Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 92-96
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12019 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Maps on Circles with $|\deg| \geq 2$ and Their Liftings*

Risong Li, Zengxiong Cheng
School of Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang
Email: gdoulrs@163.com
Received: Jun. 18th, 2011; revised: Jul. 5th, 2011; accepted: Jul. 8th, 2011.

Abstract: Let $C^0(X)$ denote the set of all continuous selfmaps of a topological space. Let $f \in C^0(S^1)$ and $\pi: \tilde{X} \to S^1$ be a finite-to-one covering projection. Let $\tilde{f} \in C^0(\tilde{X})$ and $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$. The following statements were proved: 1) If $\overline{P(\tilde{f})} = P(\tilde{f})$, then $|\deg(f)| \leq 1$. 2) If $|\deg(f)| \geq 2$, then the following four statements hold: ① $\overline{P(\tilde{f})} \not\subset \{2^n : n \geq 0\}$; ② $\overline{P(\tilde{f})} \neq P(\tilde{f})$; ③ $\Omega(\tilde{f}) \neq P(\tilde{f})$; ④ $ent(\tilde{f}) > 0$. Let $f: S^1 \to S^1$ be a continuous surjection and σ_f be the shift map determined by *f*. Then 47 equivalent conditions for the map σ_f to be expansive were obtained. Some results in the literatures were extended.

Keywords: Inverse Limit; Monotone Mapping; Degree of Mapping; Topologically Tansitive; Positively Expansive Map; Expanding Map

$|\deg| \geq 2$ 的圆周自映射及其提升*

黎日松，陈增雄
广东海洋大学理学院，湛江
Email: gdoulrs@163.com
收稿日期：2011 年 6 月 18 日；修回日期：2011 年 7 月 5 日；录用日期：2011 年 7 月 8 日

摘　要： 用 $C^0(X)$ 表示拓扑空间 X 上的所有连续自映射所组成的集。设 $f \in C^0(S^1)$，$\pi: \tilde{X} \to S^1$ 是个有限对一的覆叠投射，满射 $\tilde{f} \in C^0(\tilde{X})$，且 $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$。本文证明了：1)如果 $\overline{P(\tilde{f})} = P(\tilde{f})$，则 $|\deg(f)| \leq 1$。2)如果 $|\deg(f)| \geq 2$，则下面四条成立：① $\overline{P(\tilde{f})} \not\subset \{2^n : n \geq 0\}$；② $\overline{P(\tilde{f})} \neq P(\tilde{f})$；③ $\Omega(\tilde{f}) \neq P(\tilde{f})$；④ $ent(\tilde{f}) > 0$。设 $f: S^1 \to S^1$ 是连续满射，σ_f 是由 f 所确定的转移映射，得到了 σ_f 是可扩的 47 个等价条件，推广了已有结果。

关键词： 逆极限；单调映射；映射度；拓扑传递；正向可扩映射；扩张映射

1. 引言

关于圆周自映射所产生的动力系统性质已有很多人进行了研究，并取得了丰硕成果。例如：文献[1]研究了圆周上单调自映射 f 的拓扑熵，得到了圆周上连续单调自映射的拓扑熵 $ent(f) = \log|\deg(f)|$。文献[2]研究了圆周上一类自映射 f 的正向可扩性与其逆极限的可扩性间的关系，得到了圆周上连续满射 f 的逆极限可扩等价于 f 拓扑共轭于圆周上的某个扩张映射。文献[3]介绍了圆周连续自映射的动力系统性质的一些研究工作和已经取得的结果，并补充了一些新结果，从链回归点的角度对圆周连续自映射作了新探讨。文献[4]研究了 $|\deg| \geq 2$ 的圆周自映射，证明了以下结果：

