Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 97-98
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12020 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Partial Fraction Decompositions and to Trigonometric Sum Identities

Xin Wang
Dalian Naval Academy, Dalian
Email: wangxbb2006@yahoo.com.cn
Received: Mar. 31st, 2011; revised: Apr. 27th, 2011; accepted: May 10th, 2011.

Abstract: By partial fraction decomposition method, we prove a general summation formula on trigonometric sum, which contains several interesting trigonometric identities as special cases.

Keywords: Partial Fraction; Trigonometric Sum; Combinatorial Identities

部分分式方法与有限三角和的计算

王 欣
海军大连舰艇学院基础部，大连
Email: wangxbb2006@yahoo.com.cn
收稿日期：2011 年 3 月 31 日；修回日期：2011 年 4 月 27 日；录用日期：2011 年 5 月 10 日

摘 要：本文利用部分分式方法，证明了一类含有参变量的有限三角函数求和公式，从而推广了 Chu 和 Marini(1999)的相关结论。

关键词：部分分式；三角函数和；组合恒等式

1. 引言

部分分式方法是一种非常基本却又相当重要的数学方法。经过有理式的恒等变形，任何有理式总能化为某个既约分式。如果这个既约分式是只含有一个自变数的真分式，还可进一步化为若干个既约真分式之和。这几个分式便称为原来那个既约分式的部分分式。下面简要介绍一下。

部分分式定理 设 $\dfrac{p(x)}{Q(x)}$ 是一个真分式，如果 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 分别是多项式 $Q(x)$ 的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 重根，那么存在常数 $A_1^{(1)},\cdots,A_{k_1}^{(1)}$；$A_1^{(2)},\cdots,A_{k_2}^{(2)}$；$A_1^{(m)},\cdots,A_{k_m}^{(m)}$，使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_j^{(i)}}{(x-a_i)^j}。$$

由拉格朗日插值公式可推出化有理真分式为部分分式的一般方法[3, § 8.2]。Chu 等广泛使用部分分式方法([1,2]等)研究了双边超几何级数、三角和计算及 Harmonic 数恒等式此三类中的困难问题，得到了许多漂亮的组合恒等式。本文将使用这一方法来推证某些含参变量的三角函数恒等式。

2. 主要结果

定理 已知 n 是一个偶数，$P(\theta)$ 表示一个关于 $\cos\theta$ 的次数小于或等于 n 的多项式，y 是一个实参数，满足条件：$0<y<\pi/n$ 则有

$$\frac{\sin n\theta\{P(\theta)+P(\pi-\theta)\}}{\sin\theta(\cos 2ny-\cos 2n\theta)}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}2\cos\theta P\left(y+\frac{k\pi}{n}\right)}{4n\cos ny\left\{\cos^2\theta-\cos^2\left(y+\frac{k\pi}{n}\right)\right\}} \tag{1a}$$

$$\frac{\sin n\theta\left\{P(\theta)-P(\pi-\theta)\right\}}{\sin\theta(\cos 2ny-\cos 2n\theta)}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}2\cos\left(y+\frac{k\pi}{n}\right)P\left(y+\frac{k\pi}{n}\right)}{4n\cos ny\left\{\cos^2\theta-\cos^2\left(y+\frac{k\pi}{n}\right)\right\}} \tag{1b}$$

证明 将三角函数$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$看作是以$\cos\theta$为自变数的$n-1$次多项式，并且已知$P(\theta)$为一个关于$\cos\theta$的次数小于或等于 n 的多项式，故$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}P(\theta)$是关于$\cos\theta$的次数小于$2n$的多项式；而另一个三角函数$\cos 2ny-\cos 2n\theta$可看作$\cos\theta$的$2n$次多项式，则$\frac{\sin n\theta P(\theta)}{\sin\theta(\cos 2ny-\cos 2n\theta)}$就是以$\cos\theta$为自变数的真分式。不妨设$\cos 2ny-\cos 2n\theta$的$2n$个不同的零点为$\{\theta_k\}_{k=0}^{2n-1}$，其中$\theta_k=y+\frac{k\pi}{n}$。利用部分分式定理，可以得到下面的三角函数展开式：

$$\frac{\sin n\theta P(\theta)}{\sin\theta(\cos 2ny-\cos 2n\theta)}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\lambda_k}{\cos\theta-\cos\theta_k} \tag{2}$$

将上式两边同乘以$\cos\theta-\cos\theta_k$并取极限$\theta\to\theta_k$，系数$\{\lambda_k\}$可由下面的式子所确定

$$\lambda_k=\lim_{\theta\to\theta_k}\frac{\sin n\theta(\cos\theta-\cos\theta_k)P(\theta)}{\sin\theta(\cos 2ny-\cos 2n\theta)}=\frac{(-1)^k\sin nyP(\theta_k)}{\sin\theta_k}\lim_{\theta\to\theta_k}\frac{\cos\theta-\cos\theta_k}{\cos 2ny-\cos 2n\theta},$$

使用洛比达法则求上述极限，可得$\{\lambda_k\}$的表达式

$$\lambda_k=\frac{(-1)^{k+1}P\left(y+\frac{k\pi}{n}\right)}{4n\cos ny}。 \tag{3}$$

在(2)中令$\theta\to\pi-\theta$，可以得到与之相似的另外一个公式

$$\frac{\sin n\theta P(\pi-\theta)}{\sin\theta(\cos 2ny-\cos 2n\theta)}=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{\lambda_k}{\cos\theta+\cos\theta_k}。 \tag{4}$$

令(2) ± (4)，并将(3)代入得到定理结论。

特别要指出的是，当n是一个奇数时，有类似结论成立。

3. 三角函数恒等式的例子

当$P(\theta)$取不同函数时，相应的会得到不同的三角函数恒等式。

(1) 在定理中取$P(\theta)=1$，得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\cos\theta}{\cos^2\theta-\cos^2(y+k\pi/n)}=\frac{2n\sin n\theta\cos ny}{\sin\theta(\cos 2n\theta-\cos 2ny)}。 \tag{5}$$

(2) 在定理中取$P(\theta)=\cos n\theta$，得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta-\cos^2(y+k\pi/n)}=\frac{n\sin 2n\theta}{\sin\theta(\cos 2n\theta-\cos 2ny)}。 \tag{6}$$

值得注意的是，在上述定理和例子中，变量y的选取是任意的。特别地，取$y=0$，将会得到 Chu 和 Marini [1]中的结果。因而从本质上推广了 Chu 和 Marini 的相关结论。

上述有限三角和的显式求值是研究数值逼近、积分变换、Fourier 级数和数学物理方程解等问题的有效工具，在理论物理及工程计算等领域也具有广泛的应用价值。

参考文献 (References)

[1] W. Chu, A. Marini. Partial fractions and trigonometric identities. Advanced in Applied Mathematics, 1999, 23(2): 115-175.
[2] W. Chu. Partial fraction decompositions and trigonometric sum identities. Proceedings of the American Mathematical Society, 2008, 136(1): 229-237.
[3] R. Kress. Numerical Analysis: Graduate Texts in Mathematics (GTM181). Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.