Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 156-158
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.12030 Published Online July 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Existence of Iterative Solutions of Fourth-Order Two Point Boundary Value Problems

Yingxin Guo
College of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan
Email: yxguo312@163.com
Received: Mar. 14th, 2011; revised: Apr. 18th, 2011; accepted: Apr. 21st, 2011.

Abstract: In this paper, we study a class of forth-order two points' boundary value problems. Without any nonnegative assumption, the existence of iterative solutions is obtained. Our approach is based on the lower and upper solution method.

Keywords: Fourth-Order Differential Equation; Two-Point Boundary Value Problem; Lower and Upper Solutions; Iterative Solution

一类四阶两点边界值问题的惰性解的存在性

郭英新
山东大学控制科学与工程学院，济南
Email: yxguo312@163.com
收稿日期：2011 年 3 月 14 日；修回日期：2011 年 4 月 18 日；录用日期：2011 年 4 月 21 日

摘　要：利用上下解方法，得到了一类四阶两点边界值问题的惰性解的存在性。

关键词：四阶微分方程；两点边界值的问题；上下解；惰性解

1. 引言及定义

本文中我们讨论一类四阶两点边界值问题(BVP)：

$$\begin{cases}\left[g\left(u''(t)\right)\right]''=f\left(t,u(t),u''(t)\right),0<t<1;\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0.\end{cases}\tag{1.1}$$

这里 $f:[0,1]\times R\times R\to R, g:R\to R$ 都是连续的，R = (−1,+1)，g 是单调增加的，四阶边界值问题广泛出现在应用数学及物理学中，近来，利用各类不动点理论，许多作者已经得到了一些结果(例如[1-6])。但是，据我们所知，还没有文献涉及(BVP 1.1)本文运用上下解方法，得到了一类四阶两点边界值问题(BVP 1.1)的惰性解的存在性。

记 $W=\left\{u\mid g(u'')\in C^2[0,1]\right\}$

定义 我们称 $\alpha\in W$ 是(1.1)的上(或下)解如果 α 满足

$$\left[g\left(\alpha''(t)\right)\right]''\ge(\le)f\left(t,\alpha(t),\alpha''(t)\right),0<t<1;$$
$$\alpha(0)\ge(\le)0;\alpha(1)\ge(\le)0;$$
$$\alpha''(0)\le(\ge)0;\alpha''(1)\le(\ge)0.$$

2. 主要结论

定理 已知 $f:[0,1]\times R\times R\to R$。如果(1.1)的上解 α 和下解 β 满足 $\beta\le\alpha,\beta''\ge\alpha''$ 和

$(A1)\ \forall\beta(t)\le u_1\le u_2\le\alpha(t),\alpha''(t)\le v\le\beta''(t),t\in[0,1]$,
$f(t,u_2,v)-f(t,u_1,v)\ge 0;$

$(A2)\ \forall\alpha''(t)\le v_1\le v_2\le\beta''(t),\beta(t)\le u\le\alpha(t),t\in[0,1]$,
$f(t,u,v_2)-f(t,u,v_1)\le 0;$

那么存在满足 $\alpha_0=0,\beta_0=0$ 的单调不增序列 $\{\alpha_n\}$ 和单调不减序列 $\{\beta_n\}$ 使得它们一致收敛于的解 u^* 并且 $u^*\in[\beta,\alpha]$。

证明 考虑问题

$$\begin{cases}\left[g\left(u''(t)\right)\right]''=f\left(t,\eta(t),\eta''(t)\right),0<t<1;\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0.\end{cases}\tag{2.1}$$

这里 $\eta\in Q=\left\{\eta\mid\eta\in C^2[0,1],\beta\le\eta\le\alpha,\beta''\ge\eta''\ge\alpha''\right\}$。明显的，$Q$ 是 $C^2[0,1]$ 的非空子集。易知(2.1)存在惟一解 u 并且 $u=T\eta=:(HF)(\eta)$。记

$$(F\eta)(s)=\int_0^1 G(t,s)f\left(t,\eta(t),\eta''(t)\right)\mathrm{d}t,$$

Copyright © 2011 Hanspub

$$(Hy)(t)=\int_0^1 G(t,s)g^{-1}(y(s))\mathrm{d}s,$$

$$G(t,s)=\begin{cases}t(1-s),0\le t\le s\le 1\\ s(1-t),0\le s\le t\le 1.\end{cases}$$

显然$T=HF:C^2[0,1]\to C^2[0,1]$。我们分三步来完成证明

(1) 证明$TC\subset C$。

对$\gamma\in C$，记$w=T\gamma$。有 T 的定义，有$w,g''(w'')\in C^2[0,1]$。由已知得

$$\begin{aligned}&[g(\alpha''(t))]''-[g(w''(t))]''\ge f(t,\alpha(t),\alpha''(t))-f(t,\gamma(t),\gamma''(t)),0<t<1;\\&(\alpha-w)(0)\ge 0;(\alpha-w)(1)\ge 0;\\&(\alpha-w)''(0)\le 0;(\alpha-w)''(1)\le 0.\end{aligned}$$

