Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 21-25
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.11005 Published Online April 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Two Splitting Least-Squares Mixed Element Methods for Burgers Equations

Haiming Gu[1], Huining Qu[2]
[1]International College, [2]Department of Mathematics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao
Email: guhm@ns.qd.sd.cn; qhn4173@163.com
Received: Mar. 21st, 2011; revised: Mar. 26th, 2011; accepted: Mar. 28th, 2011.

Abstract: Two splitting least-squares mixed element methods are proposed to simulate Burgers equation in this paper. The advantage of this methods is that the coupled system can be split into two independent sub-systems and then reduce the difficulty and scale of primal problems. Theoerical analysis shows that the methods yield the approximate solutions for the primal problems with optimal accuracy in $L^2(\Omega)$ norm.

Keywords: Burgers Equation; Least-Squares Functional; Mixed Finite Element Method; Error Estimation

解 Burgers 方程的分裂型最小二乘混合元方法

顾海明[1]，曲慧宁[2]
[1]青岛科技大学国际学院，青岛；[2]青岛科技大学数理学院，青岛
Email: guhm@ns.qd.sd.cn; qhn4173@163.com
收稿日期：2011 年 3 月 21 日；修回日期：2011 年 3 月 26 日；录用日期：2011 年 3 月 28 日

摘　要：本文对 Burgers 方程提出了 Euler 型分裂的最小二乘混合元格式，该格式最大的优点是将耦合的方程组系统分裂成为两个独立的子系统进行求解，从而在很大程度上降低了原问 题的求解难度和规模，并通过引入适当的最小二乘泛函，得到原未知量的最优阶 $L^2(\Omega)$ 模误差估计。

关键词：Burgers 方程；最小二乘函数；混合元方法；误差估计

1. 引言

Burgers 方程曾被 J. M. Burgers[1]作为流体的一类运动现象的数学模型加以研究，而且方程本身具有流体动力学 Navier-Stokes 方程的性质，可以作为 Navier-Stokes 方程的简单模型方程，还可以作为浅水波问题，交通流动力学等问题的数学模型，具有广泛的应用背景。近年许多学者及工程技术人员对其进行了深入的理论研究和数值计算，其中差分格式居多[2]。本文用分裂型最小二乘混合有限元方法来研究该问题。最小二乘混合有限元法的一个重要优点就是可以通过最小二乘函数将一个非自共轭的问题转化成一个对称正定问题，而且该方法不需要有限元空间满足 LBB 条件[3-6]。但是用最小二乘混合元方法求解抛物问题时，最终离散格式通常需要求解一个耦合的方程组，在一定程度上比较复杂，而分裂型最小二乘混合有限元法[7]的最大优点就是能将耦合的方程组系统分裂成为两个独立的子系统求解，从而极大的降低了原问题的求解难度和规模.本文将此方法应用到 Burgers 方程中，提出了 Euler 型分裂的最小二乘混合元格式，并通过引入适当的最小二乘泛函，得到原未知量的最优阶 $L^2(\Omega)$ 模误差估计。

本文的主要内容为：第二部分给出了 Burgers 方程的最小二乘形式：Euler 型格式 I 及 Euler 型格式 II（即分裂型最小二乘混合元格式）；第三部分引入适当的最小二乘泛函，证明了问题的解存在唯一。第四部分关于 Euler 型格式 II 对未知量得到了最优阶 $L^2(\Omega)$ 模误差估计。

本文使用Sobolev空间通常的定义和记号，$L^2(\Omega)$ 和 $H^K(\Omega)$ 及相应的范数 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$，$\|\cdot\|_k=\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$。$M$ 表示一般意义上的可变正常数。

2. 抛物方程的最小二乘形式

考虑如下方程：

$$\begin{cases} u_t+uu_x=\varepsilon u_{xx},(x,t)\in\Omega\times(0,t_1) \\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,t_1) \\ u(x,0)=\psi(x),x\in\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\Omega\in R^2$ 为一多边形区域，$\partial\Omega$ 为它的 Lipschitz 连续边界，$\psi(x)$ 为已知函数，$t_1>0$。

现定义如下两个 Hilbert 空间：

$$V=H_0^1(\Omega)$$

$$W=\left\{\tau\in(L^2(\Omega))^2:\operatorname{div}\tau\in L^2(\Omega)\right\} \tag{2.2}$$