定理 A 设 $f \in C^0(S^1)$，若 $\overline{P(f)} = P(f)$，则 $|\deg(f)| \leq 1$。

*基金项目：广东自然科学基金博士启动项目(10452408801004217)，湛江市科技攻关项目(2010C3112005)。

定理 B 设 $f\in C^0\left(S^1\right)$，若 $|\deg|\ge 2$，则下面四条成立：①$P(f)\not\subset\left\{2^n\,|\,n\ge 0\right\}$；②$\overline{P(f)}\ne P(f)$；③$\Omega(f)\ne P(f)$；④$ent(f)>0$。

由于任一映射 $f:X\to X$ 及其逆极限空间上的转移自映射 σ_f 都是映射 f 本身的提升，故映射 f 的提升所具有的动力系统性质实际上就是 f 本身的所具有的动力系统性质的推广。众所周知，单调性、可扩性和拓扑传递属性都是圆周自映射的动力系统中的重要性质。

本文在文献[1-4]的基础上，利用映射的单调性、可扩性和拓扑传递属性来进一步研究 $|\deg|\ge 2$ 的圆周自映射及其提升的动力学性质。因此研究圆周连续自映射 f 的提升所具有的性质是一件有意义的工作。

2. 预备知识

本文中 R,Z 分别表示实数集和整数集，用 S^1 表示复平面上的单位圆周，其中
$S^1=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2=1,(x,y)\in R\times R\right\}=\left\{e^{2\pi ix}\,\middle|\,x\in R\right\}$
(见文献[2,3,5])。用 $C^0(X)$ 表示 X 上所有连续自映射的集合。

设 (X,d) 是度量空间，$f:X\to X$ 是一个同胚映射(连续满射)，称 f 是可扩的(正向可扩的)，若存在常数 $e>0$，使得对任意 $x,y\in X, x\ne y$，存在整数(非负整数)n，使得 $d\left(f^n(x),f^n(y)\right)>e$。

映射 $E:R\to S^1$ 定义为 $z=E(x)=e^{2\pi ix}$，$\left(x\in R, z\in S^1\right)$，称此映射 E 为从直线 R 到单位圆周 S^1 的覆叠投射。设 $f\in C^0\left(S^1\right)$，若存在连续映射 $F:R\to R$，使 $E\circ F=f\circ E$，则称 F 是 f 的一个提升。而称 $F(x+1)-F(x)$ 为 f 的映射度($x\in R$)，记为 $\deg(f)$。

定义 1[6] 设 $\tilde{X},X$ 是两个拓扑空间，$\pi:\tilde{X}\to X$ 是一个连续映射。开子集 $U\subset X$ 称为被 π 平均覆盖，如果 $\pi^{-1}(U)$ 是 $\tilde{X}$ 的一些开子集的无交并，且这些开子集中的每一个在 π 的作用下均同胚于 U。

定义 2[6] 一个连续映射 $\pi:\tilde{X}\to X$ 称为一个覆叠投射，如果对于 X 中的每一点 x，均有 x 的一个被 π 平均覆盖的开邻域。此时，称 $\tilde{X}$ 为这个覆叠投射的覆叠空间，并称 X 为这个覆叠投射的底空间。

定义 3 设 $f:X\to X$ 为连续映射，$\tilde{f}:\tilde{X}\to\tilde{X}$ 为连续满射，$\pi:\tilde{X}\to X$ 为一个覆叠投射，且 $f\circ\pi=\pi\circ\tilde{f}$ 则称动力系统 $\left(\tilde{X},\tilde{f}\right)$ 是动力系统 (X,f) 的一个提升系统，且称 f 是 f 的一个提升。

定义 4 覆叠投射 $\pi:\tilde{X}\to X$ 称为有限对一的，如果对每个 $x\in X$，$\pi^{-1}(x)$ 均为有限集。

本文所涉及的其它概念和记号可参考文献[2,3,5,7-12]。

从文献[10]的定义 2.20 及注记 2.34 的证明，可知有限对一的覆叠投射是大量存在的。

3. 结果及其证明

引理 1 设 $f\in C^0(X)$，$\pi:\tilde{X}\to X$ 是个有限对一的覆叠投射，满射 $\tilde{f}\in C^0\left(\tilde{X}\right)$，且 $\pi\circ\tilde{f}=f\circ\pi$。则 $x\in X$ 为 f 的 $n-$周期点当且仅当对每个 $\tilde{y}\in\pi^{-1}(x)$，$\tilde{y}$ 为 $\tilde{f}$ 的周期点且其周期必为 n 的倍数.

