*Operations Research and Fuzziology* 运筹与模糊学, 2011, 1, 1-5
http://dx.doi.org/10.12677/orf.2011.11001 Published Online August 2011 (http://www.hanspub.org/journal/orf/)



# Attribute Reductions in Intuitionistic Fuzzy Information Systems Based on Dominance Relations#

**Wensheng Du[1], Baoqing Hu[1*], Yan Zhao[2]**
[1]School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan
[2]Department of Mathematics, College of Information Science and Technology, Jinan University, Guangzhou
Email: wsdu@whu.edu.cn; bqhu@whu.edu.cn
Received: Jun. 21st, 2011; revised: Jul. 20th, 2011; accepted: Jul. 21st, 2011.

**Abstract:** Many methods based on the rough set theory to deal with information systems have been proposed in recent years. However, intuitionistic fuzzy information systems have not been investigated yet. In this paper, dominance relations are firstly defined in intuitionistic fuzzy information systems and decision tables, and then the concepts of attribute reductions and relative reductions are proposed. Practical approaches to compute all reductions and relative reductions are presented by introducing of discernibility matrix and discernibility function.

**Keywords:** Dominance Relations; Attribute Reductions; Intuitionistic Fuzzy Sets; Fuzzy Information Systems

# 基于优势关系的直觉模糊信息系统的属性约简#

**杜文胜[1]，胡宝清[1*]，赵　彦[2]**
[1]武汉大学数学与统计学院，武汉
[2]暨南大学信息科学技术学院数学系，广州
Email: wsdu@whu.edu.cn; bqhu@whu.edu.cn
收稿日期：2011年6月21日；修回日期：2011年7月20日；录用日期：2011年7月21日

**摘　要：**近几年来出现了许多用粗糙集理论处理信息系统的方法，但是对直觉模糊信息系统还没有做出相关的讨论。本文首先在直觉模糊信息系统与决策信息表中定义了优势关系，然后引入了基于此优势关系的约简与相对约简的概念，并通过辨识矩阵及辨识函数得到求解约简与相对约简的具体方法。

**关键词：**优势关系；属性约简；直觉模糊集；模糊信息系统

## 1. 引言

从 Zadeh 通过元素的隶属度引入模糊集[1]的概念以后，出现了许多处理不确定和不精确问题的理论和方法。作为模糊集的拓展，Atanassov 提出了直觉模糊集[2]，由于它同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度这三个方面的信息，因而比 Zadeh 型模糊集在处理模糊性和不确定性等方面更具灵活性和实用性，并且被广泛应用于实际问题，如于决策、医疗诊断、逻辑规划、近似推理、模式识别等领域[3]。

1982 年，Pawlak 教授提出了粗糙集[4]的概念，成为了一个新的处理模糊和不确定知识的数学工具。近年来，粗糙集理论已被成功应用于机器学习、数据挖掘、模式识别等领域。属性约简是粗糙集理论的核心问题之一，其主要思想在于保持分类能力不变的前提下，通过属性约简，去掉不必要的属性，使知识表示简化，但又不丢失基本信息，导出问题的分类或决策规则。

经典粗糙集理论以完备信息系统为研究对象，以等价关系(不可区分关系)为基础。然而，在实际问题

*：通讯作者。
#基金项目：国家自然科学基金资助项目(61179038，70771081)。

 

中，许多信息系统是基于优势关系的(如产品质量、市场份额、负债比率等)，这是传统的粗糙集理论不能解决的。因此 Greco 等提出了基于优势关系的粗糙集理论(Dominance-based Rough Set Approach，DRSA)[5]，该理论主要是将条件属性集及决策属性集上的等价关系替换为优势关系，但仍保持经典粗糙集的基本性质。张文修等提出了协调集[6-9]的概念，并通过协调集建立了辨识矩阵，进而引入了判定定理，简化了求解约简的说理过程。

本文将直觉模糊集理论与基于优势关系的粗糙集理论相结合，得到了基于优势关系的直觉模糊信息系统的属性约简，进一步丰富了粗糙集理论。

## 2. 直觉模糊集的基本概念

传统的模糊集给出了论域中元素的隶属度，而直觉模糊集不仅给出了论域中元素的隶属度，而且还给出了非隶属度。

**定义 2.1** 论域 $U$ 上一个直觉模糊集是下列形式的一个对象 $A=\left\{\left\langle x,\mu_A(x),\gamma_A(x)\right\rangle \middle| x\in U\right\}$，

