Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 184-188
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.13036 Published Online October 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Pointwise Variation Growth and Entropy of the Descartes Product of a Few of Interval Maps*

Risong Li, Zengxiong Cheng
School of Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang
Email: gdoulrs@163.com
Received: Jul. 2nd, 2011; revised: Aug. 10th, 2011; accepted: Aug. 12th, 2011.

Abstract: In this paper, the definition of pointwise variation growth of interval maps was extended to continuous self-maps on k-dimensional space $I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$, where I_i is a closed interval. Let $f_i:I_i\to I_i$ be a continuous map and the total variation $Var\left(f_i^n\right)$ be bounded for all $n\ge 0$, $i=1,2,\cdots,k$. It was proved that the inequality $\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)\ge s\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$ holds for any $\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$ and that the functions $\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\to\gamma_{f_1\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right)\right)=\gamma_{f_1\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right),f_1\times\cdots\times f_k\right)$ and $\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\to s_{f_1\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right)\right)=s_{f_1\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right),f_1\times\cdots\times f_k\right)$, which maps a point $\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)$ to its local growth rate of variation and its local topological entropy respectively, are both upper semi-continuous. The variational princeple which is corresponding to a variational principle on mappings on an interval was obtained. When the map $f_i:I_i\to I_i$ is topologically transitive, $i=1,2,\cdots,k$, the corresponding result of mappings on an interval was also extended.

Keywords: Product; Bounded Variation; Variational Principle; Topological Entropy; Local Growth Rate of Variation; Total Growth Rate of Variation

有限个线段映射的笛卡尔乘积的局部变差增长与局部拓扑熵*

黎日松，陈增雄
广东海洋大学理学院，湛江
Email: gdoulrs@163.com
收稿日期：2011 年 7 月 2 日；修回日期：2011 年 8 月 10 日；录用日期：2011 年 8 月 12 日

摘　要：本文把线段映射的局部变差增长的概念推广到 k 维空间 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$ 上的连续自映射 $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$ 的情形，其中 I_i 为闭区间。设 $f_i:I_i\to I_i$ 的各次迭代的变差有限，$i=1,2,\cdots,k$。证明 $\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)\ge s\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$ 对所有 $\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$ 成立，且局部变差增长映射 $\gamma_{f_1\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right)\right)=\gamma_{f_1\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right),f_1\times\cdots\times f_k\right)$ 与局部拓扑熵映射 $s_{f_1\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right)\right)=s_{f_1\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right),f_1\times\cdots\times f_k\right)$ 均是上半连续的，得到一个与线段映射的变分原理相对应的变分原理。当 $f_i:I_i\to I_i$ 拓扑传递时，$i=1,\cdots,k$，也得到了线段映射相应结果的一个推广。

关键词：乘积；有界变差；变分原理；拓扑熵；局部变差增长；全局变差增长

1. 引言

*基金项目：广东自然科学基金博士启动项目(10452408801004217)，湛江市科技攻关项目(2010C3112005)。

文献[1]证明了 $\gamma(f)\ge h(f)$。文献[2]表明了变差集 $\left\{Var\left(f^n\right):n\ge 1\right\}$ 的有界性与线段自映射 f 的周期点的分布情形有关，特别地，当线段自映射 f 分段单调时，$\gamma(f)=h(f)$ (见文献[1,3,4])。同时 $\gamma(f)$ 也可应用到对混沌的讨论[2]，与此有关的针对变差与一维波动方程动力性状的讨论可以参考文献[5-7]。文献[8]主要致力于讨论局部变差增长 $\gamma(x,f)$ 的基本性质，并且将局部变差增长与局部拓扑熵 $s(x,f)=\lim\limits_{\delta\to 0}s\left(\left[x-\delta,x+\delta\right]\cap I,f\right)$ 作比较。在这里，局部拓扑熵由文献[9]的 Bowen 的拓扑熵的定义直接导出。该文考虑了闭区间 I 上各次迭代变差有限的连续自映射 $f\in C^0(I,I)$ 的局部变差增长 $\gamma(x,f)$ 与局部拓扑熵 $h(x,f)$ 的关系，证明了：1) $\gamma(x,f)\ge h(x,f)$ 对所有 $x\in I$ 均成立；2) 局部变差增长映射 γ_f 和局部拓扑熵映射 s_f 均是上半连续的；3) 至多除了一个不动点外，局部变差增长 $\gamma(x,f)$ 与局部拓扑熵 $h(x,f)$ 在开区间 I^0 内恒为常值。且还得到一个变分原理：局部变差增长 $\gamma(x,f)$ 与局部拓扑熵 $h(x,f)$ 的上确界分别等于全局变差增长 $\gamma(f)$ 与拓扑熵 $h(f)$。本文在文献[8]的基础上试图把其中的有关的重要概念及其相关的重要结果推广到 k 维空间 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$ 上，其中 I_i 为闭区间，$i=1,2,\cdots,k$。

