Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 54-59
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12012 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

On the Eigenvalue Problem for *p*-Laplcean Operator with Indefinite Weights

Hui Xiong
Department of Mathematics, University of Technology of Dongguan, Donguan
Email: 375610596@qq.com
Received: May 25th, 2011; revised: Jun. 20th, 2011; accepted: Jun. 25th, 2011.

Abstract: In this paper we study the eigenvalue problem for the *p*-Laplcean operator with indefinite weights. The simplicity, isolation of the first eigenvalue is studied here. Furthermore, the existence of a nontrivial curve is shown in the Fučik spectrum.

Keywords: *p*-Laplacean; Eigenvalue Problem; Fučik Spectrum; Indefinite Weight

含变号权的 *p*-Laplcean 算子的特征值问题

熊　辉
东莞理工学院数学教研室，东莞
Email: 375610596@qq.com
收稿日期：2011 年 5 月 25 日；修回日期：2011 年 6 月 20 日；录用日期：2011 年 6 月 25 日

摘　要：本文研究含不定权的 Hardy-Sobolev 算子的特征值问题(不定权表示权函数 $V(x)\in L^S(\Omega)$ 可以变号，并具有非平凡的正部)，讨论了第一特征值的单一性、非第一特征值的特征函数的变号性和特征值序列的无穷性。并证明了 Fučik 谱中非平凡曲线的存在性。

关键词：*p*-Laplace；特征值问题；Fučik 谱；变号权

1. 引言

本文研究如下 *p*-Laplcean 算子的特征值问题

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)-\mu a(x)|u|^{p-2}u=\lambda V(x)|u|^{p-2}u, & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $1<p\le N,\mu\in\mathbb{R},\Omega$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界域，且包含原点。$a(x)$ 是关于 Hardy-Sobolev 不等式的函数，即

$$a(x)\begin{cases} 1\Big/|x|^p, & 1<p<N, \\ 1\Big/\left(|x|\log\dfrac{R}{|x|}\right)^N, & p=N. \end{cases}$$

权函数 $V(x)$ 是可以变号，但具有非平凡的正部。设 $V\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$，定义 $V^+(x)=\max\{V(x),0\}$，且拆分 $V^+=V_1+V_2\not\equiv 0$，其中 $V_1\in L^{\frac{N}{p}}(\Omega)$，$V_2$ 满足

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to y,\,x\in\Omega}|x-y|^pV_2(x)=0, & \forall y\in\bar{\Omega},\ p<N \\ \lim\limits_{x\to y,\,x\in\Omega}|x-y|^p\left(\ln\dfrac{R}{|x-y|}\right)^pV_2(x)=0, & \forall y\in\bar{\Omega},\ p=N \end{cases} \tag{1.2}$$

定义泛函

$$J_\mu(u):=\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx-\mu\int_\Omega a(x)|u|^{p-2}u\,dx$$

显然，$J_\mu(u)$ 在空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中是属于 C^1 的。本文的目的，就是讨论第一特征值的一些主要性质。

Copyright © 2011 Hanspub

$$\lambda_1 := \inf\left\{J_\mu(u); u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \int_\Omega V|u|^p \,\mathrm{d}x = 1\right\} \quad (1.3)$$

定理 1.1 设 $1 < p < N$，u, v 都是第一特征值 λ_1 的特征函数，则 u, v 线性相关的；若 u 是关于特征值但非第一特征值的特征函数，则 u 是变号的。

定理 1.2 设算子

$$L_\mu(u) = -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) - \mu a(x)^{p-2} u,$$

则存在 $L_\mu(u)$ 的特征值序列 $\{\lambda_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n \to \infty$。

算子 L_μ 的 Fučik 谱被定义为 $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ 中的集合，且使得如下问题

$$\begin{cases} L_\mu(u) = \alpha V\left(u^+\right)^{p-1} + \beta V\left(u^-\right)^{p-1}, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