其中 $\mu_A(x)$ 称为 $x$ 属于 $A$ 的隶属度，$\gamma_A(x)$ 称为 $x$ 不属于 $A$ 的隶属度，并且满足关系式 $0\le\mu_A(x)+\gamma_A(x)\le 1,\ \forall x\in U$。称 $1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$ 为 $x$ 属于 $A$ 的犹豫度或不确定度。

直觉模糊集的序关系[10]定义如下：

**定义 2.2** (格 $\left(L^*,\le_{L^*}\right)$)为方便说明，记

$L^*=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in[0,1]\times[0,1]\middle|0\le x_1+x_2\le 1\right\}$，我们记 $L^*$ 上的关系 $\le_{L^*}$ 如下：

$\left(x_1,x_2\right)\le_{L^*}\left(y_1,y_2\right)\Leftrightarrow x_1\le y_1,\ x_2\ge y_2$。

由上定义可知，序关系 $\le_{L^*}$ 是 $L^*$ 上的一个偏序关系，且 $\left(L^*,\le_{L^*}\right)$ 是一个完备格，最大元与最小元分别为 $1_{L^*}=(1,0)$，$0_{L^*}=(0,1)$。

## 3. 基于优势关系的直觉模糊信息系统的属性约简

**定义 3.1** 称一个四元组 $I=(U,AT,V,f)$ 为一个直觉模糊信息系统(Intuitionistic fuzzy information systems，IFIS)，其中 $U$ 为有限非空对象集；$AT$ 为有限非空属性集；$V$ 为属性值值域；$f$ 为对象属性值映射。即：$U=\left\{x_1,x_2,\cdots,x_n\right\}$，$A=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_p\right\}$，$V=\bigcup_{a\in AT}V_a$，$V_a$ 为属性 $a$ 的值域，其中每个元素均为直觉模糊集。$f:U\times AT\to V$，且 $f(x,a)\in V_a$，即 $f(x,a)=\left(\mu_a(x),\gamma_a(x)\right)$。

若 $\mu_a(x)=1-\gamma_a(x)$，则该信息系统退化为一般的信息系统，这种系统已经在文献[11,12]中得到了讨论。

**例 3.2** 表 1 为一个直觉模糊信息系统，其中 $U=\left\{x_1,x_2,\cdots,x_8\right\}$，$AT=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_5\right\}$。

**定义 3.3** 如果 $f(x,a)\ge_{L^*}f(y,a)$ 成立，我们说 $x$ 关于属性 $a$ 占优于 $y$，并记做 $x\succ_a y$。$x$ 关于属性集 $A$ 占优于 $y$，记做 $x\succ_A y$，若 $x\succ_a y,\ \forall a\in A$。

**注：**由于 $\le_{L^*}$ 是一个偏序关系，$x\succ_a y$ 与 $y\succ_a x$ 可能同时不成立。如，在例 3.2 所给出的信息系统中，$x_1\succ_{a_2}x_2$ 与 $x_2\succ_{a_2}x_1$ 均不成立。

**定义 3.4** 设 $(U,AT,V,f)$ 为一个直觉模糊信息系统，对 $A\subseteq AT$，记 $R_A^{\ge}=\left\{(x,y)\middle|x\succ_A y\right\}$ 为该信息系统的优势关系，称此信息系统为基于优势关系的信息系统。类似的，可以定义 $R_A^{\le}=\left\{(y,x)\middle|x\succ_A y\right\}$。

**例 3.5**(续例 3.2) 可以计算得：$R_{AT}^{\ge}=\{(x_1,x_1),(x_1,x_4),(x_2,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_3,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_4),(x_5,x_5),(x_6,x_6),(x_7,x_4),(x_7,x_7),(x_8,x_3),(x_8,x_4),(x_8,x_8)\}$。

由 $R_A^{\ge}$ 和 $R_A^{\le}$ 的定义，易知有下面的性质。

**性质 3.6** 设 $I=(U,AT,V,f)$ 为一个直觉模糊信息系统，则

(1) $R_A^{\ge}=\bigcap_{a\in A}R_{\{a\}}^{\ge}$，$R_A^{\le}=\bigcap_{a\in A}R_{\{a\}}^{\le}$。