2. 预备知识

设 I 是任一个闭区间，把 I 上所有连续自映射所成之集记为 $C^0(I,I)$。设 $f\in C^0(I,I)$，对任一子区间 $[a,b]\subset I$ 和任一整数 $n\ge 0$，f^n 在 $[a,b]$ 上的变差 $Var_{[a,b]}\left(f^n\right)$ 定义为 $\sup\left\{V_{\triangleright}\left(f^n\right)\right\}$，其中 $\triangleright$ 取遍 $[a,b]$ 的所有分割，对于分割 $\triangleright=\left\{a=x_0,x_1,\cdots,x_{m-1},x_m=b\right\}$，$V_{\triangleright}\left(f^n\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}\left|f^n\left(x_i\right)-f^n\left(x_{i-1}\right)\right|$。特别地，$Var_I\left(f^n\right)$ 称为 f^n 的全变差，把之简记为 $Var\left(f^n\right)$。以上概念的定义可参考一般的实变函数的教科书。

对于任一闭子区间 $J\subset I$，其上的变差增长 $\gamma(J,f)$ 定义为 $\gamma(J,f)=\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln Var_J\left(f^n\right)$。若 $\left\{Var_J\left(f^n\right):n\ge 0\right\}\subset R$ 是有界的数集，则显然 $\gamma(J,f)=0$。

定义 1[8] 点 $x\in I$ 处的局部变差增长定义为 $\gamma(x,f)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma\left(\left[x-\varepsilon,x+\varepsilon\right],f\right)$。

设 f 为紧致度量空间 (X,d) 上的连续自映射，对 $\forall\varepsilon>0$ 和 $\forall n\ge 1$，若对紧集 $K\subset X$ 的子集 F 中任两个不同的点 x,y 均满足 $\max\left\{d\left(f^i(x),^i(y)\right):0\le i\le n-1\right\}\ge\varepsilon$，则称 F 是关于 f 的 (n,ε) 分离集。以 $s_n(\varepsilon,K,f)$ 表示 K 中基数最大的 (n,ε) 分离集的基数(见文[6])。

定义 2[8] 令 $s(K,f)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln s_n(\varepsilon,K,f)$，则 $s(x,f)=\lim\limits_{\delta\to 0}s\left(B(x,\delta),f\right)$ 称为 f 在 $x\in X$ 处的局部拓扑熵，其中 $B(x,\delta)$ 为以 x 为中心、以 δ 为半径的闭球。

设 $f\in C^0(I,I)$ 的各次迭代变差有限，则其全局变差增长定义 $\gamma(f)=\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln Var\left(f^n\right)$，其在 I 上的局部变差增长映射 γ_f 定义为 $\gamma_f(x)=\gamma(x,f),x\in I$。

设 $f\in C^0(X,X)$，则其在 X 上的局部拓扑熵映射 s_f 定义为 $s_f(x)=s(x,f),x\in X$。

定义 3 设 I_i 为任意给定的闭区间，$J_i\subset I_i$ 为任一闭子区间，连续映射 $f_i:I_i\to I_i$ 的各次迭代的变差有界，$\gamma(J_i,f_i)$ 为 f_i 在 I_i 上的变差增长[8]，$i=1,2,\cdots,k$。定义 $f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$ 在 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$ 上的变差增长为 $\gamma\left(J_1\times J_2\times\cdots J_k,f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}\gamma(J_i,f_i)$。

定义 4 点 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$ 处的局部变差增长定义为 $\gamma\left((x_1,x_2,\cdots,x_k),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}\gamma(x_i,f_i)$，其中 $\gamma(x_i,f_i)$ 为点 $x_i\in I_i$ 处的局部变差增长[8]。

定义 5 设 I_i 为任意给定的闭区间，$J_i\subset I_i$ 为任一闭子区间，连续映射 $f_i:I_i\to I_i$ 的各次迭代的变差有界，$f_1\times f_2\times\cdots\times f_k$ 的全局变差增长定义为 $\gamma\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}\gamma(f_i)$。