令 Δt 为时间剖分步长，N 为整数，$\Delta t=T/N$，记 $t^n=n\cdot\Delta t$，$n=0$，1，2，…，N。在(2.1)式中取 $t=t^n$，用一阶向后 Euler 差分对其关于时间离散得：

$$\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}+u^{n-1}\nabla u^n=\varepsilon\Delta u^n+R^n \tag{2.3}$$

其中 $R^n=\dfrac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}-\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^n$。可知 R^n 为 $O(\Delta t)$ 项，可以省略。引入未知量 $\sigma^n=-\nabla u^n$，则(2.3)式变为：

$$\begin{cases} u^n-\Delta tu^{n-1}\sigma^n+\Delta t\varepsilon\nabla\sigma^n=u^{n-1} \\ \sigma^n+\nabla u^n=0 \end{cases} \tag{2.4}$$

用 $(\Delta t\varepsilon)^{1/2}$ 去乘(2.4)中的第二式，得：

$$\begin{cases} u^n-\Delta tu^{n-1}\sigma^n+\Delta t\varepsilon\nabla\sigma^n-u^{n-1}=0 \\ (\Delta t\varepsilon)^{1/2}(\sigma^n+\nabla u^n)=0 \end{cases} \tag{2.5}$$

在求第 n 层时，我们用 a 来表示 $n-1$ 层上 u 的值，可知 a 是与时间层有关的常数，不妨记为 $a(t)$，且有 $a_*<a(t)<a^*$。至此，我们定义如下最小二乘泛函：

对于 $(v,\tau)\in V\times W$，

$$\begin{aligned} J(v,\tau)=&\left\|u^n-\Delta tu^{n-1}\sigma^n+\Delta t\varepsilon\nabla\sigma^n-u^{n-1}\right\|^2 \\ &+\left\|(\Delta t\varepsilon)^{1/2}(\sigma^n+\nabla u^n)\right\|^2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

从而相应的(2.5)的最小二乘问题为：求 $(u^n,\sigma^n)\in(V,W)$，满足：

$$J(u^n,\sigma^n)=\inf_{v\in V,\tau\in W}J(v,\tau) \tag{2.7}$$

根据最小二乘泛函 $J(v,\tau)$，定义如下双线性泛函：

$$\begin{aligned} &A(u^n,\sigma^n;v,\tau) \\ &=\left(u^n-\Delta ta(t)\sigma^n+\Delta t\varepsilon\nabla\sigma^n,v-\Delta ta(t)\tau+\Delta t\varepsilon\nabla\tau\right) \\ &+\left((\Delta t\varepsilon)(\sigma^n+\nabla u^n),\tau+\nabla v\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

求解(2.7)就等价于求解

$$A(u^n,\sigma^n;v,\tau)=\left(a(t),v-\Delta ta(t)\tau+\Delta t\varepsilon\nabla\tau\right) \tag{2.9}$$

设 T_{h_σ},T_{h_u} 是区域 Ω 上两有限元网格剖分族，h_σ,h_u 分别为网格步长参数，相应的有限元空间为 $W_{h_\sigma}\subset W,V_{h_u}\subset V$，由[8]可以知道有限元空间有如下逼近性质：对任意的 $v\in V\cap H^{m+1}(\Omega)$，$\tau\in W\cap\left(H^{k+1}(\Omega)\right)^2$，有

$$\inf_{v_n\in V_{h_u}}\left\{\|v-v_h\|+h_u\left\|\nabla(v-v_h)\right\|\right\}\le Mh_u^{m+1}\|v\|_{m+1} \tag{2.10}$$

$$\inf_{\tau_n\in W_{h_\sigma}}\|\tau-\tau_h\|\le Mh_\sigma^{k+1}\|\tau\|_{k+1} \tag{2.11}$$

$$\inf_{\tau_n\in W_{h_\sigma}}\|\operatorname{div}(\tau-\tau_h)\|\le Mh_\sigma^{k_1}\|\tau\|_{k_1} \tag{2.12}$$

对于 $u\in H_0^1(\Omega)$，定义椭圆投影 $Ru\in V_{h_u}$，满足：

$$\left(\nabla(Ru-u),\nabla v_h\right)=0,\quad\forall v_h\in V_{h_u} \tag{2.13}$$

