Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 119-123
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12024 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

The Boundedness of θ-*Calderȯn*-*Zygmumd* Operators and Its Commutators on Non-homogeneous Morrey Spaces*

Jinyang Chen[1], Bolin Ma[2]
[1]College of Mathematics and statistics, Hubei Normal University, Huangshi
[2]College of Mathematics and Information Engineering, JiaXing University, Jiaxing
Email: cjypp7014@126.com
Received Mar. 14th, 3011; revised May 16th, 2011; accepted May 19th, 2011.

Abstract: In this paper, the authors established the boundedness of θ-*Calderȯn*-*Zygmumd* operators and its commutators on Morrey spaces with non-doubling measures and extands the known results.

Keywords: Non-doubling Measures; θ-*Calderȯn*-*Zygmumd* Operators; Morrey Space; $RBMO(\mu)$

θ型*Calderȯn*-*Zygmumd*算子及其交换子在非齐型Morrey空间中的有界性*

陈金阳[1]，马柏林[2]
[1]湖北师范学院数学与统计学院，黄石
[2]嘉兴学院数学与信息工程学院，嘉兴
Email: cjypp7014@126.com
收稿日期：2011年3月14日；修回日期：2011年5月16日；录用日期：2011年5月19日

摘　要：本文主要研究非齐型*Morrey*空间中的θ型*Calderȯn*-*Zygmumd*算子及其交换子的有界性，从而推广了已有结果。

关键词：非双倍测度；θ型*Calderȯn*-*Zygmumd*算子；*Morrey*空间；$RBMO(\mu)$

1. 引言

在经典调和分析中，一个关键的假设是底空间上的测度满足双倍条件。称测度μ满足双倍条件，如果存在正常数C，使得对任意的$x \in \sup p(\mu)$，$r > 0$，有$\mu(B(x,2r)) \le C\mu(B(x,r))$，其中$B(x,r) = \{y \in R^d : |y - x| < r\}$。然而，最近几年的研究表明，当欧氏空间$R^d$上*Radon*测度$\mu$不满足双倍测度条件时，众多经典的结果仍然是成立的。对μ仅有假设是满足增长性条件，即存在常数$C > 0$，使得对所有的$x \in R^d$，$r > 0$有

$$\mu(B(x,r)) \le C_0 r^n \tag{1}$$

其中$0 < n \le d$，见[1-4]。若对欧氏空间R^d赋予的*Radon*测度仅满足增长性条件，则称其为非齐型空间。这表明非齐型空间上的调和分析理论与经典欧氏空间及齐型空间中的研究方法是截然不同的，具体例子见[2,3]。由非齐型空间上的分析在解决*Painlevė*问题与*Vituskin*猜想中所起的重要作用(见[2,4])，就可以看出研究非齐型空间的重要性。发展非齐型空间上的理论研究的动机和更多例子见[3]。

2000年，*Tolsa*在非齐型空间上建立了一套完整的基础理论。在[1]中，*Tolsa*建立了标准核*Calderȯn*-*Zygmumd*算子的$L^p(\mu)(0 < p < \infty)$有界，且提出了$RBMO(\mu)$空间，得到了交换子$[T,b]$的有界性。随后，非齐型空间上出现了大量极具意义的研究成果。最近*Yoshihiro*和*Tanaka*在文献[5,6]中引入了非

*基金项目：国家自然科学基金(10771054)，湖北省教育厅青年项目(Q20102508)，湖北师范学院人才引进项目(2008F08)，湖北师范学院创新团队项目。

齐型 *Morrey* 空间，并得到了 *Calderȯn – Zygmumd* 算子及其交换子的有界性。

本文的主要目的是在非齐型 *Morrey* 空间 $M_q^p(\mu)$ 上考虑 θ 型 *Calderȯn - Zygmumd* 算子及其交换子的有界性。文中出现的字母 *C*(可能不同)表示与变化无关的常数。

