Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 114-118
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12023 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

On Small Deviation Theorems for Moving Averages of Dependent Integer-Valued Random Sequence

Fei Meng, Danqin Zhuang, Zhongzhi Wang
Faculty of Mathematics & Physics, Anhui University of Technology, Ma'anshan
Email: wzz30@ahut.edu.cn
Received: Mar. 20th, 2011; revised: May 6th, 2011; accepted: May 8th, 2011.

Abstract: In this paper, the notion of moving likelihood ratio, as a measure of the deviation of a sequence of integer-valued random variables from an independent random sequence with geometric distribution, is introduced. By restricting the moving likelihood ratio, a certain subset of the sample space is given, and on this subset, a class of strong laws, represented by inequalities, are obtained. These strong laws contain some limit properties of the sequence of integer-valued random variables, concerning relative entropy density and the entropy function of geometric distribution.

Keywords: Moving Likelihoodratio; Moving Average; Geometric Distribution; Strong Deviation Theorem

关于整值随机序列滑动平均的若干小偏差定理

孟　飞，庄丹琴，汪忠志
安徽工业大学数理学院，马鞍山
Email: wzz30@ahut.edu.cn
收稿日期：2011 年 3 月 20 日；修回日期：2011 年 5 月 6 日；录用日期：2011 年 5 月 8 日

摘　要：本文引入随机序列滑动似然比作为任意整值随机序列相对于服从几何分布的独立随机变量序列偏差的一种度量，并通过滑动相对熵给出了样本空间的一个子集。在此子集上得到了一类关于随机序列滑动平均的用不等式表示的强极限定理，即小偏差定理。

关键词：滑动似然比；滑动平均；几何分布；小偏差定理

1. 引言

随机变量序列部分和滑动平均的几乎必然($a.s.$)极限性质是概率论极限理论中一类十分重要的问题，它在时间序列分析及金融分析等领域中有极其深刻的应用。对独立与混合相依随机序列部分和滑动平均的渐近性质，许多学者已经作了大量的研究，取得了丰富的成果(见[1-3]及其参考文献)。80 年代刘文创造性地提出利用区间分割的方法来研究任意随机序列的强极限定理，发表了一系列论文，其主要成果总结在其专著[4]中。

受文献[4]的启发，本文中我们提出了随机序列滑动似然比以及滑动相对熵概念作为任意随机序列联合分布与参考乘积分布(服从几何分布的独立随机变量序列)的偏差的随机性度量。并通过滑动相对熵给出了样本空间的一个子集。在此子集上得到了一类用不等式表示的强极限定理，即小偏差定理。在方法上我们直接构造滑动似然比，并且利用概率论经典的 Borel-Cantelli 引理来证明随机序列几乎处处收敛性，避免了[4]中繁琐的分割方法，使得证明过程更加简洁，适应范围更广。

设$\{X_n, n\ge 1\}$是定义在概率空间$\{\Omega, F, \mathrm{P}\}$上，在$S=\{1,2,\cdots\}$中取值的随机序列,其联合分布为

$$\mathrm{P}\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right)=p\left(x_1,\cdots,x_n\right)$$
$$x_i\in S, 1\le i\le n, n=1,2,\cdots \tag{1.1}$$

设Q为F上的另一概率测度，且$\{X_n, n\ge 1\}$在测度Q下的联合分布为

$$Q\left(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\right)=\prod_{i=1}^{n} g\left(x_i,p\right) \tag{1.2}$$

其中$g\left(x_i,p\right)=p\left(1-p\right)^{x_i-1}, 0<p<1, x_i\in S, 1\le i\le n,$ $n=1,2,\cdots$。即$\{X_n, n\ge 1\}$在Q下是独立同几何分布的

随机变量序列。设 $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots$ 是一列固定的整值数列，受参考文献[3]的启发，我们给出

定义 1 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是随机变量序列，称

$$\sigma_n = \left(S_{a_n+n} - S_{a_n}\right)/n \tag{1.3}$$

为 $\{X_n, n \ge 1\}$ 的滑动平均(见[2])，其中 $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n = 1, 2, \cdots$。

定义 2 设 P，Q 分别由(1.1)与(1.2)给出，我们称

$$L_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\Pi_{i=a_n+1}^{a_n+n} p(1-p)^{x_i-1}}{p\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)}, & \text{分母} > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{1.4}$$

