Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 12-14
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.11003 Published Online April 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Exact Solutions and Conservation Laws of Whitham-Broer-Kaup-Like Equations

Jinqian Yu, Xiqiang Liu, Tingting Wang
School of Mathematicas Science, Liaocheng University, Liaocheng
Email: yujinqiand@sina.com

Received: Mar. 8th, 2011; revised: Apr. 6th, 2011; accepted: Apr. 7th, 2011.

Abstract: By using the modified CK's direct method, we derive the symmetry group theorem of WBKL equations. The new exact solutions of WBKL equations are obtained by applied the symmetry group theorem and the old solutions. Based on the above theorem and the adjoint equations, we derive the conservation laws of WBKL equations.

Keywords: WBKL Equations; CK's Direct Method; Symmetry; Exact Solutions; Conservation Laws

Whitham-Broer-Kaup-Like 方程组的精确解和守恒律

于金倩，刘希强，王婷婷
聊城大学数学科学学院，聊城
Email: yujinqiand@sina.com

收稿日期：2011 年 3 月 8 日；修回日期：2011 年 4 月 6 日；录用日期：2011 年 4 月 7 日

摘　要：通过利用修正 CK 直接方法建立了 Whitham-Broer-Kaup-Like(WBKL)方程组的对称群理论。利用对称群理论和 WBKL 方程组的旧解得到了它们的新的精确解。基于上述理论和 WBKL 方程组的共轭方程组的理论，得到了 WBKL 方程组的守恒律。

关键字：Whitham-Broer-Kaup-Like 方程组；CK 直接方法；对称；精确解；守恒律

1. 引言

在本文中，应用改进的CK直接方法，我们将考虑Whitham-Broer-Kaup-Like(WBKL)方程组[1]：

$$u_t + uu_x + \gamma H_x + \beta u_{xx} = 0 \tag{1}$$

$$H_t + (Hu)_x + \alpha u_{xxx} - \beta H_{xx} = 0 \tag{2}$$

此方程组在数学物理中具有十分重要的地位，其中 α,β 和 γ 是任意实常数。当 $\gamma=1$，为 Whitham-Broer-Kaup方程[2]，许多数学家和物理学家对此方程进行了细致的研究并取得很大进展，求出此方程存在爆破解、周期解和行波解等，详细内容参看文献[3-7]，当 $\alpha=0,\gamma=1$ 为长波方程的近似方程，当 $\alpha=\gamma=1,\beta=0$ 为变形的 Boussinesq 方程[8,9]，当 $\alpha=\dfrac{1}{3},\gamma=1,\beta=0$ 为色散长波方程[10,11]。

在文献[12]中作者利用 (G'/G) 扩展函数方法得到WBKL方程组的三种带参数的函数解,包括双曲函数解，三角函数解，有理函数解。当参数取一定的值时，可从双曲函数解中得到一些孤立波解。

本文利用修正的CK直接方法得到其对称，并通过群理论建立新旧解之间的关系，推广了已有文献中的结果。最后通过所求的对称得到了方程组的守恒律。本文求得的守恒律和对称群还没有出现在已有的文献中。

2. WBKL 方程组的新精确解

假设方程组有满足如下形式的对称群：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \alpha_1(x,t) + \beta_1(x,t)U(\xi,\tau) \\ H(x,t) &= \alpha_2(x,t) + \beta_2(x,t)\Psi(\xi,\tau) \end{aligned} \tag{3}$$

这里 $\xi=\xi(x,t),\tau=\tau(x,t)$ 是待定函数，并且在转换 $\{u,H,x,t\}\to\{U,\Psi,\xi,\tau\}$ 下要求 $U(\xi,\tau),\Psi(\xi,\tau)$ 也满足

基金项目：国家自然科学基金与中物院联合基金资助项目(11076015)，山东自然科学基金资助课题(Y2008A35)。

方程组，即

$$U_\tau + UU_\xi + \gamma\Psi_\xi + \beta U_{\xi\xi} = 0 \quad (4)$$

$$\Psi_\tau + (\Psi U)_\xi + \alpha U_{\xi\xi\xi} - \beta\Psi_{\xi\xi} = 0 \quad (5)$$