定义 1： 线性算子 $T:S(\mu)\to S'(\mu)$ 称为 θ 型 *Calderȯn – Zygmumd* 算子，如果满足下列条件：

(1)T 能扩张成 $L^2(\mu)\to L^2(\mu)$ 的有界线性算子；

(2)存在定义在 $\Omega=\{(x,y)\in R^d\times R^d : x\ne y\}$ 上的连续函数 $K(x,y)$ \$K(x, y)和常数 $C>0$，使得：

(a) $|K(x,y)|\le C|x-y|^{-n}$；

(b)对于 $x,x_0,y\in R^d$，当 $2|x-x_0|<|y-x_0|$ 时，有

$$\begin{aligned}&|K(x,y)-K(x_0,y)|+|K(y,x)-K(y,x_0)|\\&\le C\theta\left(\left|\frac{x_0-x}{x_0-y}\right|\right)|x_0-y|^{-n}\end{aligned}$$

其中 $\theta(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负非降函数，满足 $\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}\mathrm{d}t<\infty$，且 $\theta(0)=0$，$\theta(2t)\le C\theta(t)$；

(c) $Tf(x)=\int K(x,y)f(y)\mathrm{d}\mu(y)$, *a.e* $x\notin \sup pf$。

在经典定义下，该类算子是由 *Yabuta* 为解决偏微分算子而引入的，最近又有任晓芳等[7]推广到非齐型空间并得到其相关性质。

注 1： θ 型 *Calderȯn - Zygmumd* 算子是 *Tolsa* 研究的标准核 *Calderȯn - Zygmumd* 算子的推广。当 $\theta(t)=t^\delta$ $(0<\delta<1)$ 时，θ 型算子即为标准核 *Calderȯn - Zygmumd* 算子。

本文中方体 $Q\in R^d$ 为欧氏空间 R^d 中的闭方体，其中心 $x_Q\in\sup p(\mu)$，方体 Q 各边平行于坐标轴，其边长记为 $\ell(Q)$。对 $\alpha>0$，αQ 表示 Q 的 α 倍扩张方体。我们记 μ 可测的方体全体为 $\hbar(\mu)$。

定义 2： 设 $k>1,\ 1\le q\le p<\infty$，定义 *Morrey* 空间 $M_q^p(\mu)$ 如下：

$$M_q^p(\mu)=\left\{f\in L_{loc}^q(\mu):\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|<\infty\right\} \tag{2}$$

其中 $\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|=\sup\limits_{Q\in\hbar(\mu)}\mu(KQ)^{\frac1p-\frac1q}\left(\int_Q|f|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac1q}$。

显然，$M_q^p(\mu)$ 空间在上述范数下是 *Banach* 空间，且对 $p\ge q_1\ge q_2\ge1$，有

$$L^p(\mu)=M_p^p(\mu)\subset M_{q_1}^p(\mu)\subset M_{q_1}^p(\mu)$$

注 2： $M_q^p(\mu)$ 空间的定义与核函数 K 的选取无关，见[5]。

本文中，任给欧氏空间 R^d 中两个方体 $Q\subset R$，令 $S_{Q,R}=1+\sum\limits_{k=1}^{N_{Q,R}}\frac{\mu(2^kQ)}{\ell(2^kQ)^n}$。其中 $N_{Q,R}$ 是使 $\ell(2^kQ)\ge\ell(R)$ 的最小整数 k。给定 $\alpha>1,\beta>\alpha^n$，我们称方体是 (α,β) 双倍的，如果 $\mu(\alpha Q)\le\beta\mu(Q)$。一般我们取 $\alpha=2$, $\beta=2^{d+1}$，特别的，令 N 是使得 2^NQ 是双倍方体的最小正整数，记这个双倍方体为 $\tilde Q$ (方体 $\tilde Q$ 是存在的，否则测度 μ 的(1.1)性质不成立)。关于 $S_{Q,R}$ 的更多性质见[1]。