具有非平凡解 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$。

定理 1.3 算子 $L_\mu(u)$ 的 Fučik 谱 $\sum_{p,\mu}$ 中存在非平凡曲线。

本文主要安排如下：在第二部分，证明算子 L_μ 的第一特征值的单一性和非第一特征值的特征函数的变号性；在第三部分，证明算子 L_μ 的 Fučik 谱中非平凡曲线的存在性。

有关问题(1.1)，在 $\mu = 0$ 的情况下，文献[1]已经得出了以上性质，其中 V 是有界的。在不同的可积条件下，文献[2,3]讨论了不定权问题，但没有完全得出以上性质。在[4]中，Cuesta 假定了一个很强的条件 $V \in L^s(\Omega)$，其中 $s > \dfrac{N}{p}$。文[5,6]中假定 $\mu = 0, V = 1$，也得到以上性质。

2. 特征值问题

本节讨论特征值的单一性、特征值序列的无穷性和特征函数的变号性。这先需要以下几个引理。

引理 2.1 ([7]) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界域，$\{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ 弱收敛于 u，且在 $D'(\Omega)$ 中满足

$$L\mu(u_n) = f_n + g_n$$

其中，在 $W^{-1,p'}$ 中 $f_n \to f$，g_n 是一个 Ladon 测度有界数列，即

$$\langle g_n, \phi\rangle \le C_K\|\phi\|_\infty, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

则存在一个子列，仍记之为 $\{\mu_n\}$，使得 $\nabla u_n(x) \to \nabla u_n(x)$ 在 Ω 内几乎处处成立。

引理 2.2[8] 假定 $f_n \to f$ 几乎处处成立，且对任意 n 和 $0 < p < \infty$ 满足 $\|f_n\|_p \le C < \infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\|f_n\|_p^p - \|f_n - f\|_p^p\right\} = \|f\|_p^p$$

引理 2.3 映射 $u \to \int_\Omega V^+|u|^p \mathrm{d}x$ 是弱连续的。

证明 文献[3]中给出了 $1 < p < N$ 的证明，在此只证明 $p = N$ 的情况。不难看出，$u \to \int_\Omega V_1|u|^p \mathrm{d}x$ 是弱连续的。由于 $\overline{\Omega}$ 是紧的，则对于 $1 \le i \le k$ 存在有限个闭球 $B(x_i, r_i)$ 可以覆盖 $\overline{\Omega}$，$|x - x_i| \le r_i$ 时，有

$$|x - x_i|^N\left(\ln\frac{R}{|x - x_i|}\right)^N V_2(x) \le \varepsilon \quad (2.1)$$

和

$$|x - x_j|^N\left(\ln\frac{R}{|x - x_i|}\right)^N V_2(x) \le \frac{\varepsilon}{k}, r > 0.$$

定义 $A := \bigcup_{j=1}^k B(x_j, r)$，则根据文献[9]中的不等式

$$\int_\Omega |\nabla u|^N \,\mathrm{d}x \ge \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_\Omega \frac{|u|^N}{|x|^N\left(\log\dfrac{R}{|x|}\right)^N}\mathrm{d}x, \quad \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega) \quad (2.2)$$

有

$$\int_A V_2|u_n|^N \,\mathrm{d}x \le \varepsilon c^N, \quad \int_A V_2|u|^N \,\mathrm{d}x \le \varepsilon c^N. \quad (2.3)$$

其中 $c = \dfrac{N}{N-1}$。根据(2.1)，$V_2 \in L^1(\Omega\setminus A)$ 满足

$$\int_{\Omega\setminus A} V_2|u_n|^N \,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega\setminus A} V_2|u|^N \,\mathrm{d}x. \quad (2.4)$$

根据(2.3)和(2.4)，映射 $u \to \int_\Omega V^+|u|^p \,\mathrm{d}x$ 是弱连续的。

证明定理 1.1 本证明分为三部分。首先证明(1.3)中的 λ_1 是可达的。定义流形

$$M := \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega); \int_\Omega V|u|^p \,\mathrm{d}x = 1\right\}.$$

