

The Improvements of AGE Algorithm for Parallel Solving Parabolic Equations at the Boundary

Dong Wang¹, Peng Yang²

¹Shanxi Normal University, Linfen

²Jilin University, Changchun

Email: ypaps-949@163.com

Received May 8th, 2011; revised May 20th, 2011; accepted May 23th, 2011.

Abstract: AGE method is a parallel algorithm for solving partial differential equations, by re-construct a finite difference scheme, so the required solution of difference equations can be split into several smaller independent parallel solution of equations. However, this algorithm gets higher truncation errors near the boundary. In this paper, I get an improvement AGE method, by improving the format close to the left and right boundaries. The method stays as smaller truncation errors in border, so can improve the calculation accuracy.

Keywords: Parabolic Equation; Difference Scheme; Parallel Algorithm

并行求解抛物型方程的 AGE 算法在边值处的改进

王 栋¹, 杨 鹏²

¹山西师范大学, 临汾

²吉林大学, 长春

Email: ypaps-949@163.com

收稿日期: 2011 年 5 月 8 日; 修回日期: 2011 年 5 月 20 日; 录用日期: 2011 年 5 月 23 日

摘 要: AGE 方法是一种求解偏微分方程的并行算法, 通过重新构造有限差分格式, 把所求解的差分方程组分裂成若干个可以独立并行求解的规模较小的方程组。但此种算法在靠近边值处误差较高, 本文在靠近左右边界处对格式进行改进, 得到一种在边值处改进的 AGE 方法。该方法在边界附近尽可能的保持较小的截断误差, 从而提高了计算精度。

关键词: 抛物型方程; 差分格式; 并行算法

1. 引言

先来研究求解如下一维抛物型初边值问题的并行有限差分法:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = f_1(t), u(1, t) = f_2(t) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

求解(1.1.1)的一类 Saul'yel 非对称格式为:

$$(1+r)u_i^{k+1} - ru_{i+1}^{k+1} = (1-r)u_i^k + ru_{i-1}^k \quad (1.1.2)$$

$$(1+r)u_{i+1}^{k+1} - ru_i^{k+1} = (1-r)u_{i+1}^k + ru_{i+2}^k \quad (1.1.3)$$

其中 $r = \Delta t / \Delta x^2$ 用 Fourier 方法可以证明, 上述两种非对称格式都绝对稳定^[1]。

若第 k 时间层格点的值已求出, 求 $k+1$ 的时间层格点的值, 可单独使用(1.1.2)或(1.1.3), 分别用左边界

条件或右边界条件, 从左到右或从右到左依次递推计算。由泰勒公式可知(1.1.2)和(1.1.3)在 $(i, k+1/2)$ 的截断误差均为 $o(\Delta t \setminus \Delta x + \Delta t + \Delta x^2)$ 。可知单独使用一种 Saul'yel 非对称格式计算, 由于截断误差中包含 $o(\Delta t \setminus \Delta x)$, 当 Δt 和 Δx 同时趋于 0 时, 这个误差项不能保证为无穷小量, 因而计算精度一般较差。一般情况下可在不同时间层交替使用它们, 或在相同时间层分别使用后取算术平均, 来提高计算精度, 这样就可构造许多各种并行差分格式^[2]。

2. 抛物型偏微分方程的分组显式方法

2.1. GEL 算法和 GER 算法

D. J. Evans, A. R. B. Abdullah 利用 Saul'yel 非对称格式(1.1.2)和(1.1.3), 设计了分组显示 GE(Group-Explicit)格式^[3]。如图(1)所示。

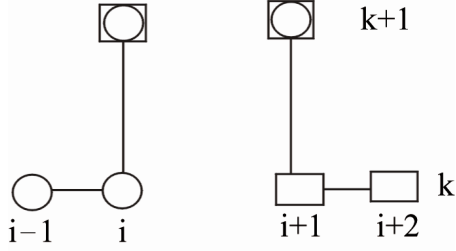


Figure 1. GE Scheme
图 1. GE 格式

在点 $(i, k+1/2)$ 建立格式(1.1.2), 在点 $(i+1, k+1/2)$ 建立格式(1.1.3)。可以看出分组显式格式

$$u_i^{k+1} = \frac{1}{1+2r} \left[r(1+r)u_{i-1}^k + (1-r^2)u_i^k + r(1-r)u_{i+1}^k + r^2u_{i+2}^k \right] \quad (2.1.6)$$

$$u_{i+1}^{k+1} = \frac{1}{1+2r} \left[r(1+r)u_{i+2}^k + (1-r^2)u_{i+1}^k + r(1-r)u_i^k + r^2u_{i-1}^k \right] \quad (2.1.7)$$