(2)若 $B\subseteq A\subseteq AT$，则 $R_A^{\le}\subseteq R_B^{\le}$，$R_A^{\ge}\subseteq R_B^{\ge}$。

(3) $R_A^{\ge}$ 和 $R_A^{\le}$ 是非对称相似关系(满足自反性、传递性)。

**定义 3.7** 记占优于 $x$ 的集合为

$[x]_A^{\ge}=\left\{y\in U\middle|y\succ_A x\right\}=\left\{y\in U\middle|(y,x)\in R_A^{\ge}\right\}$，

**Table 1. Intuitionistic fuzzy information system**
**表 1. 直觉模糊信息系统**

| $U$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | (0.5,0.4) | (0.5,0.0) | (0.5,0.4) | (0.5,0.4) | (0.5,0.4) |
| $x_2$ | (0.7,0.0) | (0.7,0.1) | (0.6,0.1) | (0.6,0.2) | (0.6,0.1) |
| $x_3$ | (0.6,0.4) | (0.4,0.4) | (0.6,0.1) | (0.4,0.4) | (0.4,0.5) |
| $x_4$ | (0.3,0.6) | (0.3,0.6) | (0.3,0.7) | (0.3,0.6) | (0.3,0.6) |
| $x_5$ | (0.2,0.0) | (0.7,0.0) | (0.6,0.1) | (0.2,0.2) | (0.2,0.7) |
| $x_6$ | (0.5,0.3) | (0.5,0.0) | (0.6,0.2) | (0.2,0.0) | (0.6,0.3) |
| $x_7$ | (0.5,0.4) | (0.6,0.4) | (0.4,0.0) | (0.4,0.1) | (0.5,0.4) |
| $x_8$ | (0.7,0.2) | (0.5,0.2) | (0.6,0.0) | (0.6,0.0) | (0.6,0.1) |

被 $x$ 所占优的集合为

$\left[x\right]_A^{\le}=\left\{y\in U\middle| x\succ_A y\right\}=\left\{y\in U\middle|\left(y,x\right)\in R_A^{\le}\right\}$。

**例 3.8**(续例 3.2) 可以计算得：$\left[x_1\right]_{AT}^{\ge}=\left\{x_1\right\}$，$\left[x_2\right]_{AT}^{\ge}=\left\{x_2\right\}$，$\left[x_3\right]_{AT}^{\ge}=\left\{x_2,x_3,x_8\right\}$，

$[x_4]_{AT}^{\ge}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_7,x_8\}$，$[x_5]_{AT}^{\ge}=\{x_5\}$，

$[x_6]_{AT}^{\ge}=\{x_6\}$，$[x_7]_{AT}^{\ge}=\{x_7\}$，$[x_8]_{AT}^{\ge}=\{x_8\}$。

由 $\left[x\right]_A^{\ge}$ 和 $\left[x\right]_A^{\le}$ 的定义，易知有下面的性质。

**性质 3.9** 设 $I=\left(U,AT,V,f\right)$ 为一个直觉模糊信息系统，

(1)若 $B\subseteq A\subseteq AT$，则 $\left[x\right]_A^{\le}\subseteq\left[x\right]_B^{\le}$，$\left[x\right]_A^{\ge}\subseteq\left[x\right]_B^{\ge}$。

(2)若 $y\in\left[x\right]_A^{\ge}$，则 $\left[y\right]_A^{\ge}\subseteq\left[x\right]_A^{\ge}$，且 $\left[x\right]_A^{\ge}=\bigcup_{y\in[x]_A^{\ge}}\left[y\right]_A^{\ge}$。

若 $y\in\left[x\right]_A^{\le}$，则 $\left[y\right]_A^{\le}\subseteq\left[x\right]_A^{\le}$，且 $\left[x\right]_A^{\le}=\bigcup_{y\in[x]_A^{\le}}\left[y\right]_A^{\le}$。

(3) $\left[y\right]_A^{\ge}=\left[x\right]_A^{\ge}\Leftrightarrow f\left(x,a\right)=f\left(y,a\right),\ \forall a\in A$；

$\left[y\right]_A^{\le}=\left[x\right]_A^{\le}\Leftrightarrow f\left(x,a\right)=f\left(y,a\right),\ \forall a\in A$。

(4) $U/R_A^{\ge}=\left\{\left[x\right]_A^{\ge}\middle| x\in U\right\}$，$U/R_A^{\le}=\left\{\left[x\right]_A^{\le}\middle| x\in U\right\}$ 一般不是 $U$ 的划分，而是 $U$ 的一个覆盖。