令 u_n 是 M 中的一个序列，使得 $J\mu(u_n) \to \lambda_1$。由于 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 是自反的，则 $\{u_n\}$ 存在一个子列，仍记之为 $\{u_n\}$，使得

$$u_n \to u, \text{in } W_0^{1,p}(\Omega); \quad u_n \to u, \text{a.e. in } \Omega.$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，选择 u_n 使得

$$J_\mu(u_n) \le \inf_M\left\{J_\mu\left(u_n + \frac{1}{n^2}\right)\right\},$$

则根据 Ekeland 变分原理，存在子列 $\{u_n\}$，使得

$$J_\mu(v_n)\le J_\mu(u_n),\|u_n-v_n\|\le\frac{1}{n},\ J_\mu(v_n)\le J_\mu(u)+\frac{1}{n}\|v_n-u\|,\quad \forall u\in M.$$

参照[10]，由以上三式直接计算可得

$$\left|J'_\mu(v_n)w-J_\mu(v_n)\int_\Omega V|v_n|^{p-2}v_n w\mathrm{d}x\right|\le C\frac{1}{n}\|w\|.\quad(2.5)$$

根据引理 2.1，$\{v_n\}$ 存在一个子列，仍记之为 $\{v_n\}$，使得

$$v_n\to v,\quad \text{in } W_0^{1,p}(\Omega);\quad \nabla v_n\to\nabla v,\ \text{a.e. in }\Omega.$$

由于 $|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n$ 在 $\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$ 中有界，其中 $1/p+1/p'=1$，则

$$|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\to|\nabla v|^{p-2}\nabla v\quad \text{a.e. in }\ \Omega$$

$$|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\to|\nabla v|^{p-2}\nabla v\quad \text{in }\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$$

在(2.5)中令 $n\to\infty$，则根据极限可得

$$-\Delta_p v-a(x)|v|^{p-2}v-\lambda_1|v|^{p-2}v=0,\quad v\in D'(\Omega)$$

观察到 $n\to\infty$ 时有

$$\int_\Omega V^-|v_n|^p\,\mathrm{d}x=\int_\Omega V^+|v_n|^p\,\mathrm{d}x-1\to\int_\Omega V^+|v|^p\,\mathrm{d}x-1.$$

利用 Fatau 引理，可知 $v\not\equiv 0$，即 λ_1 是可达的。

其次，证明 λ_1 是单一的。设 ϕ,υ 为 λ_1 所对应的两个特征函数，令函数列 $\{\psi_n\}\subset C_C^\infty(\Omega),\psi\ge 0$，在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中 $\psi_n\to\phi$，且 $\nabla\psi_n\to\nabla\phi$ 在 Ω 中几乎处处成立，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left(|\nabla\psi_n|^p-\left(\mu a(x)+V\lambda_1\right)\psi_n^p\right)\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(|\nabla\phi|^p-\left(\mu a(x)+\lambda_1 V\right)\phi^p\right)\mathrm{d}x=0\qquad(2.6)$$

考虑函数 $w_1:=\psi_n^p\Big/\left(v+\frac{1}{n}\right)^{p-1}$，

显然 $\omega_1\in W_0^{1,p}(\Omega)$。代入(2.6)式可得

$$\int_\Omega\left(\lambda_1 V+\mu a(x)\right)\psi_n^p\left(\frac{v}{v+\frac{1}{n}}\right)^{p-1}\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla v|^{p-2}\nabla v.\nabla\left(\frac{\psi_n^p}{\left(v+\frac{1}{n}\right)^{p-1}}\right)\mathrm{d}x\ 。\qquad(2.7)$$

根据(2.6)和(2.7)，可得

$$0=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left(|\nabla\psi_n|^p-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla\left(\frac{\psi_n^p}{\left(v+\frac{1}{n}\right)^{p-1}}\right)\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega L(\psi_n,v)\mathrm{d}x\ge\int_\Omega L(\phi_n,v)\mathrm{d}x\ge 0\ 。$$