证明 设 $x\in X$ 为 f 的 $n-$周期点，$\tilde{y}\in\pi^{-1}(x)$。由 $\pi\circ\tilde{f}=f\circ\pi$，得 $\pi\circ\tilde{f}^n=f^n\circ\pi$，于是 $\pi\circ\tilde{f}^n(\tilde{y})=f^n\circ\pi(\tilde{y})=x$。故 $\tilde{f}^n(\tilde{y})\in\pi^{-1}(x)$。由于 $\pi^{-1}(x)$ 是有限集且 $\tilde{f}^n\big|_{\pi^{-1}(x)}:\pi^{-1}(x)\to\pi^{-1}(x)$ 为双射。由离散数学的有关知识知 $\pi^{-1}(x)$ 的每一点均为 $\tilde{f}^n$ 的周期点。从而 $\pi^{-1}(x)$ 的每一点均为 $\tilde{f}$ 的周期点。设有某个 $\tilde{y}\in\pi^{-1}(x)$，$\tilde{y}$ 为 $\tilde{f}$ 的 $k-$周期点 $(k<n)$。故 $\pi\circ\tilde{f}^k(\tilde{y})=f^k\circ\pi(\tilde{y})=x$，从而 $f^k(x)=x$。这与 $x\in X$ 为 f 的 $n-$周期点相矛盾。由此也可知 $\tilde{y}$ 的周期必为 n 的倍数。

定理 1 设 $f\in C^0\left(S^1\right)$，$\pi:\tilde{X}\to S^1$ 是个有限对一的覆叠投射，$\tilde{f}\in C^0\left(\tilde{X}\right)$，且 $\pi\circ\tilde{f}=f\circ\pi$。如果 $\overline{P\left(\tilde{f}\right)}=P\left(\tilde{f}\right)$，则 $\left|\deg(f)\right|\le 1$。

证明 由引理 1 知，$P\left(\tilde{f}\right)=\pi^{-1}\left(P(f)\right)$ 且 $\pi\left(P\left(\tilde{f}\right)\right)=P(f)$。若 $\overline{P\left(\tilde{f}\right)}=P\left(\tilde{f}\right)$，则有 $\pi\left(\overline{P\left(\tilde{f}\right)}\right)=\pi\left(P\left(\tilde{f}\right)\right)=P(f)$，而 $\pi\left(\overline{P\left(\tilde{f}\right)}\right)\subset\overline{\pi\left(P\left(\tilde{f}\right)\right)}=\overline{P(f)}$。设存在 $y\in\overline{P(f)}-P(f)$，则 y 的任意邻域均含有 $P(f)$ 中的异于 y 的点。对于 $\tilde{y}\in\pi^{-1}(y)$，不失一般性地可假设 $\tilde{U}$ 是点 $\tilde{y}$ 的在 $\tilde{X}$ 中的任一足够小的非空开集，使得 $\pi\big|_{\tilde{U}_\alpha}:\tilde{U}_\alpha\to U$ 为同胚映射，其中 $U=p\left(\tilde{U}\right)$。则 U 为点 y 的一个邻域，故 U 含有 $P(f)$ 中的异于 y