定义 3： 令 $\rho>1$ 是某一个固定常数，称 $f\in L_{loc}^1(\mu)$ 属于 $RBMO(\mu)$，如果存在常数 *C*，使得任给方体 Q 有

$$\frac{1}{\mu(\rho Q)}\int_Q\left|f-m_Q(f)\right|\mathrm{d}\mu\le C \tag{3}$$

和对任给双倍方体 $Q\subset R$

$$\left|m_Q(f)-m_R(f)\right|\le CS_{Q,R} \tag{4}$$

上式中最小的常数 *C* 定义为 *f* 的 $RBMO(\mu)$ 范数，记为 $\|f\|_*$。其中 $m_Q(f)$ 表示在 Q 上的平均，即 $m_Q(f)=\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f|\mathrm{d}\mu$。$RBMO(\mu)$ 的定义与 ρ 的选取无关。

Tolsa 证明了(3)式可以替换为下式

$$\left(\frac{1}{\mu(\rho Q)}\int_Q\left|f-m_Q(f)\right|^p d\mu\right)^{\frac1p}\le C,\ 1\le p<\infty \tag{5}$$

本文主要结果如下：

定理 1： 设 T 是 θ 型 *Calderȯn - Zygmumd* 算子，$1<q\le p<\infty$，则对 $k>1$，算子 T 是 $M_q^p(k,\mu)\cap L^2(\mu)$ 空间中的有界算子。

定理 2： 设 T 是 θ 型 *Calderȯn - Zygmumd* 算子，$b\in RBMO(\mu)$，$1<q\le p<\infty$，且存在 $\varepsilon>0$，使得 $\int_0^1\frac{\theta(t)}{t^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}t<\infty$，则交换子 $[b,T]$ 在 $M_q^p(k,\mu)$ 空间上有界。

2. 主要结果的证明

在证明主要定理之前，我们需要文献[7]中的如下结论。

引理 1： 设 T 是 θ 型 *Calderòn - Zygmumd* 算子，$1<p<\infty$，则算子 T 在 $L^p(\mu)$ 空间上有界。

定理 1 的证明： 固定 $B=B(x,r)\subset R^d$，$r>0$，且对 $f\in M_q^p(k,\mu)\cap L^2(\mu)$ 进行分解，记 $f=f_1+f_2$，其中 $f_1=f\chi_{2B}$，$f_2=f-f_1$，故有

$$\left\|Tf\mid M_q^p(k,\mu)\right\|=\sup_{Q\in\hbar(\mu)}\mu(kQ)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_Q|Tf(y)|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\left(\sup_{Q\in\hbar(\mu)}\mu(kQ)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_Q|Tf_1(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\sup_{Q\in\hbar(\mu)}\mu(kQ)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_Q|Tf_2(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\le C(I+II)。$$

首先估计 I，由算子 T 的 $L^p(\mu)$ 有界性，取 $k=2$，$Q=\tilde{B}(x,2r)=\tilde{2}\tilde{B}$，得

$$\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{R^d}|Tf_1(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{R^d}|f_1(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_Q|f_1(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|$$

故 $I\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|$。

对 II，由增长性条件，我们首先有：

$$|Tf_2(x)|\le\int_{(2B)^C}\frac{|f(z)|}{|z-x|^n}\mathrm{d}\mu(z)$$

$$=\int_{R^d|B(x,2r)}\left(\int_{|z-x|}^{\infty}|f(z)|\ell^{-n-1}\mathrm{d}\ell\right)\mathrm{d}\mu(z)$$

$$=\int_{R^d|B(x,2r)}\left(\int_0^{\infty}|f(z)|\chi_{B(x,\ell)}\ell^{-n-1}d\ell\right)\mathrm{d}\mu(z)$$

$$=C\int_{2r}^{\infty}\left(\ell^{-n-1}\int_{B(x,\ell)|B(x,2r)}|f(z)|\mathrm{d}\mu(z)\right)\mathrm{d}\ell$$

$$\le C\int_r^{\infty}\left(\ell^{-n-1}\int_{B(x,\ell)}|f(z)|\mathrm{d}\mu(z)\right)\mathrm{d}\ell$$

$$\le C\int_r^{\infty}\left(\ell^{-n-1}\left(\int_{B(x,\ell)}|f(z)|^q\mathrm{d}\mu(z)\right)^{\frac{1}{q}}\mu(B(x,\ell))^{\frac{1}{q'}}\right)\mathrm{d}\ell$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\int_r^{\infty}\ell^{-n-1+\frac{1}{q'}}\mu(B(x,\ell))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\mathrm{d}\ell$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\int_r^{\infty}\ell^{-\frac{n}{p}-1}\mathrm{d}\ell=C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot r^{-\frac{n}{p}}。$$