其中

$$L(u,v):=|\nabla u|^p-(p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p-p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v$$

由 Fatau 引理，存在 $r>\frac{N}{p}$ 和 $\mathbb{R}^N$ 中的一个零测度闭子集 S，使得 $\Omega\setminus S$ 是连通的，且 $V\in L_{\text{loc}}^r(\Omega\setminus S)$。因此 $\phi,\upsilon\in C^1(\Omega\setminus S\cup\{0\})$，即 ϕ,υ 线性相关或成比例。这也就说明了 λ_1 是单一的。

最后，证明特征值但非第一特征值所对应的特征函数的变号性。设 ϕ_1,u 分别是 λ_1 和 λ 所对应的特征函数，则在 $D'(\Omega)$ 中 ϕ_1,u 分别满足

$$-\nabla_p\phi_1-\mu a(x)\phi_1^{p-1}=\lambda_1 V(x)\phi_1^{p-1},\qquad(2.8)$$

$$-\nabla_p u-\mu a(x)|u|^{p-2}u=\lambda V(x)|u|^{p-2}u\ 。\qquad(2.9)$$

利用反证法，假设 u 不变号且 $u\ge 0$（$u\le 0$ 同理可证)。设序列 $\{\psi_n\}\subset C_c^\infty$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\psi_n\to\phi_1$。考虑试验函数 $w_1=\phi_1$，$w_2=\dfrac{\psi_n^p}{\left(u+\frac{1}{n}\right)^{p-1}}$，不难验证，$w_1,w_2\in W_0^{1,p}(\Omega)$。

将 w_1 代入(2.8)，w_2 代入(2.9)，则

$$\int_\Omega|\nabla\phi_1|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(\lambda_1 V(x)+\mu a(x)\right)\phi_1^p\mathrm{d}x=0,\qquad(2.10)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\left(\frac{\psi_n^p}{\left(u+\frac{1}{n}\right)^{p-1}}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(\lambda V(x)+\mu a(x)\right)\psi_n^p\left(\frac{u}{u+\frac{1}{n}}\right)^{p-1}\mathrm{d}x=0 \text{。}$$

定义算子

$$R(u,v):=|\nabla u|^p-|\nabla v|^{p-2}\nabla v.\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)\text{。}$$

由文献[2]的 Theorem 1.1，对于所有的 $u,v\in C^1(\Omega\setminus\{0\})\cap W^{1,p}(\Omega)$，若 $u\ge 0, v>0$，则 $R(u,v)=L(u,v)\ge 0$；当且仅当 u,v 成比例，等号才成立。由于 $R(u,v)\ge 0$，则

$$\int_\Omega |\nabla\psi_n|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega(\lambda V(x)+\mu a(x)\psi_n^p\left(\frac{u}{u+\frac{1}{n}}\right)^{p-1}\mathrm{d}x\ge 0\text{。}\tag{2.11}$$

用(2.11)减去(2.10)，再关于 $n\to\infty$ 取极限可得

$$(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega V(x)\phi_1^p\mathrm{d}x\le 0$$

但这与 $\lambda>\lambda_1$ 矛盾。因此，非第一特征值对应的特征函数是变号的。

证明定理 1.2 令 $\tilde{J}_\mu$ 是 J_μ 关于流形 M 的限制，定义

$$\lambda_k=\inf_{\gamma(A)\ge n}\sup_{u\in A}J_\mu(u),$$

其中 A 是 M 的闭子集，且满足 $A=-A$；$\gamma(A)$ 是 A 的 Krasnosel'skiǐ亏格。先证明 $\tilde{J}_\mu$ 在水平 λ_k 上满足(PS)条件。设 $\{u_n\}\subset M$，满足 $J_\mu(u_n)\to\lambda_k$，且

$$\left\langle J_\mu(u_n),\phi\right\rangle-J_\mu(u_n)\int_\Omega|u_n|^{p-2}u_n\phi V\mathrm{d}x=o(1)\text{。}\tag{2.12}$$