由于 $\left[x\right]_A^{\ge}$ 和 $\left[x\right]_A^{\le}$ 的性质是类似的，所以我们以下仅对 $\left[x\right]_A^{\ge}$ 作讨论，读者不难证明对 $\left[x\right]_A^{\le}$ 亦有相应的结论。

**定义 3.10** 设 $\left(U,AT,V,f\right)$ 为一个直觉模糊信息系统，若 $B\subseteq AT$，且 $R_B^{\ge}=R_{AT}^{\ge}$，则称 $B$ 是在关系 $R_A^{\ge}$ 下的协调集，若进一步对任意 $b\in B$，$R_{B-\{b\}}^{\ge}\ne R_{AT}^{\ge}$，则称 $B$ 是直觉模糊信息系统在关系 $R_A^{\ge}$ 下的约简。若所有约简的交集非空，则称此交集非空为核。

下面我们介绍一种求解所有约简的方法。

**定义 3.11** 设 $\left(U,AT,V,f\right)$ 为一个直觉模糊信息系统，记 $D_{AT}\left(x,y\right)=\left\{a\in AT\middle|\left(x,y\right)\notin R_{\{a\}}^{\ge}\right\}$ 为在关系 $\left[x\right]_A^{\ge}$ 下可辨识 $x$ 与 $y$ 的属性集，矩阵 $\boldsymbol{D_{AT}}=\left\{D_{AT}\left(x,y\right)\middle| x,y\in U\right\}$ 称为该信息系统的辨识矩阵。

**例 3.12**(续例 3.5) 计算表 1 中的辨识矩阵如表 2。

**注**：对基于优势关系的直觉模糊信息系统来说，$D_{AT}\left(x,y\right)\cap D_{AT}\left(y,x\right)=\varnothing$ 不一定成立。

**定理 3.13** 设 $\left(U,AT,V,f\right)$ 为一个直觉模糊信息系统，则 $B$ 是协调集 $\Leftrightarrow$

对 $\forall\left(x,y\right)\notin R_{AT}^{\ge}$，有 $B\cap D_{AT}\left(x,y\right)\ne\varnothing$。

**证明**："$\Rightarrow$"若 $B$ 是协调集，则 $R_B^{\ge}=R_{AT}^{\ge}$，因此对 $\forall x\in U$，有 $\left[x\right]_B^{\ge}=\left[x\right]_{AT}^{\ge}$。

若 $\left(x,y\right)\notin R_{AT}^{\ge}$ 即 $y\notin\left[x\right]_{AT}^{\ge}$，则 $y\notin\left[x\right]_B^{\ge}$，因此存在 $a\in B$，使得 $\left(x,y\right)\notin R_{\{a\}}^{\ge}$，所以 $a\in D_{AT}\left(x,y\right)$。

因此有 $B\cap D_{AT}\left(x,y\right)\ne\varnothing$，$\forall\left(x,y\right)\notin R_{AT}^{\ge}$。

"$\Leftarrow$"若 $\left(x,y\right)\notin R_{AT}^{\ge}$，且 $B\cap D_{AT}\left(x,y\right)\ne\varnothing$，则 $D_{AT}\left(x,y\right)\ne\varnothing$，并且存在 $a\in B$，使得 $a\in D_{AT}\left(x,y\right)$ 即 $\left(x,y\right)\notin R_{\{a\}}^{\ge}$，所以 $\left(x,y\right)\notin R_B^{\ge}$。由此可得 $R_{AT}^{\ge}\supseteq R_B^{\ge}$。

又显然有 $R_{AT}^{\ge}\subseteq R_B^{\ge}$，因此 $R_B^{\ge}=R_{AT}^{\ge}$，即 $B$ 是协调集。证毕。

**定义 3.14** 设 $\left(U,AT,V,f\right)$ 为一个直觉模糊信息系统，记 $\Delta=\wedge_{(x,y)\in U\times U}\vee\left\{D_{AT}\left(x,y\right)\right\}$，称为该信息系统的辨识公式。记 $\Delta\left(x\right)=\wedge_{y\in U}\vee\left\{D_{AT}\left(x,y\right)\right\}$，称为对象 $x$ 的辨识公式。