分组显式 (2.1.6) 和 (2.1.7) 的截断误差为 $o(\Delta x + \Delta t)$, 消除了 $o(\Delta x/\Delta t)$ 项, 比单独使用非对称格式有了本质的改进。沿 x 增加或减少方向对离散点对 $(i, k+1)$ ($i=1, 2, \dots, m-1$) 连续使用 GE 格式(2.1.4)数值求解问题(1.1.1)的方法就是分组显式方法。 m 的奇偶性, GE 方法有不同的形式, 当 m 为偶数时, 在靠近边界一点上的计算仍单独使用非对称格式, 即:

$$u_{m-1}^{k+1} = \frac{1}{1+r} \left[ru_m^{k+1} + ru_{m-2}^k + (1-r)u_{m-1}^k \right] \quad (2.1.8)$$

$$u_1^{k+1} = \frac{1}{1+r} \left[ru_0^{k+1} + ru_2^k + (1-r)u_1^k \right] \quad (2.1.9)$$

分点数 m 是奇数, 则需要计算的内点数 $m-1$ 是偶数, 可正好分为 $(m-1)/2$ 个 GE 组, 这种情况是容易实现的。分点数 m 是偶数, 则需要计算的内点数 $m-1$ 是奇数, 可有 $(m-2)/2$ GE 组, 还有一个单点需要单独处理。若是左单点, 用格式(2.1.9); 若是右端点, 用格式(2.1.8)。具有左端点和右端点的情形分别称之为 GEL 方法和 GER 方法。下面分别介绍这两种方法, 并给出矩阵形式。

GEL 方法: 单点在左侧, 需要处理左单点和 $(m-2)/2$ 个 GE 组。左单点 $(1, k+1)$ 的函数值由(2.1.9)计算, 从 $(2, k+1)$ 到 $(m-1, k+1)$ 连续 $(m-2)/2$ 次使用 GE 格式(2.1.5), GEL 方法的矩阵表达式如下:

$$(I + rG_2)U^{k+1} = (I - rG_1)U^k + B_1, k = 0, 1, \dots, \quad (2.1.10)$$

$$B_1 = [ru_0^{k+1}, 0, \dots, 0, ru_m^k]^T, \quad U^k = [u_1^k, \dots, u_{m-1}^k]^T$$

是两种非对称格式的巧妙结合。其差分方程为 2×2 联立方程组:

$$\begin{cases} (1+r)u_i^{k+1} - ru_{i+1}^{k+1} = (1-r)u_i^k + ru_{i-1}^k \\ (1+r)u_{i+1}^{k+1} - ru_i^{k+1} = (1-r)u_{i+1}^k + ru_{i+2}^k \end{cases} \quad (2.1.4)$$

写成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} 1+r & -r \\ -r & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{k+1} \\ u_{i+1}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-r & 0 \\ 0 & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^k \\ u_{i+1}^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{i-1}^k \\ u_{i+2}^k \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$

由已知第 k 层上 4 点 $u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k, u_{i+2}^k$ 的函数值, 可得第 $k+1$ 层上的函数值 u_i^{k+1}, u_{i+1}^{k+1} 的显式计算:

$$G_1 = \text{diag} \left(G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(\frac{m-2}{2})}, 1 \right) \quad (2.1.11)$$

$$G_2 = \text{diag} \left(1, G^{(1)}, G^{(2)}, \dots, G^{(\frac{m-2}{2})} \right) \quad (2.1.12)$$

$$G^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{m-2}{2}.$$

下面用矩阵方法来讨论 GEL 方法的稳定性, 假设边界处理是准确的。

由式(2.1.10), 有:

$$U^{k+1} = TU^k + B, \quad (2.1.13)$$

其中 T 为增长矩阵:

$$T = (I + rG_2)^{-1} (I - rG_1),$$

由于 G_2 为非负定矩阵, 由 Kellogg 引理:

$$\|(I + rG_2)^{-1}\|_2 \leq 1.$$

利用范数知识可得: $\|I - rG_1\|_2 \leq \max(|1-r|, |1-2r|, 1)$

所以, 只要 $r \leq 1$, 就有 $\|T\|_2 \leq 1$ 。即 GEL 方法是条件稳定的。因此我们可得:

定理 2.1. 当 $r = \Delta t/\Delta^2 x \leq 1$, 式(2.1.10)所描述的 GEL 方法是稳定的^[4]。

GER 方法: 单点在右侧, 需要处理右单点和 $m-2$ 个 GE 组, 右单点 $(m-1, k-1)$ 的函数值由(2.1.8)计算, 从 $(1, k+1)$ 到 $(m-2, k+1)$ 连续 $(m-2)/2$ 次使用 GE 格式(2.1.5)。

GER 方法的矩阵表达式如下:

$$(I+rG_1)U^{k+1}=(I-rG_2)U^k+B_2, k=0,1,\dots, \quad (2.1.14)$$

其中, $B_2=[ru_0^k, 0, \dots, 0, ru_m^{k+1}]^T$, U^k, G_1, G_2 定义同 GEL 方法。显然同样有:

定理 2.2 当 $r=\Delta t/\Delta^2 x \leq 1$, 式(2.1.14)所描述的 GER 方法是稳定的^[4]。

由数学描述的矩阵形式, 我们看到无论是 GEL 方法还是 GER 方法, 所构造的差分格式都可以将隐式求解(1.1.1)的三对角矩阵算子分裂为一些可以并行求解的相对简单的矩阵算子, 相应也就把三对角方程组分裂成一些简单矩阵算子方程组, 每个简单矩阵算子方程组可以并行独立求解, 从而提高计算速度。

2.2. AGE 方法

通过上面的分析已经看到, 当单独使用 GEL 或 GER 方法时, 二者都是条件稳定的。为了改善稳定性, 可在不同时间层交替使用 GER 和 GEL。这种交替使用 GER 和 GEL 的方法就是交替分组显式方法, 简称 AGE 方法。具体算法为: 在奇数时间层使用 GEL 方法, 在偶数时间层使用 GER 方法。数学描述如下:

$$\begin{cases} (I+rG_2)U^{k+1}=(I-rG_1)U^k+B_1 \\ (I+rG_1)U^{k+2}=(I-rG_2)U^{k+1}+B_2 \end{cases} \quad (2.2.15)$$

其中 G_1, G_2 分别由(2.1.11), (2.1.12)定义。

$$B_1=[ru_0^{k+1}, 0, \dots, 0, ru_m^k]^T, B_2=[ru_0^{k+1}, 0, \dots, 0, ru_m^{k+2}]^T, k=0,2,4,\dots,$$

从(2.2.15)消去 U^{k+1} 可得 AGE 方法求 U^{k+2} 的显形式: $U^{k+2}=TU^k+B, k=0,2,4,\dots, T$ 为增长矩阵 (2.2.16)

$$T=(I+rG_1)^{-1}(I-rG_2)(I+rG_2)^{-1}(I-rG_1) \\ B=(I+rG_1)^{-1}(I-rG_2)(I+rG_2)^{-1}B_1+(I-rG_1)^{-1}B_2$$

定理 2.3 由(2.2.15)所描述的 AGE 方法是绝对稳定的^[4]。

证明: 由于 $G^{(i)}(i=1,2,\dots,(m-2)/2)$ 非负, 故 G_1, G_2 非负。令 $T_1=(I-rG_1)(I+rG_1)^{-1}$,

$T_2=(I-rG_2)(I+rG_2)^{-1}$ 。由 Kellogg 引理, 可得:

$$\|T^n\|_2 \leq \|(I+rG_1)^{-1}\|_2 \|T_2\|_2^n \|T_1\|_2^{n-1} \|(I-rG_1)\|_2, \\ \leq \|(I-rG_1)\|_2 \leq 1+2r$$

即: $\|T^n\|_2 \leq C, C=1+2r$ 。证毕。

同样由数学描述的矩阵形式, 我们看到 AGE 方法依然将求解(1.1.1)的三对角矩阵算子分裂为一些可以并行求解的相对简单的矩阵算子, 相应也把三对角方程组分裂成一些简单矩阵算子方程组。每个简单准三对角矩阵算子可以并行独立求解, 而且增加了一层交替, 在保持并行计算的情况下本质上改进了格式的稳定性。