由于 u_n 有界，则 u_n 存在一个子列，仍记之为 u_n，使得在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 内 $u_n\to u$。鉴于 $\lambda_k>0$，可以假定 $J_\mu(u_n)\ge 0$。利用引理 2.3 和(2.12)，可得

$$\left\langle J_\mu(u_n)-J_\mu(u),u_n-u\right\rangle+J_\mu(u_n)\int_\Omega\left(|u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u\right)(u_n-u)V^-\mathrm{d}x=o(1)$$

但由于

$$\int_\Omega\left(|u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u\right)[u_n-u]V^-\mathrm{d}x\ge 0,$$

根据引理 2.1 和引理 2.2，则有

$$\|u_n-u\|_{1,p}=\|u_n\|_{1,p}-\|u\|_{1,p}+o(1),\quad \left\|\frac{u_n-u}{|x|}\right\|_{0,p}=\left\|\frac{u_n}{|x|}\right\|_{0,p}-\left\|\frac{u}{|x|}\right\|_{0,p}+o(1)$$

因此，有

$$\begin{aligned}o(1)&=\left\langle J_\mu(u_n)-J_\mu(u),(u_n-u)\right\rangle+J_\mu(u_n)\int_\Omega\left[|u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u\right](u_n-u)V^-\mathrm{d}x\\&\ge\int_\Omega|\nabla u_n-\nabla u|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega\mu a(x)|u_n-u|^p\mathrm{d}x+o(1)\ge C\|u_n-u\|_{1,p}+o(1)\end{aligned}$$

根据 C^1 流形上经典的临界点理论[11]可知，λ_k 是 J_μ 在 M 上的临界点。由于 $\lambda_k\ge c\lambda_k^0$ (λ_k 是算子 $L_0(u)$ 的特征值)，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n\to\infty$。

3. Fučik 谱

本节采用文[6,12]的方法，证明算子 L_μ 的 Fučik 谱 $\sum_{p,\mu}$ 中非平凡曲线的存在性。考虑泛函

$$J_s(u)=\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x-\int_\Omega\mu a(x)|u|^p\mathrm{d}x-s\int_\Omega V_u{}^{+p}\,\mathrm{d}x,$$

不难看出，$J_s\in C^1(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$。设 J_s 关于流形 M 的限制为 $\tilde{J}_s$，研究其临界点。根据 Lagrange 乘子法，当且仅当存在 $t\in\mathbb{R}$，对任意 $v\in W_0^{1,P}$，都有

$$\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\mathrm{d}x-\int_\Omega\mu a(x)|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x-s\int_\Omega V_u{}^{+p-1}v\mathrm{d}x=t\int_\Omega V|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x\tag{3.1}$$

成立，则 $v\in M$ 是 $\tilde{J}_s$ 的临界点。这意味着

$$\begin{cases}-\Delta_p u-\mu a(x)|u|^{p-2}u=(s+t)V(x)(u^+)^{p-1}-tV(x)(u^-)^{p-1} & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

弱成立，即 $(s+t,t)\in\sum_{p,\mu}$。在(3.1)中取 $v=u$，可知 t 是 $\tilde J_s$ 的一个临界值。因此，在 $\sum_{p,\mu}$ 中，穿过 $(s,0)$ 的对角线的平行线上的点，正好满足形式 $\left(s+\tilde J_s(u),\tilde J_s(u)\right)$，且 u 是 $\tilde J_s$ 的临界点。

第一个临界点可通过全局最小得到，实际上，由于

$$\tilde J_s(u)\ge\lambda_1\int_\Omega|u|^p\,\mathrm dx-s\int_\Omega u+^p\,\mathrm dx\ge\lambda_1-s$$

对任意 $u\in M$ 成立，且 $u=\phi1$ 时，$\tilde J_s(u)=\lambda_1-s$。由此可得引理 3.1。

引理 3.1 函数 $\phi1$ 是 $\tilde J_s$ 的全局极小点，且 $\tilde J_s(\phi1)=\lambda_1-s$；$\sum_{p,\mu}$ 中的相关点为 (λ_1,λ_1-s)，它位于通过 (λ_1,λ_1) 的垂线上。