再取 $k=2,\quad Q=\tilde{B}(x,r)$，得

$$\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{R^d}|Tf_2(y)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\mu(2\tilde{B})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot r^{-\frac{n}{p}}\cdot\left(\int_{\tilde{B}(x,r)}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot r^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)n}=C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|$$

故 $II\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|$。

综合 I,II 得：$\left\|Tf\mid M_q^p(k,\mu)\right\|\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|$。

定义 4： 由 $RBMO(\mu)$ 函数 b 与 θ 型 *Calderòn - Zygmumd* 算子 T 生成的交换子定义为：

$$T_b(f)(x)=[b,T]f(x)=b(x)Tf(x)-T(b,f)(x)$$
$$=\int_{R^d}K(x,y)\left[b(x)-b(y)\right]f(y)\mathrm{d}\mu(y)$$

对该交换子，任在文献[7]中得到如下结果：

引理 2： 设 T 是 θ 型 *Calderòn - Zygmumd* 算子，$b\in RBMO(\mu)$，则存在 $\varepsilon>0$，当 $\int_0^1\frac{\theta(t)}{t^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}t<\infty$ 时，交换子 $[b,T]$ 在 $L^p(\mu)$ 空间上有界，$1<p<\infty$。

定理 2 的证明： 类似于定理 1 的证明，我们有如下分解：

$$|T_b(f)(x)|\le|T_b(f_1)(x)|+|T_b(f_2)(x)|=L_1+L_2,$$

其中 $f_1=f\chi_{2B}$，$f_2=f-f_1$。

对 L_1，由引理 2 知，

$$\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{R^d}|T_b(f_1)|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{2B}|f|^q\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\|b\|_*$$

$$\le C\mu(4\tilde{B})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{2\tilde{B}}|f|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\|b\|_*$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\|b\|_*$$

所以有 $\left\|L_1\mid M_q^p(\mu)\right\|\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\|b\|_*$。

下面我们估计 L_2，取 $Q=\tilde{2}\tilde{B}$，有 $b(x)-b(y)=b(x)-m_Q(b)+m_Q(b)-b(y)$，则

$$L_2\le\left|\left(b(x)-m_Q(b)\right)Tf_2(x)\right|+\left|T\left(m_Q(b)-b(y)\right)f_2(x)\right|$$
$$=L_{21}+L_{22}。$$

类似于 II 的估计，我们有

$$\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_Q\left|\left(b(x)-m_Q(b)\right)Tf_2(y)\right|^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot r^{-\frac{n}{p}}\cdot\left(\int_Q\left|\left(b(x)-m_Q(b)\right)Tf_2(y)\right|^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C\cdot\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\left(\frac{1}{\mu(2Q)}\int_Q\left|b(x)-m_Q(b)\right|^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\|b\|_*$$

在上式中用到条件(3)得：$\left\|L_{21}\mid M_q^p(\mu)\right\|\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\|b\|_*$