及

$$h(\mathrm{P} \| Q) = \liminf_n \frac{1}{n} \log L_n(\omega) \tag{1.5}$$

分别为 $\{X_n, n \ge 1\}$ 相对于乘积几何分布(参考测度 Q)

$$\prod_{i=1}^{n} g(x_i, p) \tag{1.6}$$

的滑动似然比和滑动相对熵。这里约定 $\log 0 = 0$。

为了证明的需要，我们先给出一个引理，它在后面的证明中取作核心的作用。

引理 1 设 $r(x_1, \cdots x_n), n = 1, 2, \cdots$ 是概率空间 $\{\Omega, F, \mathrm{P}\}$ 上的概率分布函数，$r\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right)$ 是其边缘分布函数，$\{a_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 如前面定义。则

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \frac{r\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)}{p\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)} \le 0, \quad \mathrm{P}-a.s. \tag{1.7}$$

证明:

令 $B = \left\{\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right) \mid p\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right) > 0\right\}$，于是

$$E_{\mathrm{P}}\left[\frac{r\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)}{p\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)}\right]$$

$$= \sum_{\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right) \in B} \frac{r\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right)}{p\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right)} p\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right)$$

$$\le \sum_{\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right) \in S^n} r\left(x_{a_n+1}, \cdots, x_{a_n+n}\right) = 1$$

由 Markov 不等式，有

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{n} \log \frac{r\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)}{p\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)} \ge \varepsilon\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{r\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)}{p\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)} \ge \exp(n\varepsilon)\right) \le \exp(-n\varepsilon)$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(\frac{1}{n} \log \frac{r\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)}{p\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)} \ge \varepsilon\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n\varepsilon) < \infty$$

由 $B-C$ 引理，有

$$\mathrm{P}\left(\limsup_n \log \frac{r\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)}{p\left(X_{a_n+1}, \cdots, X_{a_n+n}\right)} \ge \varepsilon\right) = 0$$

由 ε 的任意性，引理成立。

2. 主要结论及证明

下面给出本文的主要结果及其证明.

定理 1 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是定义在概率空间 $\{\Omega, F, \mathrm{P}\}$ 的一列随机序列，$L_n(\omega)$，$h(\mathrm{P} \| Q)$ 由(1.4)与(1.5)式给出。$0 \le c \le 1$ 为常数。令

$$H(c) = \{\omega : h(\mathrm{P} \| Q) \ge -c\} \tag{2.1}$$

则

$$\limsup_n \sigma_n \le \frac{\left(1 + \sqrt{c}\right)^2}{p}, \quad \mathrm{P}-a.s. \quad \omega \in H(c) \tag{2.2}$$

$$\liminf_n \sigma_n \ge \frac{\left(1 - \sqrt{c}\right)^2}{p}, \quad \mathrm{P}-a.s. \quad \omega \in H(c) \tag{2.3}$$

注 1: 在定理 1 中，我们通过条件 $h(\mathrm{P} \| Q) \ge -c$ 限定样本空间的一个子集 $H(c)$，并在此子集上考虑 σ_n 的极限性质，其中滑动相对熵可以看作是 $\{X_n, n \ge 1\}$ 与具有乘积几何分布(1.6)的独立随机变量序列之间的一种偏差的随机性度量。且当 $\{X_n, n \ge 1\}$ 服从参数为 p 的几何布且相互独立时，$h(\mathrm{P} \| Q) \equiv 0$。引理 1 表明，在任何情况下，

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log L_n(\omega) \le 0, \quad \mathrm{P}-a.s. \tag{2.4}$$

恒成立。因此，粗略地说，(2.1)式中的条件可以看成是对 $\{X_n, n \ge 1\}$ 与具有乘积几何分布(1.6)的独立随机变量序列之间偏差的一种限制，且 c 越小，偏离越小。定理 1 表明，在此限制下，σ_n 的值也受到相应的限制，(2.2)与(2.3)式给出的就是此值相应于 c 的上，下限。当 c 很小时，此上，下限的绝对值也很小。(2.4)式也

表明，当$c<0$时，$\{\omega: h(\mathrm{P}\|Q)\geq -c\}$为零概率事件。因此我们无需考虑(2.1)式中的$c$为负数的情况。

