一个八元数。在以往，每一次新的数学描述方式的采用都拓展了原有物理概念的定义范畴，并带来了新的视角和结论。例如，复数引进物理学及其在量子力学中的影响。但以上这两类方法显然没有取得预期的应用结果。

本文探索一种新的描述方法——通过基本假设引入八元数(见表 1)，以描述电磁场的性质。该方法可以给出矢量描述方法中的电磁场的大部分已有结论。但是，该方法认为，将八元数中的四元数人为地拆开为标量和矢量，必然产生四元数和矢量这两种方法的演绎推论的些许不同。

1.3. 基本假设

采用八元数方法同时描述电磁场和重力场理论是一种崭新的和前沿性的研究方法。在该研究方法中，需要引进如下三条基本假设[17]。

第一，时空间假设。电磁场和重力场分别广延得到的时空间是不同的。根据笛卡尔(R. Descartes)、法拉第(M. Faraday)和爱因斯坦(A. Einstein)等人的观点，场是目前物理描述中不能再加分解的基本概念，而时空间仅是场的广延(extension)并且不能脱离场而独立存在[18]。进一步地说，不同的场广延得到的时空间是不同的。因此电磁场广延得到的时空间不同于重力场广延得到的时空间。虽然这两个时空间看起来十分相似，就像一对双胞胎难于分辨，但它们却是相互独立的。

第二，四元数空间。电磁场和重力场分别广延得到的时空间都可以选择为四元数空间。根据哈密顿和麦克斯韦等人的观点，时空间可以选择为四元数空间。具体地说，电磁场和重力场分别广延得到的时空间都是四元数空间。但这两个四元数空间却是相互垂直的，并且可以组成一个八元数空间。因而八元数空间可以用于同时描述电磁场和重力场的性质。

第三，量纲一致性。在同一表达式中需要引进系数使不同的物理量保持量纲一致。例如，当电磁场的和重力场的物理量同时出现于同一个八元数表达式时，电磁场的物理量应乘上一个系数，以便与重力场的物理量保持量纲一致。通过与电磁场和重力场的经典理论相比较，可以具体地确定这些系数的数值。

如何将八元数(含四元数)引入物理学是自从哈密顿以来就长期困扰着人们的一个基本问题。本文提出的三条基本假设可能是解决这一问题的途径之一。从这三条基本假设出发可以引入八元数以同时刻画电磁场和重力场的性质。

2. 场方程组

在八元数空间中，电磁场和重力场的性质可以同时加以描述。

在重力场的四元数空间中，坐标值为 r_0，r_1，r_2，r_3。基矢为 $\mathbb{E}_g = (\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$，矢径为 $\mathbb{R}_g = \sum(r_i \boldsymbol{i}_i)$，速度为 $\mathbb{V}_g = \sum(v_i \boldsymbol{i}_i)$，重力场势为 $\mathbb{A}_g = \sum(a_i \boldsymbol{i}_i)$。其中，$v_0$ 为光速，t 为时间，$r_0 = v_0 t$。$\boldsymbol{i}_0 = 1$。$i = 0, 1, 2, 3$。$j = 1, 2, 3$。

根据以上的基本假设，电磁场的四元数空间垂直

于重力场的四元数空间。在电磁场的四元数空间(简称为 S－四元数空间)中，坐标值为 R_0, R_1, R_2, R_3。基矢为 $\mathbb{E}_e=(\boldsymbol{I}_0,\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{I}_3)$，矢径为 $\mathbb{R}_e=\sum(R_i\boldsymbol{I}_i)$，速度为 $\mathbb{V}_e=\sum(V_i\boldsymbol{I}_i)$，电磁场势为 $\mathbb{A}_e=\sum(A_i\boldsymbol{I}_i)$。其中，$\mathbb{E}_e=\mathbb{E}_g\circ\boldsymbol{I}_0$。$\circ$ 表示八元数乘法。

以上两个四元数空间可以组成一个八元数空间，用以同时描述重力场和电磁场的物理性质。在八元数空间中，基矢为 $\mathbb{E}=(\boldsymbol{i}_0,\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3,\boldsymbol{I}_0,\boldsymbol{I}_1,\boldsymbol{I}_2,\boldsymbol{I}_3)$，矢径为 $\mathbb{R}=\sum(r_i\boldsymbol{i}_i+k_{eg}R_i\boldsymbol{I}_i)$，速度为 $\mathbb{V}=\sum(v_i\boldsymbol{i}_i+k_{eg}V_i\boldsymbol{I}_i)$，场势为 $\mathbb{A}=\sum(a_i\boldsymbol{i}_i+k_{eg}A_i\boldsymbol{I}_i)$。其中，$k_{eg}$ 为待定系数，用以保持量纲一致。