2.3. AGE 方法在靠近边值处的改进算法

在 AGE 方法中, 在 m 为偶数情况下, 每层都有一个单点需要单独使用一种 Saul'yel 非对称格式计算, 而单独使用一种 Saul'yel 非对称格式截断误差中包含 $o(\Delta x/\Delta t)$ 。当 Δx 和 Δt 同时趋于 0 时, 这个误差项不能保证为无穷小量, 因而截断误差较大。由于古典显格式和古典隐格式的截断误差为 $o(\Delta x + \Delta t^2)$, 在靠近左右边界处使用古典显、隐格式, 可以得到一种在边值处改进的 AGE 方法。该方法在边界附近尽可能的保持较小的截断误差, 从而提高计算精度。

求解 u_i^{k+1} 的古典隐格式为:

$$-ru_{i+1}^{k+1}+(1+2r)u_i^{k+1}-ru_{i-1}^{k+1}=u_i^k \quad (2.3.17)$$

求解 u_i^{k+1} 的古典显格式为:

$$u_i^{k+1}=ru_{i+1}^k+(1-2r)u_i^k-ru_{i-1}^k \quad (2.3.18)$$

与 AGE 方法相比, 在靠近左边值的两个点, 我们用格式:

$$\begin{cases} (1+2r)u_1^{k+1}-u_2^{k+1}=u_1^k+ru_0^{k+1} \\ -ru_1^{k+1}+(1+r)u_2^{k+1}=(1-r)u_2^k+ru_3^k \end{cases} \quad (2.3.19)$$

在靠近右边值的点, 有两种设计方案。若有一个点, 则使用古典显格式或古典隐格式; 若有两个点, 则用格式

$$\begin{cases} (1+r)u_{m-2}^{k+1}-ru_{m-1}^{k+1}=ru_{m-3}^k+(1-r)u_{m-2}^{k+1} \\ -ru_{m-2}^{k+1}+(1+2r)u_{m-1}^{k+1}=u_{m-1}^k+ru_m^{k+1} \end{cases} \quad (2.3.20)$$

交替分组显式方法在靠近边值处的改进的算法为: 在奇数时间层, 在靠近左边值的两个点, 用格式(2.3.19)。右端点附近可能有两种情况, m 为偶数, 则右端靠近右边值有一个端点, 使用古典显格式; 若 m 为奇数, 则在靠近右边值有两个点, 用格式(2.3.20)。其他内点使用分组 GE 格式。在偶数时间层上的点与奇数时间层按显、隐之间交替, 两种非对称格式之间

交替的原则安排计算格式。其矩阵描述为:

$$\begin{cases} (I+rG_1)U^{k+1}=(I-rG_2)U^k+B_1, \\ (I+rG_2)U^{k+2}=(I-rG_1)U^{k+1}+B_2, \end{cases} \quad (2.3.21)$$

其中 B_1, B_2 为与边值条件有关的向量, $k=0, 2, 4, \dots$

$$G_1 = \text{diag}(G_1^{(1)}, G_1^{(2)}, \dots, G_1^{(2)}, G_1^{(3)}) \quad (2.3.22)$$

$$G_2 = \text{diag}(G_2^{(1)}, G_2^{(2)}, \dots, G_2^{(2)}, G_2^{(3)}) \quad (2.3.23)$$

$$G_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad G_1^{(2)} = G_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2^{(1)} = 0$$

$$\text{当 } m-1=2n \text{ 时, } G_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad G_2^{(3)} = 0$$

$$\text{当 } m-1=2n-1 \text{ 时, } G_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad G_1^{(3)} = 0$$

奇数层与偶数层按层合并, 可得转移矩阵为:

$$T = (I+rG_2)^{-1}(I-rG_1)(I+rG_1)^{-1}(I-rG_2)$$

对式(2.3.21), 我们同样有关于其绝对稳定性定理。

定理 2.4 由(2.3.21)描述的对 AGE 方法在靠近边界处改进的算法绝对稳定。

证明: 由于 $G_1^{(i)}, G_2^{(i)}, (i=1, 2, 3)$ 非负, 故 G_1, G_2 非负。令 $T_1 = (I-rG_1)(I+rG_1)^{-1}$, $T_2 = (I-rG_2)(I+rG_2)^{-1}$ 。由 Kellogg 引理, 可得:

$$\begin{aligned} \|T\|_2 &\leq \|(I+rG_2)^{-1}\|_2 \|T_1\|_2^n \|T_2\|_2^{n-1} \|(I-rG_2)\|_2 \\ &\leq \|(I-rG_2)\|_2 \leq 1+3r=C \end{aligned}$$