由[8]知下面估计式成立：

$$\begin{cases} \|u(t)-Ru(t)\|\le Mh_u^{m+1}\|u(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \\ \|u_t(t)-Ru_t(t)\|\le Mh_u^{m+1}\left(\|u(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)}+\|u_t(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)}\right) \end{cases} \tag{2.14}$$

假设初始近似满足：

$$\begin{cases} \left\|u^0-u_h^0\right\|+h\left\|\nabla(u^0-u_h^0)\right\|\le Mh_u^{m+1}\left\|u^0\right\|_{H^{m+1}(\Omega)} \\ \left\|\sigma^0-\sigma_h^0\right\|\le Mh_\sigma^{k+1}\left\|\sigma^0\right\|_{H(div,\Omega)} \end{cases} \tag{2.15}$$

则问题(2.1)的Euler型最小二乘混合元格式(Euler型格式Ⅰ)为：已知 u_h^{n-1},σ_h^{n-1}，求 $u_h^n\in V_{h_u},\sigma_h^n\in W_{h_\sigma}$，使

$$\begin{aligned} &A(u_h^n,\sigma_h^n;v_h,\tau_h)=\left(a(t),v_h-\Delta ta(t)\tau_h+\Delta t\varepsilon\nabla\tau_h\right), \\ &\quad\forall(v_h,\tau_h)\in V_{h_u}\times W_{h_\sigma} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Euler 型格式Ⅰ是传统意义上的最小二乘混合元格式，我们在本文中主要研究分裂型 Euler 最小二乘混合元格式：(称 Euler 型格式Ⅱ)，在定义之前，我们先看一个引理：

引理 1 对任意的 $u,v\in V,\sigma,\tau\in W$ 有

$$\begin{aligned}A(u,\sigma;v,\tau)&=(u,v)+(u,\Delta ta(t)\tau)\\&+(m\sigma,\tau)-(\Delta ta(t)\sigma,v)\\&+((\Delta t\varepsilon)^2\nabla\sigma,\nabla\tau)+(\Delta t\varepsilon\nabla u,\nabla v)\end{aligned}\tag{2.17}$$

其中 $m=(\Delta ta(t))^2+\Delta t\varepsilon$ 。

证明： 由(2.8)可得：

$$\begin{aligned}A(u,\sigma;v,\tau)&=(u-\Delta ta(t)\sigma+\Delta t\varepsilon\nabla\sigma,v-\Delta ta(t)\tau+\Delta t\varepsilon\nabla\tau)\\&+((\Delta t\varepsilon)(\sigma+\nabla u),\tau+\nabla v)\\&=(u,v)-(\Delta ta(t)\sigma,v)+(\Delta t\varepsilon\nabla\sigma,v)\\&-(u,\Delta ta(t)\tau)+(\Delta ta(t)\sigma,\Delta ta(t)\tau)\\&-(\Delta t\varepsilon\nabla\sigma,\Delta ta(t)\tau)+(u,\Delta t\varepsilon\nabla\tau)\\&-(\Delta ta(t)\sigma,\Delta t\varepsilon\nabla\tau)+(\Delta t\varepsilon\nabla\sigma,\Delta t\varepsilon\nabla\tau)\\&+((\Delta t\varepsilon)\sigma,\tau)+((\Delta t\varepsilon)\nabla u,\tau)\\&+((\Delta t\varepsilon)\sigma,\nabla v)+((\Delta t\varepsilon)\nabla u,\nabla v)\end{aligned}$$

利用 Green 公式，第二个等号右端，第三项和第十二项相加为零，第六项和第八项相加为零，第七项和第十一项相加为零。由此，

$$\begin{aligned}A(u,\sigma;v,\tau)&=(u,v)+(u,\Delta ta(t)\tau)+(m\sigma,\tau)\\&-(\Delta ta(t)\sigma,v)+((\Delta t\varepsilon)^2\nabla\sigma,\nabla\tau)\\&+(\Delta t\varepsilon\nabla u,\nabla v)\end{aligned}$$

其中 $m=(\Delta ta(t))^2+\Delta t\varepsilon$ 。

结合引理 1，我们在 Euler 型格式Ⅰ中 $\tau_h=0$ ，则得到：

$$(u_h,v_h)-(\Delta ta(t)\sigma_h,v_h)+(\Delta t\varepsilon\nabla u_h,\nabla v_h)=(a(t),v_h)\tag{2.18}$$