在八元数空间中，对八元数场势 $\mathbb{A}$ 施加四元数算子可以依次得到重力场和电磁场的场强和场源等(见表 2)。场强 $\mathbb{B}=\sum(b_i\boldsymbol{i}_i+k_{eg}B_i\boldsymbol{I}_i)$ 定义为

$$\mathbb{B}=\lozenge\circ\mathbb{A} \tag{1}$$

其中，重力场强 $\mathbb{B}_g=\lozenge\circ\mathbb{A}_g=\sum(b_i\boldsymbol{i}_i)$，电磁场强 $\mathbb{B}_e=\lozenge\circ\mathbb{A}_e=\sum(B_i\boldsymbol{I}_i)$。规范条件方程选择为 $b_0=0$ 和 $B_0=0$。算子 $\lozenge=\sum(\boldsymbol{i}_i\partial_i)$，$\nabla=\sum(\boldsymbol{i}_j\partial_j)$，$\partial_i=\partial/\partial r_i$。

八元数场源 $\mathbb{S}$ 定义为

$$\begin{aligned}\mu\mathbb{S}&=-(\lozenge+\mathbb{B}/v_0)^*\circ\mathbb{B}\\&=(\mu_g\mathbb{S}_g+k_{eg}\mu_e\mathbb{S}_e)-\mathbb{B}^*\circ\mathbb{B}/v_0\end{aligned} \tag{2}$$

其中，μ 为系数。μ_g 和 μ_e 分别为重力场常数和电磁场常数。$\mathbb{S}_g$ 和 $\mathbb{S}_e$ 分别为重力场源和电磁场源。$*$ 表示八元数共轭。

标量 $\mathbb{B}^*\circ\mathbb{B}/\mu_g=\mathbb{B}_g^*\circ\mathbb{B}_g/\mu_g+k_{eg}^2\mathbb{B}_e^*\circ\mathbb{B}_e/\mu_g$。与传统的电磁场理论比较可以确定，$k_{eg}^2=\mu_g/\mu_e$。其中的 $\mathbb{B}_e^*\circ\mathbb{B}_e/(2\mu_e)$ 为电磁场的能量密度，而标量 $\mathbb{B}_g^*\circ\mathbb{B}_g/(2\mu_g)$ 为重力场的能量密度。

从以上两式可知

$$\mu_g\mathbb{S}_g+k_{eg}\mu_e\mathbb{S}_e=-\lozenge^*\circ\mathbb{B}_g-k_{eg}\lozenge^*\circ\mathbb{B}_e \tag{3}$$

根据基矢 $(\mathbb{E}_g,\mathbb{E}_e)$ 和待定系数 k_{eg} 分解上式可得重力场的场源方程

$$\mu_g\mathbb{S}_g=-\lozenge^*\circ\mathbb{B}_g \tag{4}$$

和电磁场的场源方程

$$\mu_e\mathbb{S}_e=-\lozenge^*\circ\mathbb{B}_e \tag{5}$$

分解以上两式可以分别得到重力场的牛顿万有引力方程和电磁场的麦克斯韦方程组等。

Table 1. The octonion multiplication table
表 1. 八元数乘法表

	1	$\boldsymbol{i}_1$	$\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{i}_3$	$\boldsymbol{I}_0$	$\boldsymbol{I}_1$	$\boldsymbol{I}_2$	$\boldsymbol{I}_3$
1	1	$\boldsymbol{i}_1$	$\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{i}_3$	$\boldsymbol{I}_0$	$\boldsymbol{I}_1$	$\boldsymbol{I}_2$	$\boldsymbol{I}_3$
$\boldsymbol{i}_1$	$\boldsymbol{i}_1$	-1	$\boldsymbol{i}_3$	$-\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{I}_1$	$-\boldsymbol{I}_0$	$-\boldsymbol{I}_3$	$\boldsymbol{I}_2$
$\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{i}_2$	$-\boldsymbol{i}_3$	-1	$\boldsymbol{i}_1$	$\boldsymbol{I}_2$	$\boldsymbol{I}_3$	$-\boldsymbol{I}_0$	$-\boldsymbol{I}_1$
$\boldsymbol{i}_3$	$\boldsymbol{i}_3$	$\boldsymbol{i}_2$	$-\boldsymbol{i}_1$	-1	$\boldsymbol{I}_3$	$-\boldsymbol{I}_2$	$\boldsymbol{I}_1$	$-\boldsymbol{I}_0$
$\boldsymbol{I}_0$	$\boldsymbol{I}_0$	$-\boldsymbol{I}_1$	$-\boldsymbol{I}_2$	$-\boldsymbol{I}_3$	-1	$\boldsymbol{i}_1$	$\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{i}_3$
$\boldsymbol{I}_1$	$\boldsymbol{I}_1$	$\boldsymbol{I}_0$	$-\boldsymbol{I}_3$	$\boldsymbol{I}_2$	$-\boldsymbol{i}_1$	-1	$-\boldsymbol{i}_3$	$\boldsymbol{i}_2$
$\boldsymbol{I}_2$	$\boldsymbol{I}_2$	$\boldsymbol{I}_3$	$\boldsymbol{I}_0$	$-\boldsymbol{I}_1$	$-\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{i}_3$	-1	$-\boldsymbol{i}_1$
$\boldsymbol{I}_3$	$\boldsymbol{I}_3$	$-\boldsymbol{I}_2$	$\boldsymbol{I}_1$	$\boldsymbol{I}_0$	$-\boldsymbol{i}_3$	$-\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{i}_1$	-1