令$y(t)=g(\alpha''(t))-g(w''(t))$，那么$y$十二次可微的。并且

$y''(0)\ge 0,0\le t\le 1$

$y(0)=g(\alpha''(0))-g(w''(0))\le 0;$

$y(1)=g(\alpha''(1))-g(w''(1))\le 0$

因此我们有$y(t)\le 0,0\le t\le 1.$

即$g(\alpha''(t))\le g(w''(t)),0\le t\le 1$。由于 g 是单调增加的，所以

$\alpha''(t)\le w''(t),0\le t\le 1$。

$(\alpha-w)(t)\le 0$

有引理得$\alpha\ge w$

同理$\beta\le w,w''(t)\le\beta''(t),0\le t\le 1$。

所以$TC\subset C$

(2) 令$u_1=T\eta_1,u_2=T\eta_2;\eta_1,\eta_2\in C$

满足$\eta_1\le\eta_2,\eta_1''\ge\eta_2''$，我们证明$u_1\le u_2,u_1''\ge u_2''$。

实际上，有$(Tu_2-Tu_1)(t)=f(t,\eta_2,\eta_2'')-f(t,\eta_1,\eta_1'')$

$(u_2-u_1)(0)=0,(u_2-u_1)(1)=0;$

$(u_2-u_1)''(0)=0,(u_2-u_1)''(1)=0$

相似第一步，得

$u_1\le u_2,u_1''\ge u_2''$。

(3) 序列$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$可这样得到

$\alpha_0=\alpha,\beta_0=\beta,\alpha_n=T\alpha_{n-1},\beta_n=T\beta_{n-1},n=1,2,\cdots$

由前两步得

$\beta=\beta_0\le\beta_1\le\cdots\le\beta_n\le\cdots\le\alpha_n\le\cdots\le\alpha_1\le\alpha_0=\alpha$

$\beta''=\beta_0''\ge\beta_1''\ge\cdots\ge\beta_n''\ge\cdots\ge\alpha_n''\ge\cdots\ge\alpha_1''\ge\alpha_0''=\alpha''$

另外由$\{\alpha_n\}$的定义，我们有

$$\begin{cases}[g(\alpha_n''(t))]''=f(t,\alpha_{n-1}(t),\alpha_{n-1}''(t)),0<t<1;\\ \alpha_n(0)=\alpha_n(1)=\alpha_n''(0)=\alpha_n''(1)=0.\end{cases}$$

由f的连续性，则存在仅依赖于α,β但不依赖于n,t的常数$M_{\alpha,\beta}>0$使得

$\left|[g(\alpha_n''(t))]''\right|\le M_{\alpha,\beta},0\le t\le 1$。

现在，我们断言存在$\xi_n\in(0,1)$使得

$\left.\left|[g(\alpha_n''(t))]\right|'\right|_{t=\xi_n}=0$

事实上由$[g(\alpha_n''(t))]''$的连续性，不是一般性可设$[g(\alpha_n''(t))]'>0,t\in(0,1)$，则$\left|[g(\alpha_n''(t))]'\right|\le M_{\alpha,\beta}$。

由g的单调性，若令$C_{\alpha,\beta}=g^{-1}(M_{\alpha,\beta})>0$，则$|(\alpha_n''(t))|\le C_{\alpha,\beta}$。

由于$\alpha_n(0)=\alpha_n(1)=0$，因此存在$D_{\alpha,\beta}>0$使得$|\alpha_n'(t)|,|\alpha_n(t)|\le D_{\alpha,\beta}$。

现在证明$\{\alpha_n\}$是等度连续的。明显的

$|\alpha_n''(t)-\alpha_n''(s)|=\left|g^{-1}[g(\alpha_n''(t))]-g^{-1}[g(\alpha_n''(s))]\right|$。

由g^{-1}在$[-M_{\alpha,\beta},M_{\alpha,\beta}]$的一致连续性，给定任意的$\varepsilon>0$，总存在$\mu>0$，对任意的$v_1,v_2\in[-M_{\alpha,\beta},M_{\alpha,\beta}]$，只要$|v_1-v_2|<\mu$总有$|g^{-1}(v_2)-g^{-1}(v_1)|<\varepsilon$。

另一方面，对任意的$t,s\in[0,1]$，我们有

$|g(\alpha_n''(t))-g(\alpha_n''(s))|\le M_{\alpha,\beta}|t-s|$，

$\delta=\dfrac{\mu}{M_{\alpha,\beta}}$，对任意的$t,s\in[0,1]$，只要$|t-s|<\delta$，总有$|g(\alpha_n''(t))-g(\alpha_n''(s))|\le\mu$

所以，对$\forall n\in N,\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，对任意的$t,s\in[0,1]$，只要$|t-s|<\delta$总有

$|\alpha_n''(t)-\alpha_n''(s)|\le\varepsilon$，

所以$\{\alpha_n''\}$是等度连续的。

综合前面，所以$\{\alpha_n\}$是一致有界且等度连续的。

Copyright © 2011 Hanspub

相似的可以证明$\{\beta_n\}$也是一致有界且等度连续的。由Arzela-Ascoli定理，$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$一致收敛于的解u^*并且$u^* \in [\beta, \alpha]$。

参考文献 (References)

[1] Y. S. Yang. Fourth-order two-point boundary value problem. Proceeding of the American Mathematical Society, 1988, 104(1): 175-180.
[2] M. A. Del Pino, R. F. Manasevich. Existence for fourth-order boundary value problem under a two-parameter nonresonance condition. Proceeding of the American Mathematical Society, 1991, 112(1): 81-86.
[3] R. Ma. Positive solutions of fourth-order two point boundary value problems. Annals of Differential Equations, 1999, 15(2): 225-231.
[4] B. Liu. Positive solutions of fourth-order two point boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, 2004, 148(2): 407-420.
[5] X. Yang. Positive solutions for nonlinear singular boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, 2002, 130(2-3): 225-234.
[6] K. Deimling. Nonlinear Functional Analysis. Berlin: Springer, 1985: 193-204.