辨识公式 $\Delta$ 的极小析取范式可以唯一的确定信息系统所有的约简。

**例 3.15**(续例 3.12)

$$\Delta\left(x_1\right)=\left(a_1\vee a_3\right)\wedge\left(a_1\vee a_2\vee a_3\vee a_4\right)\wedge\left(a_1\vee a_3\vee a_4\vee a_5\right)\wedge\left(a_2\vee a_3\vee a_4\right)=a_3\vee\left(a_1\wedge a_2\right)\vee\left(a_1\wedge a_4\right);$$

$$\Delta\left(x_2\right)=a_2\wedge\left(a_2\vee a_4\right)\wedge\left(a_3\vee a_4\right)=\left(a_2\wedge a_3\right)\vee\left(a_2\wedge a_4\right);$$

$$\Delta\left(x_3\right)=\left(a_2\vee a_4\vee a_5\right)\wedge\left(a_1\vee a_2\vee a_4\right)\wedge\left(a_1\vee a_2\vee a_4\vee a_5\right)\wedge\left(a_2\vee a_3\vee a_4\vee a_5\right)=\left(a_1\wedge a_5\right)\vee a_2\vee a_4;$$

$$\Delta\left(x_4\right)=a_1\vee a_2\vee a_3\vee a_4;$$

$$\Delta\left(x_5\right)=\left(a_1\vee a_4\vee a_5\right)\wedge\left(a_1\vee a_3\vee a_4\vee a_5\right)=a_1\vee a_4\vee a_5;$$

**Table 2. Discernibility matrix of intuitionistic fuzzy information system in Table 1**
**表 2. 直觉模糊信息系统的辨识矩阵**

| $U$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | $AT$ | $a_1, a_3$ | | $a_1,a_2,a_3,a_4$ | $a_1,a_3,a_4,a_5$ | $a_2,a_3,a_4$ | $a_1,a_3,a_4,a_5$ |
| $x_2$ | $a_2$ | | | | $a_2$ | $a_2,a_4$ | $a_3,a_4$ | $a_3,a_4$ |
| $x_3$ | $a_2,a_4,a_5$ | $AT$ | | | $a_1,a_2,a_4$ | | $a_2,a_3,a_4,a_5$ | $AT$ |
| $x_4$ | $AT$ | $AT$ | $AT$ | | $a_1,a_2,a_3,a_4$ | $AT$ | $AT$ | $AT$ |
| $x_5$ | $a_1,a_4,a_5$ | $a_1,a_4,a_5$ | $a_1,a_4,a_5$ | $a_1,a_4,a_5$ | | $a_1,a_4,a_5$ | $a_1,a_3,a_4,a_5$ | $a_1,a_3,a_4,a_5$ |
| $x_6$ | $a_4$ | $AT$ | $a_1,a_3,a_4$ | $a_4$ | $a_1,a_2,a_3$ | | $a_2,a_3,a_4$ | $a_1,a_3,a_4,a_5$ |
| $x_7$ | $a_2,a_3,a_4$ | $AT$ | $a_1,a_3$ | | $a_1,a_2,a_3$ | $AT$ | | $AT$ |
| $x_8$ | $a_2$ | $a_1,a_2$ | | | $a_1,a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | |

 

$$\Delta(x_6)=a_4\wedge(a_1\vee a_3\vee a_4)\wedge(a_1\vee a_2\vee a_3)\wedge(a_2\vee a_3\vee a_4)\wedge(a_1\vee a_3\vee a_4\vee a_5)=a_4\wedge(a_1\vee a_2\vee a_3);$$

$$\Delta(x_7)=(a_2\vee a_3\vee a_4)\wedge(a_1\vee a_3)\wedge(a_1\vee a_2\vee a_3)=(a_1\wedge a_2)\vee(a_1\wedge a_4)\vee a_3;$$

$$\Delta(x_8)=a_2\wedge(a_1\vee a_2)=a_2;$$

$$\Delta=\wedge_{x\in U}\Delta(x)=(a_1\wedge a_2\wedge a_4)\vee(a_2\wedge a_3\wedge a_4)。$$

因此该信息系统所有的约简为 $a_1\wedge a_2\wedge a_4$ 和 $a_2\wedge a_3\wedge a_4$，核为 $a_2,a_4$。