2.1. 重力场方程组

在重力场中，场强 $\mathbb{B}_g$ 包含 $\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 两个部分，

$$\boldsymbol{g}/v_0=\partial_0\boldsymbol{a}+\nabla a_0,\quad \boldsymbol{b}=\nabla\times\boldsymbol{a} \tag{6}$$

根据标量和矢量可以分解(4)式，并得到其标量式为

$$-\mu_g m v_0=\nabla^*\cdot\boldsymbol{k} \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{a}=\sum(a_j\boldsymbol{i}_j)$。$\boldsymbol{k}=\sum(b_j\boldsymbol{i}_j)=\boldsymbol{g}/v_0+\boldsymbol{b}$。$m$ 为质量密度。与传统的单个粒子的重力理论相比较可知，$\mathbb{S}_g=m\mathbb{V}_g$。

上式可以进一步改写为

$$-\mu_g m v_0=\nabla^*\cdot(\boldsymbol{g}/v_0+\boldsymbol{b}) \tag{8}$$

由(1)式和(6)式可以得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{9}$$

因此有牛顿的万有引力定律的泊松方程

$$-\mu_g m v_0=\nabla^*\cdot\boldsymbol{g}/v_0 \tag{10}$$

同理，根据标量和矢量分解(4)式可得其矢量式为

$$-\mu_g m\boldsymbol{v}=\nabla^*\times\boldsymbol{k}+\partial_0\boldsymbol{k} \tag{11}$$

并可改写为

$$-\mu_g m\boldsymbol{v}=\nabla^*\times(\boldsymbol{g}/v_0+\boldsymbol{b})+\partial_0(\boldsymbol{g}/v_0+\boldsymbol{b}) \tag{12}$$

其中，速度 $\boldsymbol{v}=\sum(v_j\boldsymbol{i}_j)$。

由(1)式和(6)式可以得到

$$\nabla^*\times\boldsymbol{g}/v_0+\partial_0\boldsymbol{b}=0 \tag{13}$$

于是可得重力场的类安培定律，

$$-\mu_g m\boldsymbol{v}=\nabla^*\times\boldsymbol{b}+\partial_0\boldsymbol{g}/v_0 \tag{14}$$

以上分析说明，四元数描述的重力场的牛顿万有引力定律完全相同于传统理论中所描述的。同时在四

Table 2. The multiplication table of the operator and the octonion physical quantity
表 2. 算子与八元数物理量的乘法表

定义	意义
$\nabla \cdot \boldsymbol{a}$	$-(\partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 + \partial_3 a_3)$
$\nabla \times \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{i}_1(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) + \boldsymbol{i}_2(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) + \boldsymbol{i}_3(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)$
∇a_0	$\boldsymbol{i}_1\partial_1 a_0 + \boldsymbol{i}_2\partial_2 a_0 + \boldsymbol{i}_3\partial_3 a_0$
$\partial_0 \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{i}_1\partial_0 a_1 + \boldsymbol{i}_2\partial_0 a_2 + \boldsymbol{i}_3\partial_0 a_3$
$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$	$-(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3)\,\boldsymbol{I}_0$
$\nabla \times \boldsymbol{A}$	$-\boldsymbol{I}_1(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) - \boldsymbol{I}_2(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) - \boldsymbol{I}_3(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)$
$\nabla \circ \boldsymbol{A}_0$	$\boldsymbol{I}_1\partial_1 A_0 + \boldsymbol{I}_2\partial_2 A_0 + \boldsymbol{I}_3\partial_3 A_0$
$\partial_0 \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{I}_1\partial_0 A_1 + \boldsymbol{I}_2\partial_0 A_2 + \boldsymbol{I}_3\partial_0 A_3$