即: $\|T\|_2 \leq C, C=1+3r$ 。证毕。

由于 Crank-Nicolson 格式的截断误差为 $o(\Delta x^2 + \Delta t^2)$, 如果在靠近左右边界处使用 Crank-Nicolson 格式, 则可以得到另一种改进的 AGE 方法。该方法在靠近边界处也保持较小的截断误差, 从而可以提高计算精度。在 $(i, k+1)$ 处的 Crank-Nicolson 格式为:

$$-\frac{r}{2}u_{i+1}^{k+1} + (1+r)u_i^{k+1} - \frac{r}{2}u_{i-1}^{k+1} = \frac{r}{2}u_{i+1}^k + (1-r)u_i^k + \frac{r}{2}u_{i-1}^k \quad (2.3.24)$$

在靠近左边界处有两点, 使用格式:

$$-\frac{r}{2}u_2^{k+1} + (1+r)u_1^{k+1} = \frac{r}{2}u_2^k + (1-r)u_1^k + \frac{r}{2}u_0^k + \frac{r}{2}u_0^{k+1} \quad (2.3.25)$$

$$-ru_1^{k+1} + (1+r)u_2^{k+1} = (1-r)u_2^k + ru_3^k \quad (2.3.26)$$

在靠近右边界处, 有两种设计方案:

(1): 若靠近右边界处有两点, 使用格式:

$$-ru_{m-1}^{k+1} + (1+r)u_{m-2}^{k+1} = (1-r)u_{m-2}^k + ru_{m-3}^k \quad (2.3.27)$$

$$-\frac{r}{2}u_{m-2}^{k+1} + (1+r)u_{m-1}^{k+1} \quad (2.3.28)$$

$$= \frac{r}{2}u_m^k + (1-r)u_{m-1}^k + \frac{r}{2}u_{m-2}^k + \frac{r}{2}u_m^{k+1}$$

(2): 若靠近右边界处有三个点, 使用格式:

$$-ru_{m-2}^{k+1} + (1+r)u_{m-3}^{k+1} = (1-r)u_{m-3}^k + ru_{m-4}^k \quad (2.3.29)$$

$$-ru_{m-3}^{k+1} + (1+r)u_{m-2}^{k+1} = (1-r)u_{m-2}^k + ru_{m-1}^k \quad (2.3.30)$$

$$-\frac{r}{2}u_{m-2}^{k+1} + (1+r)u_{m-1}^{k+1} \quad (2.3.31)$$

$$= \frac{r}{2}u_m^k + (1-r)u_{m-1}^k + \frac{r}{2}u_{m-2}^k + \frac{r}{2}u_m^{k+1}$$

在靠近边界处用 Crank-Nicolson 格式改进 AGE 方法的算法为: 在奇数时间层, 靠近左边界两个点, 用格式(2.3.25)和格式(2.3.26), 然后连续使用 GE 格式(2.1.4), 当 $m-1=2n-1$ 时, 连续使用 $(m-2)/2$ 个 GE 格式(2.1.4), 右端点靠近右边界处三个点依次使用格式(2.3.29), (2.3.30), (2.3.31), 其中(2.3.25)和(2.3.26), 每个 GE 格式(2.1.4), (2.3.29)和(2.3.30)及(2.3.31)均可并行求解; 当 $m-1=2n$ 时, 连续使用 $(m-2)/2-2$ 个 GE 格式(2.1.4), 右端点靠近右边界处两点依次使用格式(2.3.27)和(2.3.28)。其中(2.3.25)和(2.3.26), 每个 GE 格式(2.1.4), (2.3.27)和(2.3.28)均可并行求解; 在偶数时间层上的点, 按两种非对称格式之间交替, Crank-Nicolson 格式不变的原则安排计算格式。这样偶数时间层同样可实现并行计算, 只是并行计算的分组已经发生改变。其矩阵描述为:

$$(I+rG_1)U^{k+1} = (I-rG_2)U^k + B_1 \quad (2.3.32)$$

$$(I+rG_2)U^{k+2} = (I-rG_1)U^{k+1} + B_2 \quad (2.3.33)$$

其中向量

$$B_1 = \left[\frac{r}{2}(u_0^k + u_0^{k+1}), 0, \dots, 0, \frac{r}{2}(u_m^k + u_m^{k+1}) \right]^T,$$

$$B_2 = \left[\frac{r}{2}(u_0^{k+1} + u_0^{k+2}), 0, \dots, 0, \frac{r}{2}(u_m^{k+1} + u_m^{k+2}) \right]^T,$$

$k=0, 2, 4, \dots$

其中 $G_1 = \text{diag}(G_1^{(1)}, G_1^{(2)}, \dots, G_1^{(2)}, G_1^{(3)})$,

$$G_2 = \text{diag}(G_2^{(1)}, G_2^{(2)}, \dots, G_2^{(2)}, G_2^{(3)})$$

$$G_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_1^{(2)} = G_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

当 $m-1=2n$ 时, $G_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

当 $m-1=2n-1$ 时, $G_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

奇数层与偶数层按层合并, 可得转移矩阵为:

$$T = (I + rG_2)^{-1}(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}(I - rG_2)$$

对式子(2.3.32)和(2.3.33), 同样可得其绝对稳定性定理。

定理 2.5 由式(2.3.32)和(2.3.33)所描述的在靠近边界处用 Crank-Nicolson 格式改进 AGE 方法是绝对稳定的。

证明: 由于 $G_1^{(i)}, G_2^{(i)}, (i=1,2,3)$ 非负, 故 G_1, G_2 非负。令 $T_1 = (I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}$,

$$u_i^{k+2} = \frac{1}{(1+2r)^2} \left\{ 2r^2(1+r)u_{i-2}^k + 2r(1-r^2)u_{i-1}^k + u_i^k + 2ru_{i+1}^k + 2r^2(1-r)u_{i+2}^k + 2r^3u_{i+3}^k \right\}$$

$$u_{i+1}^{k+2} = \frac{1}{(1+2r)^2} \left\{ 2r^2(1+r)u_{i+3}^k + 2r(1-r^2)u_{i+2}^k + u_{i+1}^k + 2ru_i^k + 2r^2(1-r)u_{i-1}^k + 2r^3u_{i-2}^k \right\}$$

上述两式在 (i, k) 处的截断误差为 E_1, E_2 :

$$E_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_i^k \Delta t + \frac{2r^2}{(1+2r)^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_i^k \Delta x + \frac{1+16r+40r^2}{12(1+2r)^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_i^k \Delta x^2 + o(\Delta t^2 + \Delta x^3)$$

$$E_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{i+1}^k \Delta t - \frac{2r^2}{(1+2r)^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i+1}^k \Delta x + \frac{1+16r+40r^2}{12(1+2r)^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{i+1}^k \Delta x^2 + o(\Delta t^2 + \Delta x^3)$$

由上式可见, AGE 格式的阶误差为 $o(\Delta x + \Delta t)$; 边界处用古典显、隐格式改进的 AGE 算法, 在边界处的截断误差为 $o(\Delta t + \Delta x^2)^{[2]}$; 边界处用 C-N 格式改进的 AGE 算法, 在边界处的截断误差为 $o(\Delta x^2 + \Delta t^2)^{[2]}$; 与 AGE 算法相比, 在边界处, 与单独使用一种 Saul'yel 非对称格式, 消除了截断误差中

$T_2 = (I - rG_2)(I + rG_2)^{-1}$. 由 Kellogg 引理, 可得:

$$\|T\|_2 \leq \left\| (I + rG_2)^{-1} \right\|_2 \|T_1\|_2^n \|T_2\|_2^{n-1} \left\| (I - rG_2) \right\|_2, \\ \leq \left\| (I - rG_2) \right\|_2 \leq 1 + 3r = C$$

即: $\|T\|_2 \leq C, C = 1 + 3r$. 证毕。

下面分析截断误差。在改进的 AGE 算法中, 使用 AGE 格式的计算结点, 由(2.2.25)知, 求解第 $k+2$ 时间层上的 AGE 方法的两点组三层格式为:

的 $o(\Delta t \setminus \Delta x)$, 提高了计算精度。

同样由矩阵形式, 我们看到两种对 AGE 方法在靠近边界处改进方法, 依然是将求解(1.1.1)的三对角矩阵算子分裂为一些可以并行求解的相对简单的矩阵算子。在保持并行性和绝对稳定性基础上, 进一步改进了截断误差, 从而进一步提高计算精度, 下面通过

数值算例对其进行验证。

3. 数值算例

考虑一维抛物型初边值问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 \leq x \leq 1, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (3.1.34)$$

的并行有限差分法。它可视为初边值问题(1.1.1)的模型。其精确解为

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x \quad (3.1.35)$$

下面通过本文介绍的 AGE 算法以及在靠近边值处改进的 AGE 算法求解这一问题, 并与精确解作比较。

(1)使用 AGE 方法(2.1.15)计算: 首先对求解区间 $0 \leq x \leq 1$ 进行剖分, 取 $\Delta x = 0.01$, 则相应的分点数为 $m = 100$, 需要计算的内点数 $m - 1 = 99$, 需要处理单点。网比取 $r = 0.5$, 则由 Matlab 程序分别计算出各内点在 $t = 0.1, t = 0.5$ 的值及与精确解的绝对误差。将部分计算结果分别列于表(1)和表(2); 再取网比 $r = 1.0$, 则由 Matlab 程序计算出各内点在 $t = 0.5$ 处的值及与精确解的绝对误差, 将部分计算结果列于表(3)。

(2)分别使用改进的 AGE 方法(2.3.21), (2.3.32)和(2.3.33)计算: 由于在靠近边界处单独使用非对称格式可能会导致较高的截断误差, 故可使用在靠近边界处改进的 AGE 方法(2.3.21), (2.3.32)和(2.3.33), 以减小截断误差, 提高计算精度。为便于对比数值求解的精确性, 用在靠近边界处改进的 AGE 算法数值计算时, 取与使用 AGE 方法计算时相同的网格剖分。由 Matlab 程序分别计算出各内点在 $t = 0.1, t = 0.5$ 处的值及与精确解的绝对误差, 将部分计算结果分别列于表(1)和表(2); 再取网比 $r = 1.0$, 则由 Matlab 程序计算出各内点在 $t = 0.5$ 处的值及与精确解的绝对误差, 将部分计算结果列于表(3)。方便起见, 分别记在靠近边界处使用古典显隐格式改进的 AGE 方法(2.3.21)和 Cranh-Nicolson 格式改进的 AGE 方法(2.3.32)和(2.3.33)记为 CAGE 和 CNAGE^[5-10]。

4. 结论

从表(1)、(2)、(3)可以看出, 使用三种 AGE 方法都可以计算出相当精确的结果, 在取四位有效数值时,

Table 1. Truncation error

表 1. AGE, $t = 0.1, \Delta x = 0.01, r = 0.5$

x	精确解	AGE	$ e (10^{-4})$	CAGE	$ e (10^{-4})$	CNAGE	$ e (10^{-4})$
0.10	0.1150	0.1150	0.1322	0.1150	0.1306	0.1150	0.1291
0.20	0.2188	0.2188	0.2513	0.2188	0.2498	0.2188	0.2483
0.30	0.3012	0.3012	0.3458	0.3012	0.3444	0.3012	0.3429
0.40	0.3541	0.3541	0.4063	0.3541	0.4049	0.3541	0.4035
0.50	0.3723	0.3723	0.4268	0.3723	0.4254	0.3723	0.4241
0.60	0.3541	0.3541	0.4054	0.3541	0.4040	0.3541	0.4026
0.70	0.3012	0.3012	0.3441	0.3012	0.3427	0.3012	0.3412
0.80	0.2188	0.2188	0.2490	0.2188	0.2475	0.2188	0.2460
0.90	0.1150	0.1150	0.1294	0.1150	0.1279	0.1150	0.1264