## 4. 基于优势关系的直觉模糊决策信息系统的相对约简

**定义 4.1** 设 $I=(U,AT\bigcup d,V,f)$ 为一个直觉模糊决策信息系统,其中 $AT$ 为条件属性集,$d$ 为决策属性,且 $AT\bigcap d=\varnothing$， $f(x,d)$ 为单值的有序实值。记 $R_d^{\geq}=\{(x,y)|f(d,x)\geq f(d,y)\}$，若 $R_{AT}^{\geq}\subseteq R_d^{\geq}$，则称该决策信息系统为一致的，否则称为不一致的。

限于篇幅我们本文仅讨论一致直觉模糊决策信息系统，对于不一致决策信息系统的情形，我们将另文发表。

**定义 4.2.** 设 $I=(U,AT\bigcup d,V,f)$ 为一致直觉模糊决策信息系统，若 $B\subseteq AT$，且 $R_B^{\geq}\subseteq R_d^{\geq}$，则称 $B$ 是该决策信息系统的协调集，若进一步对任意 $b\in B$，$R_{B-\{b\}}^{\geq}\not\subset R_d^{\geq}$,则称 $B$ 是决策信息系统的一个相对约简。

**例 4.3** 如表 3 所示，$(U,AT\bigcup d,V,f)$ 为一个直觉模糊决策信息系统，且易知 $R_{AT}^{\geq}\subseteq R_d^{\geq}$，因此该决策信息系统为一个一致直觉模糊决策信息系统。

**定义 4.4** 设 $(U,AT\bigcup d,V,f)$ 为一致直觉模糊决策系统，记

$$D_{AT}^d(x,y)=\begin{cases}\{a\in AT|(x,y)\notin R_{\{a\}}^{\geq}\}, & (x,y)\notin R_d^{\geq}\\ \varnothing, & (x,y)\in R_d^{\geq}\end{cases}$$

为可辨识 $x$ 与 $y$ 的属性集，矩阵 $\boldsymbol{D_{AT}^d}=\{D_{AT}^d(x,y)|x,y\in U\}$ 称为该决策信息系统的辨识矩阵。

**例 4.5** (续例 4.3)计算表 3 的辨识矩阵,如表 4 所示。

**定理 4.6** 设 $(U,AT\bigcup d,V,f)$ 为一致直觉模糊决策系统，则 $B$ 是协调集 $\Leftrightarrow$

$\forall(x,y)\notin R_d^{\geq}$，有 $B\bigcap D_{AT}^d(x,y)\neq\varnothing$。

**证明：** "$\Rightarrow$"若 $R_B^{\geq}\subseteq R_d^{\geq}$，则对 $\forall(x,y)\notin R_d^{\geq}$，有 $(x,y)\notin R_B^{\geq}$。

因此存在 $a\in B$，使得 $(x,y)\notin R_{\{a\}}^{\geq}$，所以 $a\in D_{AT}(x,y)$。

因此有 $B\bigcap D_{AT}^d(x,y)\neq\varnothing$，$\forall(x,y)\notin R_{AT}^{\geq}$。

"$\Leftarrow$"若 $(x,y)\notin R_d^{\geq}$，且 $B\bigcap D_{AT}^d(x,y)\neq\varnothing$，则 $D_{AT}^d(x,y)\neq\varnothing$，因此存在 $a\in B$，使得 $a\in D_{AT}^d(x,y)$ 即 $(x,y)\notin R_{\{a\}}^{\geq}$，所以 $(x,y)\notin R_B^{\geq}$。由此可得 $R_B^{\geq}\subseteq R_d^{\geq}$。证毕。

**定义 4.7** 设 $(U,AT\bigcup d,V,f)$ 为一致直觉模糊决策信息系统，记 $\Delta=\wedge_{(x,y)\in U\times U}\vee\{D_{AT}^d(x,y)\}$，称为该决策信息系统的辨识公式。记 $\Delta(x)=\wedge_{y\in U}\vee\{D_{AT}^d(x,y)\}$，称为对象 $x$ 的辨识公式。

辨识公式 $\Delta$ 的极小析取范式可以唯一确定决策信息系统所有的相对约简。

**例 4.8**(续例 4.5) 计算表 3 中的相对约简。

$$\Delta=(a_1\vee a_3\vee a_4\vee a_5)\wedge(a_1\vee a_4\vee a_5)\wedge a_4\wedge(a_2\vee a_3\vee a_4)\wedge(a_2\vee a_3\vee a_4\vee a_5)=a_4。$$