若取 $v_h=0$ ，得到

$$\begin{aligned}&(u_h,\Delta ta(t)\tau_h)+(m\sigma_h,\tau_h)+((\Delta t\varepsilon)^2\nabla\sigma_h,\nabla\tau_h)\\&=(a(t),\Delta t\varepsilon\nabla\tau_h-\Delta ta(t)\tau_h)\end{aligned}\tag{2.19}$$

这样，就得到了分裂型 Euler 最小二乘混合元格式(称 Euler 型格式Ⅱ)：已知 u_h^{n-1},σ_h^{n-1} ，求 $u_h^n\in V_{h_u},\sigma_h^n\in W_{h_\sigma}$ ，使

$$\begin{cases}(u_h,v_h)-(\Delta ta(t)\sigma_h,v_h)+(\Delta t\varepsilon\nabla u_h,\nabla v_h)\\ \qquad=(a(t),v_h)\\(u_h,\Delta ta(t)\tau_h)+(m\sigma_h,\tau_h)+((\Delta t\varepsilon)^2\nabla\sigma_h,\nabla\tau_h)\\ \qquad=(a(t),\Delta t\varepsilon\nabla\tau_h-\Delta ta(t)\tau_h)\end{cases}\tag{2.20}$$

其中 $m=(\Delta ta(t))^2+\Delta t\varepsilon$ 。

3. 解的存在唯一性

我们首先证明一个定理，其中仍采用标准范数意义，对 $\|\cdot\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}$ ，有

$$\|\sigma\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2=\|\sigma\|^2+\|\mathrm{div}\sigma\|^2,\quad\forall\sigma\in H(\mathrm{div},\Omega)\tag{3.1}$$

定理 1 双线性泛函 $A(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)$ 满足连续性和强制性条件，即对任意 $u,v\in V$ 和 $\sigma,\tau\in W$ ，存在正常数 α 和 β ，使得

$$A(u,\sigma;v,\tau)\le\alpha\left(\|\nabla u\|^2+\|\sigma\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2\right)^{1/2}\left(\|\nabla v\|^2+\|\tau\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

$$A(u,\sigma;v,\tau)\ge\beta\left(\|\nabla u\|^2+\|\sigma\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2\right)$$

证明： 由双线性泛函 $A(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot)$ 知

$$\begin{aligned}A(u,\sigma;u,\sigma)&=(u,u)+(u,\Delta ta(t)\sigma)+(m\sigma,\sigma)-(\Delta ta(t)\sigma,u)\\&+((\Delta t\varepsilon)^2\nabla\sigma,\nabla\sigma)+(\Delta t\varepsilon\nabla u,\nabla u)\\&=\|u\|^2+m\|\sigma\|^2+(\Delta t\varepsilon)^2\|\nabla\sigma\|^2+(\Delta t\varepsilon)\|\nabla u\|^2\end{aligned}$$

所以存在 M，使得：

$$A(u,\sigma;u,\sigma)\le M\left(\|\nabla\sigma\|^2+\|\sigma\|^2+\|\nabla u\|^2+\|u\|^2\right)$$

由 Poincare 不等式：$\|u\|^2\le M\|\nabla u\|^2$ 及(3.1)式，我们可以得到

$$A(u,\sigma;u,\sigma)\le M\left(\|\nabla u\|^2+\|\sigma\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2\right)$$

因为双线性形式 $A(u,\sigma;v,\tau)$ 是对称的，所以有

$$A(u,\sigma;v,\tau)\le\alpha A(u,\sigma;u,\sigma)^{1/2}A(v,\tau;v,\tau)^{1/2}$$

即连续性得证。

下证强制性：

由连续性可知：

$$\begin{aligned}&A(u,\sigma;u,\sigma)\\&=\|u\|^2+m\|\sigma\|^2+(\Delta t\varepsilon)^2\|\nabla\sigma\|^2+(\Delta t\varepsilon)\|\nabla u\|^2\end{aligned}$$