3. 结果及其证明

引理 1 $s\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x_i,f_i\right)$。

证明 对于$\forall\delta>0$，由文献[9]知，

$$\begin{aligned}&s_n\left(B\left(x_1,\frac{\delta}{\sqrt{k}}\right),f_1\right)\cdot s_n\left(B\left(x_2,\frac{\delta}{\sqrt{k}}\right),f_2\right)\cdots\cdot s_n\left(B\left(x_k,\frac{\delta}{\sqrt{k}}\right),f_k\right)\\&\le s_n\left(B\left(x_1,\frac{\delta}{\sqrt{k}}\right)\times B\left(x_2,\frac{\delta}{\sqrt{k}}\right)\times\cdots\times B\left(x_k,\frac{\delta}{\sqrt{k}}\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)\\&\le s_n\left(B\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),\delta\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)\le s_n\left(B\left(x_1,\delta\right)\times B\left(x_2,\delta\right)\times\cdots\times B\left(x_k,\delta\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)\\&\le s_n\left(B\left(x_1,\delta\right),f_1\right)\cdot s_n\left(B\left(x_2,\delta\right),f_2\right)\cdots\cdot s_n\left(B\left(x_k,\delta\right),f_k\right)\end{aligned},$$

故$s\left(\left(x_1,\cdots,x_k\right),f_1\times\cdots\times f_k\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x_i,f_i\right)$。

定理 1 若连续线段映射$f_i:I_i\to I_i$的各次迭代的变差有限，$i=1,2,\cdots,k$，则$\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)\ge s\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$，$\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$，其中局部拓扑熵$s\left(x_i,f_i\right)$的定义如文献[8]，$i=1,2,\cdots,k$。

证明 由条件、引理 1 及文献[8]中的定理 1 知，$\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x_i,f_i\right)\ge\sum_{i=1}^{k}s\left(x_i,f_i\right)=s\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$。

注记 1：定理 1 是文献[8]中的定理 1 的推广。

定理 2 对于各次迭代的变差有限连续线段映射$f_i:I_i\to I_i$，$i=1,2,\cdots,k$，局部变差增长的映射$\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}:I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\to\left[0,+\infty\right]$是上半连续的，其中$\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\right)=\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$，$\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$。

证明 任意给定一点$\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$和正数$\varepsilon$，由文献[8]的定理 2 知，$\gamma_{f_i}:I_i\to\left[0,+\infty\right]$是上半连续的，$i=1,2,\cdots,k$。于是对于$\gamma_{f_i},x_0^{(i)}$和$\frac{\varepsilon}{k}>0$，必存在$\delta_i>0$，使得对所有$x^{(i)}\in\left(x_0^{(i)}-\delta_i,x_0^{(i)}+\delta_i\right)\cap I_i$均成立.取$\delta=\min\left\{\delta_i\middle|i=1,2,\cdots,k\right\}$，则对$B=\left(x_0^{(1)}-\delta,x_0^{(1)}+\delta\right)\times\left(x_0^{(2)}-\delta,x_0^{(2)}+\delta\right)\times\cdots\times\left(x_0^{(k)}-\delta,x_0^{(k)}+\delta\right)$中的任一点$\left(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)}\right)$，均有
$\gamma\left(\left(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)}\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x^{(i)},f_i\right)<\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x_0^{(i)},f_i\right)+\varepsilon=\gamma\left(\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)+\varepsilon$。由于$B$是点$\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right)$的邻域且此点的任一邻域包含形如$B$这种形式的邻域，故$\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}:I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\to\left[0,+\infty\right]$是上半连续的。

注记 2：定理 2 是文献[8]中的定理 2 的推广。

定理 3 设$f_i\in C^0\left(I_i,I_i\right),i=1,2,\cdots,k$，局部拓扑熵映射$s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}:I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\to\left[0,+\infty\right]$是上半连续的，且$s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}=s_{f_1}+s_{f_2}+\cdots+s_{f_k}$，其中$s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\right)=s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$，$s_{f_i}$是$f_i$的局部拓扑熵映射[8]，$i=1,\cdots,k$。

证明 由引理 1 和文献[8]中的定理 3 即可证得。

注记 3：定理 3 是文献[8]中的定理 3 的推广。

推论 1 设线段映射$f_i:I_i\to I_i$的各次迭代的变差有限，$x_i\in I_i,i=1,2,\cdots,k$，则对$Orb\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\left\{\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)^n\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right):n\ge0\right\}$的闭包中的任一点$\left(z_1,z_2,\cdots,z_k\right)$，均有$\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)\le\gamma\left(\left(z_1,z_2,\cdots,z_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$。