该引理的证明由以上叙述直接可得。

引理 3.2 令 $0\ne v_n\in W_0^{1,p}$ 满足 $v_n\ge0$ 几乎处处成立，且测度 $|v_n>0|\to0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\Omega\left[|\nabla v_n|^p-\mu a(x)|u_n|^p\right]\mathrm dx}{\int_\Omega V|u_n|^p\,\mathrm dx}=+\infty. \tag{3.2}$$

证明 令 $w_n=v_n/\|v_n\|V,p$，采用反证法，假定 $\int_\Omega|\nabla w_n|^p-\int_\Omega\mu a(x)|w_n|^p$ 具有有界子列。根据不等式(2.2)，w_n 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界。因此，在 $L^p(\Omega,V^+)$ 中强收敛 $w_n\to w$ 成立。有鉴于

$$\begin{aligned}\int_\Omega V^-(x)|w|^p\,\mathrm dx&\le\lim_{n\to\infty}\int_\Omega V^-|w_n|^p\,\mathrm dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega V^+|w_n|^p\,\mathrm dx-1=\int_\Omega V^+|w|^p\,\mathrm dx-1,\end{aligned}$$

则有 $w\ge0,\int_\Omega V^+(X)w^p\mathrm dx\ge1$。因此，对于某些 $\varepsilon>0$，若 $\delta=|w>\varepsilon|>0$，则对于足够大的 n，可推出 $|w_n>\varepsilon/2|>\dfrac{\delta}{2}$。但这和假设 $|v_n>0|\to0$ 相矛盾。因此(3.2)成立。

$\tilde J_s$ 的第二个临界点可由引理 3.3 得出。

引理 3.3 $-\phi_1$ 是 $\tilde J_s$ 的严格局部极小，且满足 $\tilde J_s(-\phi_1)=\lambda_1$；$\sum_{p,\mu}$ 中的相关点为 (λ_1+s,λ_1)。

证明 参照文献[12]的 Prop 2.3，仍旧采用反证法。假定存在一个序列 $u_n\in M$，且在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中满足

$$u_n\ne-\phi_1,\lim_{n\to\infty}u_n=-\phi_1,\tilde J_s(u_n)\le\lambda_1.$$

由于 $u_n\to-\phi_1\le0$，则在某邻域内定有 $u_n\le0$。如果 $u_n\le0$ 在 Ω 内几乎处处成立，则

$$\tilde J_s(u_n)=\int_\Omega|\nabla u_n|^p\,\mathrm dx-\int_\Omega\mu a(x)|u_n|^p\,\mathrm dx>\lambda_1.$$

但由于 $u_n\ne\pm\phi_1\tilde J_s(u_n)\le\lambda_1$ 相矛盾。这就说明了，当 n 足够大时，u_n 会变号。

令

$$r_n=\frac{\int_\Omega\left|\nabla u_n^+\right|^p\mathrm dx-\int_\Omega\mu a(x)\left|u_n^+\right|^p\mathrm dx}{\int_\Omega Vu_n^{+p}\mathrm dx},$$

则有

$$\begin{aligned}\tilde J_s(u_n)&=\int_\Omega\left|\nabla u_n^+\right|^p\mathrm dx+\int_\Omega\left|\nabla u_n^-\right|^p\mathrm dx-\int_\Omega\mu a(x)\left|u_n^+\right|^p\mathrm dx-\int_\Omega\mu a(x)\left|u_n^-\right|^p\mathrm dx-s\int_\Omega V\left|u_n^+\right|^p\mathrm dx\\&\ge(r_n-s)\int_\Omega Vu_n^{+p}\mathrm dx+\lambda_1\int_\Omega Vu_n^{-p}\mathrm dx.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\tilde J_s(u_n)\le\lambda_1\int_\Omega Vu_n^{+p}\mathrm dx+\int_\Omega Vu_n^{-p}\mathrm dx$$