证明：设$t\in(0,1)$，构造$\{\Omega, F, \mathrm{P}\}$上的概率分布函数$q$如下：

$$q(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} g(x_i,t), \quad x_i\in S \tag{2.5}$$

令随机变量

$$\Lambda_n(t,\omega)=\begin{cases}\dfrac{q\left(X_{a_n+1},\cdots,X_{a_n+n}\right)}{p\left(X_{a_n+1},\cdots,X_{a_n+n}\right)}, & 分母>0;\\ 0, & 其它,\end{cases} \tag{2.6}$$

由引理1可知，存在集合$A(t), P(A(t))=1$，且

$$\limsup_n \frac{1}{n}\log\Lambda_n(\omega)\leq 0, \quad \omega\in A(t) \tag{2.7}$$

设$\lambda\in(0,\infty)$，令$t=1-\lambda(1-p)$。注意到

$$\begin{aligned}\Lambda_n(t,\omega)&=\prod_{i=a_n+1}^{a_n+n}\left(\frac{1-t}{1-p}\right)^{X_i-1}\left(\frac{t}{p}\right)\frac{\prod_{i=a_n+1}^{a_n+n} p(1-p)^{X_i-1}}{p\left(X_{a_n+1},\cdots,X_{a_n+n}\right)}\\&=\prod_{i=a_n+1}^{a_n+n}\left(\frac{1-t}{1-p}\right)^{X_i}\left[\frac{t(1-p)}{p(1-t)}\right]\cdot L_n(\omega)\\&=\lambda^{\sum_{i=a_n+1}^{a_n+n} X_i}\prod_{i=a_n+1}^{a_n+n}\frac{1-\lambda(1-p)}{\lambda p}\cdot L_n(\omega)\end{aligned} \tag{2.8}$$

由(2.7)与(2.8)，有

$$\begin{aligned}&\limsup_n\left[\sigma_n\cdot\log\lambda-\log\frac{\lambda p}{1-\lambda(1-p)}\right]+\liminf_n\frac{1}{n}\log L_n(\omega)\\&\leq\limsup_n\left[\sigma_n\cdot\log\lambda-\log\frac{\lambda p}{1-\lambda(1-p)}+\frac{1}{n}\log L_n(\omega)\right]\leq 0, \quad \mathrm{P}-a.s.\end{aligned} \tag{2.9}$$

由(1.4)，(2.1)与(2.9)式，有

$$\limsup_n\sigma_n\cdot\log\lambda\leq\log\frac{\lambda p}{1-\lambda(1-p)}+c, \quad \mathrm{P}-a.s. \quad \omega\in H(c) \tag{2.10}$$

设$\lambda>1$，将(2.10)式两边同除以$\log\lambda$，得

$$\limsup_n\sigma_n\leq\frac{\log\frac{\lambda p}{1-\lambda(1-p)}}{\log\lambda}+\frac{c}{\log\lambda}, \quad \mathrm{P}-a.s. \quad \omega\in H(c) \tag{2.11}$$

注意到不等式$1-\frac{1}{x}\leq\log x\leq x-1\ (x>0)$有

$$\begin{aligned}\limsup_n\sigma_n&\leq\left[\frac{\frac{\lambda p}{1-\lambda(1-p)}-1}{1-\frac{1}{\lambda}}\right]+\frac{c}{1-\frac{1}{\lambda}}\\&=\frac{\lambda}{1-\lambda(1-p)}+\frac{c}{\lambda-1}+c, \quad \mathrm{P}-a.s. \quad \omega\in H(c)\end{aligned} \tag{2.12}$$

当$0<c\leq 1$时，令$f(\lambda)=\frac{\lambda}{1-\lambda(1-p)}+\frac{c}{\lambda-1}+c,\ \lambda>1$，易知$f(\lambda)$在$\lambda=\frac{1+\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}(1-p)}$处取得最小值$\frac{(1+\sqrt{c})^2}{p}$，即

$$\limsup_n\sigma_n\leq\frac{(1+\sqrt{c})^2}{p}, \quad \mathrm{P}-a.s. \quad \omega\in H(c) \tag{2.13}$$