从而也存在 M，使得

$$\begin{aligned}A(u,\sigma;u,\sigma)&\ge M\left(\|\nabla\sigma\|^2+\|\sigma\|^2+\|\nabla u\|^2+\|u\|^2\right)\\&=M\left(\|\sigma\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2+\|\nabla u\|^2+\|u\|^2\right)\\&\ge\beta\left(\|\sigma\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}^2+\|\nabla u\|^2\right)\end{aligned}$$

强制性得证。

由 Lax-Miligram 引理可知(2.9)式存在唯一解。因为(2.20)式与(2.9)式是等价的，所以 Euler 型格式Ⅱ存在唯一解。

4. 误差估计

对于一般的混合元方法，引入椭圆投影算子 $Ru\in V_{h_u}$，有

$$\left(\nabla\left(Ru-u\right),\nabla v_h\right)=0,\forall v_h\in V_{h_u}$$

同样会有(2.13)、(2.14)式成立。用一般的最小二乘混合元方法，可以得到基于此椭圆投影原未知量的最优阶误差估计：(u_* 为近似解)

$$\left\|u^N-u_*^N\right\|^2+\left(\Delta t\varepsilon\right)\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla\left(u^n-u_*^n\right)\right\|^2\le M\left\{h_u^{2(m+1)}+\left(\Delta t\right)^2\right\} \tag{4.1}$$

我们现在来讨论分裂型 Euler 格式 II 的误差估计。

定理 2: 假设 $u\in V,\sigma\in W$ 为问题(2.1)的解，u_h,σ_h 为分裂型 Euler 格式 II 的解，则有下列先验误差估计：

$$\left\|u^N-u_h^N\right\|^2+\left(\Delta t\varepsilon\right)\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla\left(u^n-u_h^n\right)\right\|^2\le M\left\{h_u^{2m}+\left(\Delta t\right)^2\right\} \tag{4.2}$$

证明：由(2.9)可得误差方程：

$$\begin{aligned}&A\left(u^n-u_h^n,\sigma^n-\sigma_h^n;v_h,\tau_h\right)\\&=\left(\left(u^{n-1}-u_h^{n-1}\right),v_h-\Delta ta(t)\tau_h+\Delta t\varepsilon\nabla\tau_h\right)\\&+\left(\Delta tR^n,v_h-\Delta ta(t)\tau_h+\Delta t\varepsilon\nabla\tau_h\right)\end{aligned} \tag{4.3}$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned}&A\left(u^n-u_h^n,\sigma^n-\sigma_h^n;v_h,\tau_h\right)\\&=\left(u^n-u_h^n,v_h\right)+\left(u^n-u_h^n,\Delta ta\left(t\right)\tau_h\right)\\&+\left(m\left(\sigma^n-\sigma_h^n\right),\tau_h\right)-\left(\Delta ta\left(t\right)\left(\sigma^n-\sigma_h^n\right),v_h\right)\\&+\left(\left(\Delta t\varepsilon\right)^2\nabla\left(\sigma^n-\sigma_h^n\right),\nabla\tau_h\right)+\left(\Delta t\varepsilon\nabla\left(u^n-u_h^n\right),\nabla v_h\right)\end{aligned} \tag{4.4}$$

在(4.3)(4.4)中分别取 $\tau_h=0$，并令两式的右端相等，得

$$\begin{aligned}&\left(\left(u^{n-1}-u_h^{n-1}\right),v_h\right)+\left(\Delta tR^n,v_h\right)\\&=\left(u^n-u_h^n,v_h\right)-\left(\Delta ta\left(t\right)\left(\sigma^n-\sigma_h^n\right),v_h\right)\\&+\left(\Delta t\varepsilon\nabla\left(u^n-u_h^n\right),\nabla v_h\right)\end{aligned} \tag{4.5}$$

令 $\bar{u}$ 为 u 的伴随椭圆投影，并假设 $u^n-\overline{u^n}=\rho^n$，$u^n-u_h^n=e^n$，整理(4.5)，考虑到边界条件并利用 Green 公式得：

$$\begin{aligned}&\left(\left(e^n-e^{n-1}\right),v_h\right)+\left(\left(\Delta t\varepsilon\right)\nabla e^n,\nabla v_h\right)+\left(\left(\Delta ta\left(t\right)\right)\nabla e^n,v_h\right)\\&=-\left(\left(\rho^n-\rho^{n-1}\right),v_h\right)-\left(\left(\Delta t\varepsilon\right)\nabla\rho^n,\nabla v_h\right)\\&-\left(\left(\Delta ta\left(t\right)\right)\nabla\rho^n,v_h\right)+\left(\Delta tR^n,v_h\right)\end{aligned} \tag{4.6}$$