对 L_{22}，设 i 是第 1 个满足 $2^i\supset\tilde{B}(x,\ell)$ 的正整数，则

$$\int_{(2B)^C}\frac{\left|\left(m_Q(b)-b(y)\right)f(y)\right|}{|x-y|^n}\mathrm{d}\mu(y)$$

$$\le\int_{R^d|(2B)}\left(\int_{|x-y|}^{\infty}\ell^{-n-1}\left|\left(m_Q(b)-b(y)\right)f(y)\right|\chi_{B(x,\ell)}\mathrm{d}\ell\right)\mathrm{d}\mu(y)$$

$$\le\int_{R^d|(2B)}\left(\int_0^{\infty}\ell^{-n-1}\left|\left(m_Q(b)-b(y)\right)f(y)\right|\chi_{B(x,\ell)}\mathrm{d}\ell\right)\mathrm{d}\mu(y)$$

$$\le C\int_{2r}^{\infty}\ell^{-n-1}\left(\int_{B(x,\ell)|(2B)}\left|\left(m_Q(b)-b(y)\right)f(y)\right|\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\ell$$

$$\le C\int_{2r}^{\infty}\ell^{-n-1}\left(\int_{B(x,\ell)}\left|m_Q(b)-b(y)\right|^{q'}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_{B(x,\ell)}\left|f(y)\right|^q\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}\ell$$

$$\le C\int_{2r}^{\infty}\ell^{-n-1}\left(\int_{2^iQ}\left|m_Q(b)-b(y)\right|^{q'}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}\ell^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)n}\mathrm{d}\ell\cdot\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\int_{2r}^{\infty}\ell^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1\right)-1}\left(\frac{1}{\mu(2^{i+1}Q)}\int_{2^iQ}\left|m_Q(b)-b(y)\right|^{q'}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}\cdot\mu(2^{i+1}Q)^{\frac{1}{q'}}\mathrm{d}\ell\cdot$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\int_{2r}^{\infty}\ell^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1\right)-1}\cdot\mu(2^{i+1}Q)^{\frac{1}{q'}}\left(\frac{1}{\mu(2^{i+1}Q)}\int_{2^iQ}\left|m_{2^iQ}(b)-b(y)\right|^{q'}\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q'}}\mathrm{d}\ell$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\int_{2r}^{\infty}\ell^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1\right)-1}\mathrm{d}\ell\cdot\left(2^{i+2}r\right)^{1-\frac{1}{q}}\cdot(i+1)\|b\|_*$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot(2r)^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1\right)}\cdot2^{i+2}\cdot r^{\left(1-\frac{1}{q}\right)n}\cdot(i+1)\|b\|_*$$

$$\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\|b\|_*\cdot2^i\cdot(i+1)\cdot r^{-\frac{n}{p}}$$

又由于 i 为某一与 f,b 无关的常数(见文献[1])，经简单计算得：

$$\left\|L_{22}\mid M_q^p(\mu)\right\|\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\|b\|_*\cdot\mu(2Q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\cdot r^{-\frac{n}{p}}\cdot\mu(Q)^{\frac{1}{q}}\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\|b\|_*$$

综合得：$\left\|T_b(f)\mid M_q^p(\mu)\right\|\le C\left\|f\mid M_q^p(\mu)\right\|\cdot\|b\|_*$。

证毕。

参考文献 (References)

[1] X. Tolsa. BMO, H' and *Calderȯn - Zygmumd* operators for non doubling measures. Mathematische Annalen, 2001, 319(1): 89-149.

[2] A. Volberg. *Calderȯn - Zygmumd* capacities and operators on nonhomogeneous spaces. Conference Board of the Mathematical Sciences, 2002.

[3] J. Verdera. The fall of the doubling condition in *Calderȯn - Zygmumd* theory. Publicationes Mathematicae, 2002, 3: 275-292.

[4] X. Tolsa. *Painlevė* 's problem and the semiadditivity of analytic

capacity. Acta Mathematica, 2003, 190(2): 105-149.
[5] Y. Sawano, H. Tanalca. Morrey space for non-doubling measures. Acta Mathematica Sinica, 2005, 21(6):155-1544.
[6] Y. Sawano, H. Tanalca. Sharp maximal inequality and commutators on Morrey space with non-doubling measures. Taiwanese Journal of Mathematics, 2007, 11(4): 1091-1112.
[7] 任晓芳. 非双倍测度下的广义 *Calderȯn* - *Zygmumd* 算子. 青岛: 青岛大学, 2005.