由此可知，此决策信息系统只有一个相对约简 $a_4$。

## 5. 结束语

粗糙集理论是被实践证明了的一种处理分类和决策问题的有效方法。然而，在实际问题中，许多信息

**Table 3. Consistent intuitionistic fuzzy decision table**
**表 3. 一致直觉模糊决策信息系统**

| $U$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | (0.5,0.4) | (0.5,0.0) | (0.5,0.4) | (0.5,0.4) | (0.5,0.4) | 2 |
| $x_2$ | (0.7,0.0) | (0.7,0.1) | (0.6,0.1) | (0.6,0.2) | (0.6,0.1) | 3 |
| $x_3$ | (0.6,0.4) | (0.4,0.4) | (0.6,0.1) | (0.4,0.4) | (0.4,0.5) | 2 |
| $x_4$ | (0.3,0.6) | (0.3,0.6) | (0.3,0.7) | (0.3,0.6) | (0.3,0.6) | 1 |
| $x_5$ | (0.2,0.0) | (0.7,0.0) | (0.6,0.1) | (0.2,0.2) | (0.2,0.7) | 1 |
| $x_6$ | (0.5,0.3) | (0.5,0.0) | (0.6,0.2) | (0.2,0.0) | (0.6,0.3) | 1 |
| $x_7$ | (0.5,0.4) | (0.6,0.4) | (0.4,0.0) | (0.4,0.1) | (0.5,0.4) | 2 |
| $x_8$ | (0.7,0.2) | (0.5,0.2) | (0.6,0.0) | (0.6,0.0) | (0.6,0.1) | 3 |

**Table 4. Discernibility matrix of decision table in Table 3**
**表 4. 一致直觉模糊决策信息系统的辨识矩阵**

| $U$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | $AT$ | | | $a_1,a_3,a_4,a_5$ |
| $x_2$ | | | | | |
| $x_3$ | | $AT$ | | | $AT$ |
| $x_4$ | $AT$ | $AT$ | $AT$ | $AT$ | $AT$ |
| $x_5$ | $a_1,a_4,a_5$ | $a_1,a_4,a_5$ | $a_1,a_4,a_5$ | $a_1,a_3,a_4,a_5$ | $a_1,a_3,a_4,a_5$ |
| $x_6$ | $a_4$ | $AT$ | $a_1,a_3,a_4$ | $a_2,a_3,a_4$ | $a_1,a_3,a_4,a_5$ |
| $x_7$ | | $AT$ | | | $AT$ |
| $x_8$ | | | | | |

系统是基于优势关系的，因此 Greco 等提出了基于优势关系的粗糙集理论。本文讨论了基于优势关系的直觉模糊信息系统的属性约简及决策信息系统的相对约简，进一步拓展了基于优势关系的粗糙集理论的研究对象。

## 6. 致谢

本文得到国家自然科学基金(61179038，70771081)资助。

## 参考文献 (References)


[1] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] K. T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 87-96.

[3] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[4] Z. Pawlak. Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[5] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski. Rough approximation by dominance relations. International Journal of Intelligence Systems, 2002, 17(2): 153-171.

[6] J. S. Mi, W. Z. Wu, and W. X. Zhang. Approaches to knowledge reduction based on variable precision rough set model. Information Sciences, 2004, 159(3-4): 255-272.

[7] M. W. Shao, W. X. Zhang. Dominance relation and rules in an incomplete ordered information system. International Journal of Intelligent Systems, 2005, 20(1): 13-27.

[8] W. X. Zhang, J. S. Mi. Incomplete information system and its optimal selections. Computers & Mathematics with Applications, 2004, 48(5-6): 691-698.

[9] W. X. Zhang, J. S. Mi, and W. Z. Wu. Approaches to knowledge reductions in inconsistent systems. International Journal of Intelligent Systems, 2003, 18(9): 989-1000.

[10] C. Cornelis, G. Deschrijver, and E. Kerre. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: Construction, classification, application. International Journal of Approximation Reasoning, 2004, 35(1): 55-95.

[11] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski. Rough sets theory for multi-criteria decision analysis. European Journal of Operational Research, 2001, 129(1): 1-47.

[12] Y. Kusunoki, M. Inuiguchi. V. Torra, Y. Narukawa (Eds.). A comprehensive study on reducts in Dominance-Based Rough Set Approach. Lecture Notes in Computer Science, 2008, 5285: 167-178.


 