记 (4.6) 式左端项分别为 L_1,L_2,L_3，右端记为 R_1,R_2,R_3R_4，取检验函数 $v_h=e_h$，则

$$\begin{aligned}L_1&=\left(\left(e^n-e^{n-1}\right),e^n\right)=\left(\int_\Omega\left|e^n\right|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega e^ne^{n-1}\mathrm{d}x\right)\\&\ge\frac{1}{2}\left(\int_\Omega\left|e^n\right|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega\left|e^{n-1}\right|^2\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{2}\left(\left\|e^n\right\|^2-\left\|e^{n-1}\right\|^2\right)\end{aligned}$$

$$L_2=\left(\left(\Delta t\varepsilon\right)\nabla e^n,\nabla e^n\right)=\Delta t\varepsilon\int_\Omega\left|\nabla e^n\right|^2\mathrm{d}x=\left(\Delta t\varepsilon\right)\left\|\nabla e^n\right\|^2$$

$$\begin{aligned}L_3&=\left(\left(\Delta ta\left(t\right)\right)\nabla e^n,e^n\right)=\Delta ta\left(t\right)\int_\Omega\nabla e^n\cdot e^n\mathrm{d}x\\&\ge-\frac{\Delta ta^*}{2}\left(\left\|\nabla e^n\right\|^2+\left\|e^n\right\|^2\right)\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}L(4.6)\ge&\frac{1}{2}\left(\left\|e^n\right\|^2-\left\|e^{n-1}\right\|^2\right)\\&+\left(\Delta t\varepsilon-\frac{\Delta ta^*}{2}\right)\left\|\nabla e^n\right\|^2-\frac{\Delta ta^*}{2}\left\|e^n\right\|^2\end{aligned} \tag{4.7}$$

右端项：

$$\begin{aligned}\left|R_1\right|&=\left|\left(\rho^n-\rho^{n-1}\right),e_n\right|=\Delta t\left|\left(\frac{\rho^n-\rho^{n-1}}{\Delta t}\right),e_n\right|\\&=\Delta t\int_\Omega\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(t^n\right)e^n\right|\mathrm{d}x\le\frac{\Delta t}{2}\left(\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(t^n\right)\right\|^2+\left\|e^n\right\|^2\right)\end{aligned}$$

$$\left|R_2\right|=\left|\left(\Delta t\varepsilon\nabla\rho^n,\nabla e^n\right)\right|\le\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left(\left\|\nabla\rho^n\right\|^2+\left\|\nabla e^n\right\|^2\right)$$

$$\left|R_3\right|=\left|\left(\Delta ta\left(t\right)\nabla\rho^n,e^n\right)\right|\le\frac{\Delta ta^*}{2}\left(\left\|\nabla\rho^n\right\|^2+\left\|e^n\right\|^2\right)$$

$$\begin{aligned}\left|R_4\right|&=\left|\left(\Delta tR^n,e^n\right)\right|=\left(\Delta t\left(\frac{u^n-u^{n-1}}{\Delta t}-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n\right),e^n\right)\\&\le\Delta t\left(\left\|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\left(t^n\right)\right\|^2\left(\Delta t\right)^2+\left\|e^n\right\|^2\right)\end{aligned}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}R(4.6)\le&\frac{\Delta t}{2}\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(t^n\right)\right\|^2+\left(\frac{3\Delta t}{2}+\frac{\Delta ta^*}{2}\right)\left\|e^n\right\|^2\\&+\left(\frac{\Delta t\varepsilon}{2}+\frac{\Delta ta^*}{2}\right)\left\|\nabla\rho^n\right\|^2+\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\left\|\nabla e^n\right\|^2\\&+\Delta t\left(\left\|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\left(t^n\right)\right\|^2\left(\Delta t\right)^2\right)\end{aligned} \tag{4.8}$$