Table 2. Truncation error

表 2. AGE, $t = 0.5, \Delta x = 0.01, r = 0.5$

x	精确解	AGE	$ e (10^{-4})$	CAGE	$ e (10^{-4})$	CNAGE	$ e (10^{-4})$
0.10	0.0022	0.0022	0.0395	0.0022	0.0380	0.0022	0.0388
0.20	0.0042	0.0042	0.0751	0.0042	0.0729	0.0042	0.0740
0.30	0.0058	0.0058	0.1033	0.0058	0.1005	0.0058	0.1019
0.40	0.0068	0.0068	0.1214	0.0068	0.1182	0.0068	0.1198
0.50	0.0072	0.0072	0.1276	0.0072	0.1243	0.0072	0.1259
0.60	0.0068	0.0068	0.1213	0.0068	0.1181	0.0068	0.1197
0.70	0.0058	0.0058	0.1030	0.0058	0.1002	0.0058	0.1016
0.80	0.0042	0.0042	0.0746	0.0042	0.0724	0.0042	0.0735
0.90	0.0022	0.0022	0.0390	0.0022	0.0375	0.0022	0.0382

Table 3. Truncation error

表 3. AGE, $t = 0.5, \Delta x = 0.01, r = 1.0$

x	精确解	AGE	$ e (10^{-4})$	CAGE	$ e (10^{-4})$	CNAGE	$ e (10^{-4})$
0.10	0.0022	0.0022	0.1410	0.0022	0.1352	0.0022	0.1381
0.20	0.0042	0.0042	0.2681	0.0042	0.2593	0.0042	0.2637
0.30	0.0058	0.0058	0.3689	0.0058	0.3577	0.0058	0.3633
0.40	0.0068	0.0068	0.4335	0.0068	0.4208	0.0068	0.4272
0.50	0.0072	0.0072	0.4556	0.0072	0.4423	0.0072	0.4489
0.60	0.0022	0.0068	0.4329	0.0068	0.4201	0.0068	0.4265
0.70	0.0022	0.0058	0.3676	0.0058	0.3564	0.0058	0.3620
0.80	0.0042	0.0042	0.2663	0.0042	0.2575	0.0042	0.2619
0.90	0.0022	0.0022	0.1389	0.0022	0.1331	0.0022	0.1360

数值解与精确解可达同样精度。就截断误差来看, 三个算法都有比较理想的截断误差。从表(1)和(2)可以看出, 取相同的网比, 在不同的时间层, 在靠近边界处改进的 AGE 算法均有更小的截断误差, 且截断误差为 $o(10^{-5})$, 是 $o(\Delta t + \Delta x)$, 但数值明显减小, 误差进一步减小。从表(2)和(3)可以看出, 取不同的网比, 在相同的时间层, 在靠近边界处改进的 AGE 算法均有更小的截断误差, 且截断误差同样为 $o(10^{-5})$, 是 $o(\Delta t + \Delta x)$, 数值明显减小, 误差进一步减小。因此使用两种在靠近边界处对 AGE 改进的算法, 计算精度有明显改进, 实验数据与理论分析相符合。

参考文献 (References)

- [1] 康立山, 全惠云. 数值解高维偏微分方程的分裂法[M]. 第一版. 上海: 上海科学技术出版社, 1990: 1-127.

- [2] 李荣华, 刘播. 偏微分方程数值解法[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2009: 107-149.
- [3] D. J. Evans, A. R. B. Aboullah. Group explicit methods for parabolic equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 1983, 14(1): 73-105.
- [4] D. J. Evans, A. R. B. Abdullah. A new method for the solution of $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. *International Journal of Computer Mathematics*, 1991(38): 241-255.
- [5] 李德元. 关于解一维抛物型方程组的差分格式[J]. *计算数学*, 1982, 4(1): 80-92.
- [6] 陈光男. 解一维抛物型方程组的交替计算格式[J]. *计算数学*, 1985, 7(2): 164-174.
- [7] J. Dauglas Jr. A survey of numerical methods for parabolic differential equation. *Advances in Computer*, Academic Press, 1961, 2: 1-52.
- [8] 侯淑轩. 抛物型方程的一类交替分组迭代法[D]. 山东大学: 山东大学数学学院, 2005.
- [9] 张宝琳, 谷同祥, 莫则尧. 数值并行计算原理与方法[M]. 第一版. 国防工业出版社, 1999: 183-275.
- [10] 张宝琳, 苏秀敏. 求解隐式差分方程的并行算法[J]. *计算物理*, 1992, 9(2): 250-256.