结合上述两个不等式，可得 $r_n\le\lambda_1+s$。又由于在 $L^p(\Omega)$ 中有 $u_n\to-\phi_1$，因此测度 $|u_n>0|\to0$。根据引理 3.2，$r_n\to+\infty$，这和 $r_n\le\lambda_1+s$ 相矛盾。

证明定理 1.3 类似于定理 1.2 的证明，可知 $\tilde J_s(u)$ 满足(PS)条件。根据 Ekeland 变分原理，不难验证 $\tilde J_s(u)$ 满足山路几何。详细的论证是个标准过程，恕不赘述，感兴趣的读者可参阅文献[12]。令 $\varepsilon_n>0$，且对于 $u\ne-\phi_1,B\subset W_0^{1,p}$，有

$$\tilde J_s(u)>\tilde J_s(-\phi_1),\quad\forall u\in B(-\phi_1,\varepsilon_0)\cap M \tag{3.3}$$

则对任意 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$，有

$$\inf\left\{\tilde J_s(u);u\in M\quad\|u-(-\phi_1)\|_{1,p}=\varepsilon\right\}>\tilde J_s(-\phi_1) \tag{3.4}$$

令

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left(\left[-1,1\right]; M\right) \gamma\left(-1\right) = -\phi_1, \gamma\left(1\right) = \phi_1\right\} \neq \phi$$

由于满足山路几何，因此存在 $u \in W_0^{1,p}$，使得

$$\tilde{J}'_S\left(u\right) = 0, \quad J_s\left(u\right) = c,$$

其中 c 满足

$$c\left(s\right) = \inf_{\Gamma} \sup_{\gamma} J_s\left(u\right) \tag{3.5}$$

如此，对每个 $s \geq 0$，可得到 $\sum_{p,\mu}$ 中一条非平凡曲线 $C : s \in \mathbb{R}^+ \to \left(s + c\left(s\right), c\left(s\right)\right) \in \mathbb{R}^2$。

参考文献 (References)

[1] A. Anane. Etude des valeurs propres et de la resonnance pour l'operateur p-laplacian. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1987, 305(6): 725-728.

[2] W. Allegretto, Y. X. Hang. A picone identity for the p-Laplacian and applications. Nonlinear Analysis TMA, 1998, 32(7): 819-830.

[3] A. Szulkin, M. Wilem. Eigenvalue problems with indefinite weights. Studia Mathematica, 1999, 135(2): 199-201.

[4] M. Cuesta. Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights. Electronic Journal of Differential Equations, 2001, 2001(33): 1-9.

[5] K. Sandeep. On the first Eigenfunction of a perturbed Hardy-Sobolev Operator. Nonlinear Differential Equations and Applications, 2003, 10(2): 223-253.

[6] K. Sreenadh. On the Fučik spectrum of Hardy-Sobolev Operator. Nonlinear Analysis TMA, 2002, 51(7): 1167-1185.

[7] L. Boccardo, F. Murat. Almost convergence of gradients of solutions to elliptic and parabolic equations. Nonlinear Analysis TMA, 1992, 19(6): 581-597.

[8] H. Brezis, E. Lieb. A relation between point convergence of functions and convergence of functionals. Proc. AMS, 1983, 88(3): 486-490.

[9] N. C. Adimurthi, M. Ramaswamy. An improved Hardy-Sobolev inequality and its applications. Proc. AMS, 2001, 130(2): 489-505.

[10] D. DeFigueredo. Lectures on the Ekeland variational principle with applications and Detours. TATA Institute, New York: Springer-Verlog, 1989.

[11] A. Szulkin. Ljusternik-Schnirelmann theory on C^1-manifolds. Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, 1988, 5(2): 119-139.

[12] M. Cuesta, D. Defigueredo, and J. P. Gossez. The beginning of Fučik spectrum for p-Laplacean. Journal of Differential Equations, 2001, 2001(33): 1-9.