把方程(3)代入方程组(1)和(2)并利用方程组(4)和(5)，得到：

$$\tau_x U_{\xi^4} + \beta_1\beta_{1x}U^2 + \gamma\beta_{2x}\Psi + F(x,t,\xi,\tau,U,\Psi,\cdots) = 0 \quad (6)$$

其中$U_{\xi^4} = \dfrac{\partial^4 U}{\partial \xi^4}$，并且函数$F(x,t,\xi,\tau,U,\Psi,\cdots)$与$U_{\xi^4}, U^2, \Psi$无关，为了保证(6)式对任意的函数$U,\Psi$成立，必须使$U_{\xi^4}, U^2, \Psi$的系数等于零，可得

$$\tau_x = 0,\quad \beta_{1x} = 0,\quad \beta_{2x} = 0 \quad (7)$$

把(7)代入(6)可得一系列的关于$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\xi$和$\tau$的决定方程组，解之可得

$$\begin{gathered}\alpha_1 = c_1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = c_2, \beta_2 = c_2^2,\\ \xi = c_2x - c_1c_2t + c_3, \tau = c_2^2t + c_4\end{gathered} \quad (8)$$

其中$c_i(i=1,2,3,4)$为任意常数。

根据上述过程，我们有下面的对称群定理：

定理 1 若$U = U(\xi,\tau), \Psi = \Psi(\xi,\tau)$是 WBKL 方程组的解，那么下述解也是

$$u = c_1 + c_2U(\xi,\tau), H = c_2^2\Psi(\xi,\tau) \quad (9)$$

这里ξ,τ由(8)式决定。

从定理1能够看到方程(9)其实是一个自贝克隆变换，它给出了WBKL新旧精确解之间的关系。WBKL方程组的$u(x,t)$有如下形式的解[12]：

$$\begin{aligned}u(\xi) &= V \pm \sqrt{-\mu\left(\beta^2+\alpha\gamma\right)}\coth\sqrt{-\mu}\xi\\ &\pm \frac{\sqrt{-\sigma^2\mu\left(\beta^2+\alpha\gamma\right)}}{\sigma}\operatorname{csch}\sqrt{-\mu}\xi\end{aligned} \quad (10)$$

其中$\xi = x - Vt$，μ为任意常数，$\sigma = \pm 1$，把定理1作用到(10)式，我们可以得到WBKL方程组的新的精确解

$$\begin{aligned}u(x,t) &= c_1 + c_2V \pm c_2\sqrt{-\mu\left(\beta^2+\alpha\gamma\right)}\\ &\coth\sqrt{-\mu}\left(c_2x - c_1c_2t + c_3 - V\left(c_2^2t + c_4\right)\right)\\ &\pm c_2\frac{\sqrt{-\sigma^2\mu(\beta^2+\alpha\gamma)}}{\sigma}\\ &\operatorname{csch}\sqrt{-\mu}(c_2x - c_1c_2t + c_3 - V(c_2^2t + c_4))\end{aligned} \quad (11)$$

这里V,μ为任意常数，$\sigma = \pm 1$。

注1 类似地，利用不同的种子解，重复利用定理1能够得到不同种类的精确解。因此我们推广了文献[12]的结论。

3. 对称群的李代数

为了通过(8)式讨论它的李代数，我们限制

$$c_1 = \varepsilon C_1, c_2 = 1 + \varepsilon C_2, c_3 = \varepsilon C_3, c_4 = \varepsilon C_4,$$

这里ε是无穷小参数，且C_1, C_2, C_3和C_4是任意常数。那么方程(9)可记作

$$\begin{gathered}u = U + \varepsilon\sigma(U), H = \Psi + \varepsilon\sigma(\Psi),\\ \sigma(U) = (C_2x - C_1t + C_3)U_x + (2C_2t + C_4)U_t + C_2U + C_1,\\ \sigma(\Psi) = (C_2x - C_1t + C_3)\Psi_x + (2C_2t + C_4)\Psi_t + 2C_2\Psi\end{gathered} \quad (12)$$