元数空间中，动量会通过矢势 $\boldsymbol{a}$ 和场强 $\boldsymbol{b}$ 而产生引力影响。但是这些影响通常是非常微弱的，以致在低速情况下可以将其忽略不计[19]。当 $\boldsymbol{a}=0$ 和 $\partial_0 \boldsymbol{g}=0$ 时，以上将退化为牛顿的引力理论中的情况。

重力场方程组的推导方式可以类推到电磁场方程组的推导过程中。

2.2. 电磁场方程组

在电磁场中，电磁场强 $\mathbb{B}_e$ 包含 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 两个部分，

$$\boldsymbol{E}/v_0 = \partial_0 \boldsymbol{A} + \nabla \circ \boldsymbol{A}_0, \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{15}$$

根据标量和矢量可以分解(5)式，并得到其标量式为

$$-\mu_e q \boldsymbol{V}_0 = \nabla^* \cdot \boldsymbol{K} \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{A} = \sum(A_j \boldsymbol{I}_j)$，$\boldsymbol{A}_0 = A_0 \boldsymbol{I}_0$。$\boldsymbol{V}_0 = V_0 \boldsymbol{I}_0$。$\boldsymbol{K} = \sum(B_j \boldsymbol{I}_j) = \boldsymbol{E}/v_0 + \boldsymbol{B}$。与传统的单个粒子的电磁场理论比较可知，$\mathbb{S}_e = q\mathbb{V}_e$。$q$ 为电荷密度。

上式可以进一步改写为

$$-\mu_e q \boldsymbol{V}_0 = \nabla^* \cdot (\boldsymbol{E}/v_0 + \boldsymbol{B}) \tag{17}$$

由(1)式和(15)式可以得到磁场的高斯方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{18}$$

进一步有电场的高斯方程

$$-\mu_e q \boldsymbol{V}_0 = \nabla^* \cdot \boldsymbol{E}/v_0 \tag{19}$$

同理，根据标量和矢量分解(5)式可得其矢量式为

$$-\mu_e q \boldsymbol{V} = \nabla^* \times \boldsymbol{K} + \partial_0 \boldsymbol{K} \tag{20}$$

并可改写为

$$-\mu_e q \boldsymbol{V} = \nabla^* \times (\boldsymbol{E}/v_0 + \boldsymbol{B}) + \partial_0 (\boldsymbol{E}/v_0 + \boldsymbol{B}) \tag{21}$$

其中，速度 $\boldsymbol{V} = \sum(V_j \boldsymbol{I}_j)$。

由(1)式和(15)式可以得到法拉第电磁感应定律

$$\nabla^* \times \boldsymbol{E}/v_0 + \partial_0 \boldsymbol{B} = 0 \tag{22}$$

进而可得电磁场的安培－麦克斯韦定律，

$$-\mu_e q \boldsymbol{V} = \nabla^* \times \boldsymbol{B} + \partial_0 \boldsymbol{E}/v_0 \tag{23}$$

以上分析说明，S－四元数描述的电磁场中的场势、场强定义式以及麦克斯韦方程组均分别完全相同于传统电磁场理论中的。但是两种描述方法中的位移电流的方向是相反的，规范条件方程也是不同的。这两个不同点在传统的电磁场理论中也是尚未进行实验验证的，由于难度仍然太大等多种原因而常被忽视。一般情况下，电磁场中的电荷速度 $\mathbb{V}_e$ 也不同于重力场中的质量速度 $\mathbb{V}_g$。当电荷和质量组成了有质量的带电粒子时，可以存在着特殊的关系式 $\mathbb{V}_e = \mathbb{V}_g \circ \boldsymbol{I}_0$。

3. 结论与讨论

在八元数描述的大多数方程中，电场强度和磁感强度总是作为一个整体而出现的。在麦克斯韦方程等少数情况下，这两者可以完全分离。由八元数场源定义式的分解可以给出麦克斯韦方程组。后者和电磁场势以及场强定义式均分别等同于采用矢量方法得到的结果，但位移电流方向和场势规范条件却是不同的。

(1) 如何将四元数和八元数引入电磁场理论是长期以来令人困惑的疑难问题。四元数的非交换性和八元数的非交换非结合性在很长的时间内阻碍了电磁场研究的进展，使得相关研究徘徊不前。经过长期的反复尝试终于发现，需要提出基本假设才能引进四元数和八元数，需要从八元数中分离出 S－四元数才能准确地描述电磁场性质，并给出各种合理的推论。