由(4.6) (4.7) (4.8)可得：

$$\frac{1}{2}\left(\left\|e^n\right\|^2-\left\|e^{n-1}\right\|^2\right)+(\Delta t\varepsilon)\left\|\nabla e^n\right\|^2$$
$$\le\frac{\Delta t}{2}\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(t^n\right)\right\|^2+\left(\frac{3\Delta t}{2}+\Delta ta^*\right)\left\|e^n\right\|^2+\left(\frac{\Delta t\varepsilon}{2}+\frac{\Delta ta^*}{2}\right)\left\|\nabla\rho^n\right\|^2$$
$$+\left(\frac{\Delta t\varepsilon}{2}+\frac{\Delta ta^*}{2}\right)\left\|\nabla e^n\right\|^2+\Delta t\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(t^n\right)\right\|^2\left(\Delta t\right)^2\right) \tag{4.9}$$

将式(4.9)关于 n 从 1 到 N 求和得：

$$\frac{1}{2}\left(\left\|e^N\right\|^2-\left\|e^0\right\|^2\right)+\left(\Delta t\varepsilon\right)\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla e^n\right\|^2$$
$$\le\frac{\Delta t}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(t^n\right)\right\|^2\right)+\left(\frac{3\Delta t}{2}+\Delta ta^*\right)\sum_{n=1}^{N}\left\|e^n\right\|^2$$
$$+\left(\frac{\Delta t\varepsilon}{2}+\frac{\Delta ta^*}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla\rho^n\right\|^2$$
$$+\left(\frac{\Delta t\varepsilon}{2}+\frac{\Delta ta^*}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla e^n\right\|^2+\Delta t\sum_{n=1}^{N}\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(t^n\right)\right\|^2\left(\Delta t\right)^2\right) \tag{4.10}$$

由离散 Gronwall 引理得：

$$\left\|e^N\right\|^2+\left(\Delta t\varepsilon\right)\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla e^n\right\|^2$$
$$\le M\left(\left\|e^0\right\|^2+\Delta t\sum_{n=1}^{N}\left\|\frac{\partial\rho}{\partial t}\left(t^n\right)\right\|^2+\Delta t\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla\rho^n\right\|^2\right. \tag{4.11}$$
$$\left.+\Delta t\sum_{n=1}^{N}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(t^n\right)\right\|^2\left(\Delta t\right)^2\right)$$

由(2.14)及(4.11)式，我们可以得到如下的估计：

$$\left\|u^N-u_h^N\right\|^2+\left(\Delta t\varepsilon\right)\sum_{n=1}^{N}\left\|\nabla\left(u^n-u_h^n\right)\right\|^2\le M\left\{h_u^{2m}+\left(\Delta t\right)^2\right\} \tag{4.12}$$

这样我们得到了原未知量的最优阶误差估计。通过比较(4.1)和(4.12)，我们可以看到，分裂型 Euler 格式Ⅱ虽然比 Euler 型格式Ⅰ低一阶，但是在求解过程中极大的降低了原问题的求解难度和规模，因此，分裂型 Euler 格式Ⅱ在实际中有更广泛的应用。

参考文献 (References)

[1] J. M. Burgers. A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. New York: Adv in Appl Mech I, Academic Press, 1948: 171-199.

[2] D. J. Evans, M. S. Sahimi. The numerical solution of Burgers equations by the alternation group explicit (AGE) method. Inter J Computer Math, 1989, 29(1): 39-64.

[3] H. M. Gu. Characteristic Finite Element Methods for Nonlinear Sobolev Equations. Applied Mathematics and Computation, 1999, 102(1): 51-62.

[4] H. M. Gu, D. P. Yang, S. L. Sui, et al. Least-squares Mixed Finite Element Method for a Class of Stokes Equation. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(5): 557-566.

[5] H. M. Gu, X. N. Wu. Alternating-direction Iterative Technique for Mixed Finite Element Methods for Stokes Equations. Applied Mathematics and Computation, 2005, 162(3): 1035-1047.

[6] Z. Q. Cai, J. Korsawe, G. Starke. An Adaptive Least Squares Mixed Finite Element Method for the Stress- Displacement Formulation of Linear Elasticity. Numer Methods Partial Differential Eq., 2005, 21(1): 132-148.

[7] 高夫征，芮洪兴. 求解线性 Sobolev 方程的分裂型最小二乘混合元方法[J]. 计算数学, 2008, 30(3): 269-282.

[8] P. G. Ciarlet. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-Holland, 1978: 110-168.