这里由(12)表达的σ是WBKL方程组的对称。对称群的等价算子表达式为

$$\begin{aligned}v &= \left(C_2x - C_1t + C_3\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(2C_2t + C_4\right)\frac{\partial}{\partial t}\\ &-\left(C_2U + C_1\right)\frac{\partial}{\partial U} - 2C_2\frac{\partial}{\partial \Psi}\\ &= C_1\left(\frac{\partial}{\partial U} - t\frac{\partial}{\partial x}\right) + C_2\left(x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - U\frac{\partial}{\partial U} - 2\frac{\partial}{\partial \Psi}\right)\\ &+C_3\frac{\partial}{\partial x} + C_4\frac{\partial}{\partial t}\\ &= C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 + C_4v_4\end{aligned} \quad (13)$$

并且这些对称之间的算子关系为$[v_1,v_2] = -v_1$，$[v_1,v_3] = [v_3,v_4] = 0$，$[v_1,v_4] = v_3$，$[v_2,v_3] = -v_3$，$[v_2,v_4] = -2v_4$。

注2 由(13)式可以看出方程组(1)和(2)满足四维的李代数v_1,v_2,v_3,v_4，同时他们也能通过标准的李群方法得到。

4. WBKL 方程组的守恒律

在本节，我们将通过WBKL方程组的共轭方程组和对称来研究它的守恒律[13]，共轭方程组有下述形式

$$\begin{gathered}\theta_{1t} + \theta_{1x}u + \theta_{2x}H - \beta\theta_{1xx} + \alpha\theta_{2xxx} = 0,\\ \theta_{2t} + \gamma\theta_{1x} + \theta_{2x}u + \beta\theta_{2xx} = 0,\end{gathered} \quad (14)$$

拉氏量函数

$$\begin{aligned}L &= \theta_1\left(u_t + uu_x + \gamma H_x + \beta u_{xx}\right)\\ &+\theta_2\left(H_t + \left(Hu\right)_x + \alpha u_{xxx} - \beta H_{xx}\right)\end{aligned}. \quad (15)$$

定理2 每个李点对称，李贝克隆变换和方程组(1)和(2)的对称都给出了WBKL方程组和共轭方程组的一个守恒律。并且守恒向量(C^1,C^2)由下述表达式确定

$$C^i=\xi^i L+W^\alpha\left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha}-D_j\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}\right)+D_jD_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)+\cdots\right]+D_j\left(W^\alpha\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\alpha}-D_k\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}\right)+\cdots\right]+D_jD_k\left(W^\alpha\right)\left[\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\alpha}+\cdots\right] \quad (16)$$

其中$W^\alpha=\eta^\alpha-\xi^j u_j^\alpha$。

因此我们考虑三阶拉氏量，利用定理2和公式(16)计算方程组的守恒律，

$$\xi^1=C_2x-C_1t+C_3,\quad \xi^2=2C_2t+C_4,$$

$$\eta^1=-C_2u-C_1,\quad \eta^2=-2C_2H,$$

$$W^1=-C_2u-C_1-(C_2x-C_1t+C_3)u_x-(2C_2t+C_4)u_t,$$

$$W^2=-2C_2H-(C_2x-C_1t+C_3)H_x-(2C_2t+C_4)H_t,$$

上述条件下(16)满足守恒方程$D_x(C^1)+D_t(C^2)=0$，且向量$C=(C^1,C^2)$组成为

$$\begin{aligned}C^1=&-\left(\theta_1u+\theta_2H-\theta_{1x}\beta+\alpha\theta_{2xx}\right)\left[C_2u+C_1+\left(C_2x-C_1t+C_3\right)u_x+\left(2C_2t+C_4\right)u_t\right]\\&-\left(\theta_1\beta-\alpha\theta_{2x}\right)\left[2C_2u_x+\left(C_2x-C_1t+C_3\right)u_{xx}+\left(2C_2t+C_4\right)u_{tx}\right]\\&-\left(\theta_1\gamma-\beta\theta_{2x}\right)\left[2C_2H+\left(C_2x-C_1t+C_3\right)H_x+\left(2C_2t+C_4\right)H_t\right]\\&-\alpha\theta_2\left[3C_2u_{xx}+\left(C_2x-C_1t+C_3\right)u_{xxx}+\left(2C_2t+C_4\right)u_{txx}\right]+\beta\theta_2\left[3C_2H_x+\left(C_2x-C_1t+C_3\right)H_{xx}+\left(2C_2t+C_4\right)H_{tx}\right]\end{aligned}$$