(2) 电磁场研究涉及到了八元数的引进。八元数的引进必然会导致同时描述电磁场和重力场，而如何同时描述电磁场和重力场性质是当今的研究前沿和热点。这个重要问题在项目开展过程中是必然遭遇到的和无法回避的。只能依靠后续的相关推论的实验验证才能进一步判别八元数理论描述的合理性。然而，仅凭理论分析及其逻辑推论的简洁性而言，这个理论描述无疑是十分优美的。

(3) 从三个基本假设出发可以将八元数引入场

论，并应用于同时描述电磁场和重力场的性质。这将使人们有可能进一步地将十六元数(sedenion)[20]甚至三十二元数(trigintaduonion)引入场论，并应用于同时描述电磁场、重力场、弱力场和强力场等的性质。因此，采用八元数描述电磁场理论的研究对场论的后续发展无疑具有非常重要的推动作用。

4. 致谢

感谢国家自然科学基金的资助(项目编号：60677039)。

参考文献 (References)

[1] 李邦河. 数的概念的发展[J]. 数学通报, 2009, 48(8): 1-3.
[2] Z. H. Weng. Wave equations in electromagnetic and gravitational fields. Leung Tsang. Proceedings of Progress in Electromagnetics Research Symposium 2010 in Cambridge, Cambridge: The Electromagnetics Academy, 2010: 971-975.
[3] Z. H. Weng. Electromagnetic forces on charged particles. Leung Tsang. Proceedings of Progress In Electromagnetics Research Symposium 2009 in Moscow, Cambridge: The Electromagnetics Academy, 2009: 361-363.
[4] 许方官, 严亮. 四元数在力学和电磁学中的应用[J]. 大学物理, 2001, 20(9): 30-33, 41.
[5] 闫霜, 程雪岷, 马建设等. 应用四元数方法对光存储光学系统的建模[J]. 应用光学, 2007, 28(5): 541-547.
[6] 王洪吉. 场方程的四元数形式 I [J]. 天津理工学院学报, 1993, 9(2): 14-19.
[7] 陈贵敏, 宋文超, 贾建援. 四元数方法表示的反射和折射定律[J]. 光电工程, 2006, 33(3): 141-144.
[8] 陈光. 八元向量代数及其在电动力学中的应用[J]. 汕头大学学报(自然科学版), 1991, 6(1): 1-10.
[9] 翁梓华. 狄拉克 γ 矩阵与四元数[J]. 大学物理, 1994, 13(1): 17-19.
[10] S. L. Adler. Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields. New York: Oxford University Press, 1995.
[11] K. Morita. Quaternions, lorentz group and the dirac theory. Progress of Theoretical Physics, 2007, 117(3): 501-532.
[12] S. M. Grusky, K. V. Khmelnytskaya and V. V. Kravchenko. On a quaternionic Maxwell equation for the time-dependent electromagnetic field in a chiral medium. Journal of Physics A, 2004, 37 (16): 4641-4647.
[13] B. C. Chanyal, P. S. Bisht, and O. P. S. Negi. Generalized octonion electrodynamics. International Journal of Theoretical Physics, 2010, 49(6): 1333-1343.
[14] V. Majernik. The force exerting on cosmic bodies in a quaternionc field. General Relativity and Gravitation, 2004, 36(5): 1143-1150.
[15] M. Gogberashvili. Octonionic electrodynamics. Journal of Physics A, 2006, 39(22): 7099-7104.
[16] H. T. Anastassiu, P. E. Atlamazoglou and D. I. Kaklamani. Application of bicomplex (quaternion) algebra to fundamental electromagnetics: A lower order alternative to the helmholtz equation. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 51(8): 2130-2136.
[17] Z. H. Weng. Octonionic electromagnetic and gravitational interactions and dark matter. http://arxiv.org/abs/arXiv:physics/0612102, 2006-12.
[18] A. Einstein. Relativity: The special and the general theory (A Popular Exposition). 15th edition. Translated by Robert W. Lawson. New York: Crown Publishers, 1961.
[19] Z. H. Weng. Maxwell equation in electromagnetic and gravitational fields. Leung Tsang. Proceedings of Progress In Electromagnetics Research Symposium 2010 in Xi'an, Cambridge: The Electromagnetics Academy, 2010: 1349-1353.
[20] J. Koplinger. Gravity and electromagnetism on conic sedenions. Applied Mathematics and Computation, 2007, 188(1): 948-953.