的点。由引理 1 及其证明过程知，$\tilde{U}$ 含有 $\overline{P(\tilde{f})}$ 中的异于 $\tilde{y}$ 的点。由 $\tilde{U}$ 的任意性知 $\tilde{y}\in\overline{P(\tilde{f})}-P(\tilde{f})$，这与 $\overline{P(\tilde{f})}=P(\tilde{f})$ 的条件相矛盾，于是 $\overline{P(f)}=P(f)$。由定理 A 知结论成立。

定理 2 设 $f\in C^0(S^1)$，$\pi:\tilde{X}\to S^1$ 是个有限对一的覆叠投射，满射 $\tilde{f}\in C^0(\tilde{X})$，且 $\pi\circ\tilde{f}=f\circ\pi$。如果 $|\deg(f)|\ge 2$，则下面四条成立：① $\overline{P(\tilde{f})}\not\subset\{2^n:n\ge 0\}$；② $\overline{P(\tilde{f})}\ne P(\tilde{f})$；③ $\Omega(\tilde{f})\ne P(\tilde{f})$；④ $ent(\tilde{f})>0$。

证明 由引理 1 知，$P(\tilde{f})=\pi^{-1}(P(f))$ 且 $\pi(P(\tilde{f}))=P(f)$。由定理 A 知 $p(f)\not\subset\{2^n|n\ge 0\}$。再由引理 1 知，$P(\tilde{f})\not\subset\{2^n:n\ge 0\}$，即结论①成立。由定理 1 立即可知结论②成立。若 $\Omega(\tilde{f})=P(\tilde{f})$，则有 $\overline{P(\tilde{f})}=P(\tilde{f})$，这与结论②相矛盾，故结论③成立。由定理 B 知 $ent(f)>0$，由于系统 $(\tilde{X},\tilde{f})$ 是系统 (S^1,f) 的一个扩充系统，故 $ent(\tilde{f})\ge ent(f)>0$。即结论④成立。

引理 2 设 $m=\pm1$，则 $g(z)=z^m,z\in S^1$ 不含有马蹄。

证明 因为 $m=\pm1$，所以 $g^2=id_{S^1}$。由于 $h(g^2)=h(id_X)=0$，故 $h(g)=0$。根据文献[3]的定理 4.1 知 $g(z)=z^m,z\in S^1$ 不含有马蹄。

推论 1 设 $m=\pm1$，则 $g(z)=z^m,z\in S^1$ 不是扩展型的。

证明 设 $g(z)=z^m,z\in S^1$ 是扩展型的。根据文献[3]的定理 1.1 知 $g(z)=z^m,z\in S^1$ 含有马蹄。这与引理 2 相矛盾。

引理 3 设 $|m|\ge 2$，则 $g(z)=z^m,z\in S^1$ 是扩展型的。

证明 根据文献[3]的命题 1.1 知结论成立。

推论 2 设 $|m|\ge 2$，则 $g(z)=z^m,z\in S^1$ 含有马蹄。

引理 4 设 $f,g\in C^0(S^1)$ 且 f 与 g 拓扑共轭，则 f 含有马蹄当且仅当 g 含有马蹄. 其证明可直接从定义得到，故从略。

引理 5 设 $f,g\in C^0(S^1)$，且 f 与 g 拓扑共轭，则 $\deg(f)=\deg(g)$。其证明可直接从文献[5]的定理 25.4 推得。