当$c=0$时，取$\lambda_i\in(1,\infty), i=1,2,\cdots$，使得当$i\to\infty$时，$\lambda_i\to 1$即$t_i\to p$，令

$$H^*=\bigcap_{i=1}^{\infty}A(t_i)\bigcap H(0), \tag{2.14}$$

则对一切$i\geq 1$，由(2.12)式有

$$\limsup_n\sigma_n\leq\frac{1}{p}, \quad \omega\in H^* \tag{2.15}$$

设$0<\lambda<1$，将(2.10)式两边同除以$\log\lambda$，得

$$\liminf_n\sigma_n\geq\frac{\log\frac{\lambda p}{1-\lambda(1-p)}}{\log\lambda}+\frac{c}{\log\lambda}, \quad \mathrm{P}-a.s. \quad \omega\in H(c) \tag{2.16}$$

由(2.16)

$$\begin{aligned}\liminf_n\sigma_n&\geq\left[\frac{\frac{\lambda p}{1-\lambda(1-p)}-1}{1-\frac{1}{\lambda}}\right]+\frac{c}{1-\frac{1}{\lambda}}\\&=\frac{\lambda}{1-\lambda(1-p)}+\frac{c}{\lambda-1}+c, \quad \mathrm{P}-a.s. \quad \omega\in H(c)\end{aligned} \tag{2.17}$$

当$0<c\leq 1$时，

令$f(\lambda)=\frac{\lambda}{1-\lambda(1-p)}+\frac{c}{\lambda-1}+c,\ 0<\lambda<1$，

易知 $f(\lambda)$ 在 $\lambda=\frac{1-\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}(1-p)}$ 处取得最大值 $\frac{\left(1-\sqrt{c}\right)^2}{p}$，即

$$\liminf_n \sigma_n \ge \frac{\left(1-\sqrt{c}\right)^2}{p},\quad \mathrm{P}-a.s.\quad \omega\in H(c) \tag{2.18}$$

仿(2.15)式的证明可知，当 $c=0$ 时，(2.3)式也成立。综上所述，定理证明完毕。

推论 1 在定理 1 的假设条件下,有

$$\lim_n \sigma_n = \frac{1}{p},\quad \mathrm{P}-a.s.\quad \omega\in H(0) \tag{2.19}$$

证明：在(2.2)，(2.3)式中令 $c=0$ 即可。

推论 2 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 相互独立，且服从参数为 p 的几何分布，则 $\{X_n,n\ge 1\}$ 满足强大数定律，即

$$\lim_n \sigma_n = EX_1 = \frac{1}{p},\qquad \mathrm{P}-a.s. \tag{2.20}$$

证明：注意此时 $h(\mathrm{P}\,\|\,Q)\equiv 0,\ \mathrm{P}(H(0))=1$，于是由(2.19)式得(2.20)式。

注 2：由定理 1 给出的关于滑动平均的上、下限虽然不够精细，但它们的差

$$\limsup_n \sigma_n - \liminf_n \sigma_n \le \frac{4\sqrt{c}}{p}$$

当 $c\to 0+$ 时，与 $\sqrt{c}$ 是同阶无穷小。

3. 若干应用

作为一个直接的应用，本节我们利用上节的结论来研究信息论的信息熵定理。

定义 3 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是具有分布(1.1)的随机变量序列，$a_1\le a_2\le\cdots$ 是一列整值数列，令

$$\varphi_n(\omega) = -\frac{1}{n}\log p\left(X_{a_n+1},\cdots,X_{a_n+n}\right) \tag{3.1}$$

$\varphi_n(\omega)$ 称为 $\{X_k,k\ge 1\}$ 的滑动相对熵密度。

我们易看出，在定义 3 中若令 $a_n\equiv 0$，则就是信息论中相对熵密度，从这种意义上来看，它是信息熵密度的推广。关于相对熵的极限性质的研究是信息论中的一个重要课题[5]。

本文研究表明滑动相对熵与相对熵具有完全类似的性质。

推论 3 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是具有分布(1.1)的随机变量序列，$\varphi_n(\omega)$ 与 σ_n 分别由(3.1)，(1.3)式定义，则

$$\limsup_n \varphi_n(\omega) \le (\log 2)\limsup_n \sigma_n,\qquad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.2}$$

证明：令 $p=\frac{1}{2}$，由(2.4)得

$$\limsup_n \frac{1}{n}\left[-\sum_{k=a_n+1}^{a_n+n} X_k\log 2 - \log p\left(X_{a_n+1},\cdots,X_{a_n+n}\right)\right]\le 0,\quad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.3}$$