$$C^2=-\theta_1\left[C_2u+C_1+\left(C_2x-C_1t+C_3\right)u_x+\left(2C_2t+C_4\right)u_t\right]-\theta_2\left[2C_2H+\left(C_2x-C_1t+C_3\right)H_x+\left(2C_2t+C_4\right)H_t\right]$$

注3 借助于Maple 软件，我们已经验证了上述向量(C^1,C^2)是方程组(1)和(2)的守恒向量。这个向量包含共轭方程组(14)的任意解θ_1和θ_2，因此上式给出了方程组的无穷多个守恒律。

5. 结论

本文首先利用修正的CK直接方法得到了WBKL方程组的新、旧解之间的关系。利用定理1得到了WBKL方程组的新的精确解。推广了文献[7]的结论。然后得到了WBKL方程组的对称和共轭方程组，进而求得了WBKL方程组的无穷多守恒律。本文中用到的方法也能用于解决其他的许多的线性和非线性方程或方程组。

参考文献 (References)

[1] Y. B. Zhou, C. Li. Application of modified (G′/G) -expansion method to traveling wave solutions for Whitham-Broer-Kaup-Like equations. Commun. Theor. Phys., 2009, 51(1): 664-670.

[2] Y. Chen, Q. Wang. Multiple Riccati equations rational expansion method and complextion solutions of the Whitham-Broer-Kaup equation. Phys. Lett. A, 2005, 347(4-6): 215-227.

[3] F. D. Xie, Z. Y. Yan, H. Q. Zhang. Explicit and exact traveling wave solutions of Whitham-Broer-Kaup shallow water equations. Phys. Lett. A, 2001, 285(1-2): 76-80.

[4] Z. Y. Yan, H. Q. Zhang. New explicit solitary wave solutions and periodic wave solutions for Whitham-Broer- Kaup equation in shallow water. Phys. Lett. A, 2001, 285(5-6): 355-362.

[5] Y. Chen, Q. Wang. Multiple Riccati equations rational expansion method and complexion solutions of the Whitham- Broer-Kaup equation. Phys. Lett. A, 2005, 347(4-6): 215-227.

[6] X. Y. Jiao, H. Q. Zhang. An extended method and its application to Whitham-Broer-Kaup equation and two-dimensional perturbed KdV equation. Appl. Math. Comput., 2006, 172(1): 664-677.

[7] S. M. El-Sayed, D. an Kaya. Exact and numerical traveling wave solutions of Whitham-Broer-Kaup equations. Appl. Math. Comput., 2005, 167(2): 1339-1349.

[8] E. Yomba. The extended Fan’s sub-equation method and its application to KdV-MKdV, BKK and variant Boussinesq equations. Phys. Lett. A, 2005, 336(6): 463-476.

[9] Z. Y. Yan, H. Q. Zhang. New explicit and exact travelling wave solutions for a system of variant Boussinesq equations in mathematical physics. Phys. Phys. Lett. A, 1999, 252(6): 291-296.

[10] Y. Chen, Q. Wang. A new general algebraic method with symbolic computation to construct new travelling wave solution for the (1 + 1)-dimensional dispersive long wave equation. Appl. Math. Comput., 2005, 168(2): 1189-1204.

[11] X. D. Zheng, Y. Chen, H. Q. Zhang. Generalized extended tanh-function method and its application to (1 + 1)-dimensional dispersive long wave equation. Phys. Lett. A, 2003, 311(2-3): 145-157.

[12] S. M. Guo, Y. B. Zhou. The extended (G′/G) expansion method and its applications to the Whitham-Broer-Kaup equation and coupled Hirota-Satsuma KdV equation. Appl. Math. Comput., 2010, 215(9): 3214-3221.

[13] N. H. Ibragimov. A new conservation theorem. J. Math. Anal. Appl., 2007, 333(1): 311-328.