引理 6 设 $f,g\in C^0(S^1)$ 且 f 与 g 拓扑共轭，则 f 是扩展型的当且仅当 g 是扩展型的。

证明 设 $F,G\in C^0(R)$ 分别是 f,g 的任一提升，且 g 是扩展型的。设 $h\in C^0(S^1)$ 是个同胚，且 $h\circ f=g\circ h$。设 $H\in C^0(R)$ 是 h 的任一提升，故 H 是个同胚。于是 $H\circ F,G\circ H$ 均是 $h\circ f=g\circ h$ 的提升。所以存在整数 k，使得 $H\circ F=G\circ H+k$。由定义知，存在 $n\in Z_+$，使得 $l(G^n([r,r+1]))\ge 2|\deg(g)|+1$，$r\in R$。由于平移是一个等距映射，故对于直线 R 上的任一有限区间 J，有 $l(H\circ F(J))=l((G\circ H+k)(J))=l(G\circ H(J))$。故 $l(F^n([r,r+1]))=l(H^{-1}\circ G^n\circ H([r,r+1]))=l(H^{-1}\circ G^n([r_0,r_0+1]))\ge l(H^{-1}([r_1,r_1+2|\deg(g)|+1]))\ge 2|\deg(g)|+1$，由引理 5 知 $l(F^n([r,r+1]))\ge 2|\deg(f)|+1$，即 f 是扩展型的。显然由对称性知：若 f 是扩展型的，则 g 是扩展型的。

引理 7 设 $m=\pm1$，则 $g(z)=z^m,z\in S^1$ 不是扩张映射.其证明直接由定义得到，故从略。

推论 3 设 $f\in C^0(S^1)$ 是严格单调的，若 $|\deg(f)|\ge 2$，则 f 是扩展型的。

证明 由引理 5、引理 6 和文献[2]的定理 2 即可得到.

定理 3 设 $f\in C^0(S^1)$ 是满射，n 是任意给定的正整数，则下列条件是两两等价的：

1) f 的逆极限 σ_f 是可扩的；

2) f^n 的逆极限 σ_{f^n} 是可扩的；

3) $(\sigma_f)^n$ 是可扩的；

4) f 拓扑共轭于扩张映射 $g(z)=z^m,z\in S^1$，其中 $m=\deg(f)$；

5) f^n 拓扑共轭于扩张映射 $g(z)=z^{nm},z\in S^1$，其中 $m=\deg(f)$；

6) f 是正向可扩的；

7) f^n 是正向可扩的；

8) $|\deg(f)|\ge 2$ 且 f 是严格单调的，$\Omega(f)=S^1$；

9) $|\deg(f^n)|\ge 2$ 且 f^n 是严格单调的，$\Omega(f^n)=S^1$；

10) f 是拓扑传递的且 f 是严格单调的，$|\deg(f)|\ge 2$；

11) f^n 是拓扑传递的且 f^n 是严格单调的，$|\deg(f^n)|\ge 2$；

12) f 是完全传递的且 f 是严格单调的，$|\deg(f)|\ge 2$；

13) f^n 是完全传递的且 f^n 是严格单调的，

$\left|\deg\left(f^n\right)\right|\ge 2$；

14) σ_f 是拓扑传递的且 f 是严格单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

15) σ_f 是完全传递的且 f 是严格单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

16) $\left(\sigma_f\right)^n$ 是拓扑传递的且 f 是严格单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

17) $\Omega(f)\ne P(f)$ 且 f 是严格单调的，$\Omega(f)=S^1$；

18) $\Omega\left(f^n\right)\ne P(f)$ 且 f 是严格单调的，$\Omega\left(f^n\right)=S^1$；

19) f 是扩展型的且 f 是严格单调的，$\Omega(f)=S^1$；

20) f^n 是扩展型的且 f^n 是严格单调的，$\Omega\left(f^n\right)=S^1$；

21) f^n 是拓扑双重遍历的且 f 是严格单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

22) f 是拓扑双重遍历的且 f 是严格单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

23)f 是全遍历的且 f 是严格单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

24) f^n 是全遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

25) f 是拓扑弱混合的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

26) f^n 是拓扑弱混合的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

27) $f:\left(S^1,B,m\right)\to\left(S^1,B,m\right)$ 是遍历的且 f 是单调的，其中 B 为 S^1 的所有 Borel 子集组成的 $\sigma-$ 代数，m 为 Haar 测度，且 $\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