利用上极限的性质，由(3.3)，(3.1)式即得(3.2)式。

定理 2 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是具有分布(1.1)的随机变量序列，$\varphi_n(\omega)$ 与 σ_n 分别由(3.1)，(1.3)式定义，$p\in(0,1]$ 为常数，$G(p)$ 表示参数为 p 的几何熵，即

$$G(p) = -\frac{1}{p}\left[p\log p + (1-p)\log(1-p)\right] \tag{3.4}$$

(约定 $0\log 0=0$)。

如果

$$\limsup_n \sigma_n \le \frac{1}{p},\qquad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.5}$$

则有

$$\limsup_n \varphi_n(\omega) \le G(p),\qquad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.6}$$

证明：当 $0<p<1$ 时，由(2.4)式得

$$\limsup_n \left[(\sigma_n-1)\log(1-p) + \log p - \frac{1}{n}\log p\left(X_{a_n+1},\cdots,X_{a_n+n}\right)\right]\le 0,\qquad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.7}$$

根据上极限的性质，由(3.5)，(3.7)式得

$$\limsup_n \varphi_n(\omega) \le \limsup_n \left[-(\sigma_n-1)\log(1-p) - \log p\right] \le G(p),\qquad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.8}$$

当 $p=1$ 时，对一切 $k\ge 2$ 由(3.5)式有

$$\limsup_n \sigma_n \le \frac{1}{1-\frac{1}{k}},\qquad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.9}$$

由(3.8)与(3.9)式有

$$\limsup_n \varphi_n(\omega) \le G\left(1-\frac{1}{k}\right),\quad \mathrm{P}-a.s.\quad \forall k\le 2 \tag{3.10}$$

由(3.10)式知，当 $p=1$ 时(3.6)式仍成立。

定理 3 设 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是具有分布(1.1)的随机变

量序列，$\varphi_n(\omega)$，σ_n 与 $G(p)$ 分别由(3.1)，(1.3)，(3.4)式定义，$c>0$ 为常数，如果

$$\liminf_n \varphi_n(\omega) \ge c, \quad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.11}$$

则

$$\liminf_n \sigma_n \ge \frac{1}{p}, \quad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.12}$$

其中 p 是方程

$$G(x)=c \tag{3.13}$$

在区间 $(0,1)$ 内的唯一解。

证明: 由(3.7)式(其中 p 定义为方程(3.13)的解)有

$$\limsup_n\left[(\sigma_n-1)\log(1-p)+\log p\right]+\liminf_n \varphi_n(\omega)\le 0, \quad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.14}$$

由(3.11)，(3.14)式有

$$\left[\log(1-p)\right]\liminf_n(\sigma_n-1)+\log p\le -c=-G(p), \quad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.15}$$

由(3.15)，(3.14)式即得(3.12)式。

注 3: 因为熵函数 $G(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内严格递减，且 $G(1-0)=0, G(0+)=\infty$，故方程(3.13)式在 $(0,1)$ 内有唯一解。

注 4: 值得注意的是定理 2 与定理 3 的条件与几何分布无关，而作为定理结论的(3.6)与(3.12)式却与几何分布有关，这反映出几何分布的一种特殊地位。

推论 4 在定理 3 的条件下有

$$\liminf_n G\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)\ge c, \quad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.16}$$

证明: 由(3.12)式有

$$\limsup_n \frac{1}{\sigma_n}\le p, \quad \mathrm{P}-a.s. \tag{3.17}$$

注意到 $G(p)=c$，由(3.17)式与 $G(x)$ 的递减性即得(3.16)式。

参考文献 (References)

[1] T. L. Lai. Summability methods for independent identically distributed random varibles. Proceeding of American Mathematical Society, 1974, 45(2): 253-261.

[2] N. C. Jain. Tail probabilities for sums of independent Banach space valued random variables. Probability Theory and Related Fields, 1975, 33(3): 155-166.

[3] V. F. Gaposhkin. The law of large numbers for movingaverages of independent random. Mathematicheskie Zametki, 1987, 42(1): 124-131.

[4] 刘文. 强偏差定理与分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[5] P. Barron. The strong ergodic theorem for densitics: Generalized Shannon-McMillan-Breiman theorem. The Annals of Probability, 1985, 13(4): 1292-1303.

[6] M. Loeve. Probability Theory I. New York: Springer, 1977.