28) $f^n:\left(S^1,B,m\right)\to\left(S^1,B,m\right)$ 是遍历的且 f 是严格单调的，其中 B 为 S^1 的所有 Borel 子集组成的 $\sigma-$ 代数，m 为 Haar 测度，且 $\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

29) σ_f 是拓扑遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

30) σ_{f^n} 是拓扑遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

31) σ_f 是拓扑双重遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

32) σ_{f^n} 是拓扑双重遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

33) σ_f 是全遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

34) σ_{f^n} 是全遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

35) σ_{f^n} 是拓扑弱混合的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

36) σ_f 是拓扑弱混合的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

37) f 是拓扑遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

38) σ_f 是拓扑遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

39) f^n 是拓扑遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

40) σ_{f^n} 是拓扑遍历的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

41) f 是相对于上密度为 1 序列而言混沌的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

42) f^n 是相对于上密度为 1 序列而言混沌的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

43) σ_f 是相对于上密度为 1 序列而言混沌的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$；

44) σ_{f^n} 是相对于上密度为 1 序列而言混沌的且 f 是单调的，$\left|\deg(f)\right|\ge 2$。

45) f 含有马蹄；

46) f^n 含有马蹄；

47) f 的拓扑熵 $ent(f)>0$；

48) f^n 的拓扑熵 $ent\left(f^n\right)>0$。

证明 由于任两个单调映射的复合也是单调的。根据严格单调映射 $F:R\to R$ 的逆也是严格单调的。故 f 是严格单调的当且仅当 f^n 是严格单调的。显然有：$\left|\deg(f)\right|\ge 2$ 当且仅当 $\left|\deg\left(f^n\right)\right|\ge 2$。由文献[2]的定理 2 知 1)$\Rightarrow$4)，1)$\Rightarrow$6)，1)$\Rightarrow$8)和 1)$\Rightarrow$10)。

由定义易知 2)$\Rightarrow$1)。据引理引 5、理 7 和文献[8]的引理 2.3 知 $\left|\deg(f)\right|\ge 2$，由文献[2]的定理 2 知 4)$\Rightarrow$1)，5)$\Rightarrow$1)。由文献[10]知 6)$\Rightarrow$1)。由文献[2]的定理 2 知 8)$\Rightarrow$1)。因拓扑传递性是拓扑共轭不变性，而当 $m=\pm 1$ 时，则 $g(z)=z^m$，$z\in S^1$ 不是拓扑传递的，根据文献[2]的定理 2 知 10)$\Rightarrow$1)。因 f 是严格单调的当且仅当 f^n 是严格单调的，故由前面已证得的结论和文献[2]的定理 2 知 2)$\Leftrightarrow$5)$\Leftrightarrow$7)$\Leftrightarrow$9)$\Leftrightarrow$11)。由于可扩性是拓扑共轭下的不变性，故由文献[2]的引理 2 知 2)$\Leftrightarrow$3)。由于 $\left|\deg(f)\right|\ge 2$ 当且仅当 $\left|\deg\left(f^n\right)\right|\ge 2$，故 4)$\Leftrightarrow$5)。由 n 的任意性及前面已证得的结论知 10)$\Leftrightarrow$12)$\Leftrightarrow$13)。由文献[13]知 f 是拓扑传递的当且仅当 σ_f 是拓扑传递的，再由前面已证得的结论知 10)$\Leftrightarrow$14)$\Leftrightarrow$15)$\Leftrightarrow$16)、25)$\Leftrightarrow$36)和 26)$\Leftrightarrow$35)。由于当且仅当 $m=\pm 1$ 时，$g(z)=z^m$ 的周期点集为 S^1，其中 $z\in S^1$，故由文献[2]的定理 2 知 8)$\Leftrightarrow$17)$\Leftrightarrow$18)。由推论 1、引理 3、引理 6 及前面已证得的结论知 8)$\Leftrightarrow$9)$\Leftrightarrow$19)$\Leftrightarrow$20)。由于当 $|m|>1$ 时，$g(z)=z^m$ 的周期点集的闭包为 S^1，其中 $z\in S^1$，故由文献[7]的系

知 12)$\Leftrightarrow$21)$\Leftrightarrow$22)$\Leftrightarrow$23)$\Leftrightarrow$24)$\Leftrightarrow$25)$\Leftrightarrow$26)。由于S^1关于复数的乘法和复数的倒数构成拓扑群，而当$|m|>1$时，$g(z)=z^m$是S^1上的仿射映射，其中$z\in S^1$，故由文献[14]的定理 2.1 及前面已证得的结论知27)$\Leftrightarrow$28)$\Leftrightarrow$39)。由文献[14]的引理 5.1、引理 5.2、定理5.1及前面已证得的结论知37)$\Leftrightarrow$38)、39)$\Leftrightarrow$40)、29)$\Leftrightarrow$37)、30)$\Leftrightarrow$39)、31)$\Leftrightarrow$22)、21)$\Leftrightarrow$32)、23)$\Leftrightarrow$33)、24)$\Leftrightarrow$34)、22)$\Leftrightarrow$41)、21)$\Leftrightarrow$42)、31)$\Leftrightarrow$43)和 32)$\Leftrightarrow$44)。由文献[14]的引理 2.2 及前面已证得的结论知 10)$\Leftrightarrow$37)和 11)$\Leftrightarrow$39)。因f是严格单调的当且仅当f^n是严格单调的，f的拓扑熵$ent(f)>0$当且仅当f^n的拓扑熵$ent(f^n)>0$以及$P(f^n)=P(f)$，故根据文献[3]的定理 4.1 知从条件 45)到条件 48)的各个条件是两两等价的。根据引理 2、推论 2 和引理及4)$\Leftrightarrow$6)$\Leftrightarrow$5)$\Leftrightarrow$7)知条件 45)到条件 48)的各个条件与其前面的 44 个条件两两等价。

4. 致谢

作者十分感谢审稿人提出有益的修改意见！也衷心感谢左再思教授、沈文准教授的热情鼓励.

参考文献 (References)

[1] 何连法, 王在洪. 圆周上单调映射的拓扑熵[J]. 数学研究与评论, 1996, 16(3): 379-382.
[2] 何连法, 王在洪. 圆周上逆极限可扩的连续自映射[J]. 数学学报, 1996, 39(3): 404-410.
[3] 麦结华. 圆周自映射的一些动力系统性质及其等价条件[J]. 数学进展, 1997, 26(3): 193-209.
[4] 周作领. $|\deg| \ge 2$ 的圆周自映射[J]. 数学学报, 1985, 28(2): 200-204.
[5] 张景中, 熊金城. 函数迭代与一维动力系统[M]. 成都: 四川教育出版社, 1992: 191-195.
[6] H. Edwin. Algebraic topology. Beijing: Springer-Verlag World Publishing Corporation, 1988.
[7] R. S. Yang. Topological ergodicity and topological double ergodicity. Acta Mathematica Sinica, in Chinese, 2003, 46(3): 555-560.
[8] 张筑生. 微分动力系统原理[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
[9] L. Block, W. A. Coppel. Dynamics in one dimension. Lecture Notes in Math, 1513. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
[10] N. Aoki. Topics in general topology. Amsterdam: Elsevier, 1989.
[11] P. Walters. An introduction to ergodic theory. New York: Springer-Verlag, 1982.
[12] S. B. Nadler. Continuum theory. Pure and Applied Mathematics, New York: Marcel Dekker Inc, 1992: 158.
[13] 缪克英, 邓小琴. 紧致度量空间及其逆极限空间[J]. 北方交通大学学报, 2001, 25(3): 16-18.
[14] H. Y. Wang, J. C. Xiong. Some properties of topologically ergodic maps. Acta Mathematica Sinica, in Chinese, 2004, 47(5): 859-866.