证明 由于$\overline{Orb\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)}=\overline{\left\{\left(f_1^{\,n}\left(x_1\right),f_2^{\,n}\left(x_2\right),\cdots,f_k^{\,n}\left(x_k\right)\right):n\ge 0\right\}}\subset\overline{Orb\left(x_1,f_1\right)}\times\overline{Orb\left(x_2,f_2\right)}\times\cdots\times\overline{Orb\left(x_k,f_k\right)}$。故由文献[8]中的推论 4 知，对于任意$z_i\in\overline{Orb(x_i,f_i)}$，均有$\gamma\left(x_i,f_i\right)\le\gamma\left(z_i,f_i\right),i=1,2,\cdots,k$。从而有$\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x_i,f_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(z_i,f_i\right)$，即$\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)\le\gamma\left(\left(z_1,z_2,\cdots,z_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$。故推论获证。

注记 4：推论 1 是文献[8]中的推论 4 的推广。

定理 4 设线段映射 $f_i:I_i\to I_i$ 的各次迭代的变差有限，$i=1,2,\cdots,k$，则 $\gamma\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\sup\left\{\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right):\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\right\}$，且存在点 $\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$，使得$\gamma\left(\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\gamma\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$。

证明 由文献[8]的定理 6 知，对每个$i=1,2,\cdots,k$，$\gamma\left(f_i\right)==\sup\left\{\gamma\left(x_i,f_i\right):x_i\in I_i\right\}$，且存在点$x_0^{(i)}\in I_i$，使得$\gamma\left(x_0^{(i)}f_i\right)=\gamma\left(f_i\right)$，故$\gamma\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(f_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x_0^{(i)},f_i\right)=\gamma\left(\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right)f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$。因 $\sup\left\{\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right):\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\right\}=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x_i,f_i\right):x_i\in I_i,i=1,2,\cdots,k\right\}\le\sum_{i=1}^{k}\sup\left\{\gamma\left(x_i,f_i\right):x_i\in I_i\right\}\le\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(f_i\right)$，而 $\sup\left\{\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right):\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\right\}\ge\gamma\left(\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$，因此定理获证。

注记 5：定理 4 是文献[8]中的定理 6 的推广。

定理 5 若线段映射 $f_i:I_i\to I_i$ 的各次迭代变差有限，$i=1,2,\cdots,k$，则局部变差增长 $\left\{\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right):\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in\overline{P\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)}\right\}$的上确界等于全局变差增长 $\gamma\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$，且存在一点$\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right)\in\overline{P\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)}$，使得$\gamma\left(\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\gamma\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$。

证明 由文献[8]的推论 8 知，$\sup\left\{\gamma\left(x_i,f_i\right):x_i\in\overline{P\left(f_i\right)}\right\}=\gamma\left(f_i\right),i=1,2,\cdots,k$，且存在一点$x_0^{(i)}\in\overline{P\left(f_i\right)}$，使得$\gamma\left(x_0^{(i)},f_i\right)=\gamma\left(f_i\right),i=1,2,\cdots,k$。故$\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(x_0^{(i)},f_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\gamma\left(f_i\right)$，即 $\gamma\left(\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)=\gamma\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$。因 $\sup\left\{\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right):\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in\overline{P\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)}\right\}\le\sum_{i=1}^{k}\sup\left\{\gamma\left(x_i,f_i\right):x_i\in\overline{P\left(f_i\right)}\right\}$，而 $\sup\left\{\gamma\left(\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right),f_1\times f_2\cdots\times f_k\right):\left(x_1,x_2,\cdots,x_k\right)\in\overline{P\left(f_1\times f_2\cdots\times f_k\right)}\right\}\ge\gamma\left(\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\cdots,x_0^{(k)}\right),f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)$，且 $\overline{P\left(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k\right)}=\overline{P\left(f_1\right)}\times\overline{P\left(f_2\right)}\times\cdots\times\overline{P\left(f_k\right)}$。于是定理获证。

注记 6：定理 5 是文献[8]中的推论 8 的推广。

定理 6 若线段映射 $f_i:I_i\to I_i$ 拓扑混合，$i=1,2,\cdots,k$，则$s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}$在$I_1\times I_2\times\cdots\times I_k$的内部$\left(I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\right)^0$处处等于某一个常数；假如$f_i$的各次迭代变差有限，$i=1,2,\cdots,k$，则局部变差增长函数$\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}$在$\left(I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\right)^0$内也处处等于某一个常数。另外，这两个函数在$\left(I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\right)^0$处处为正。

证明 由文献[8]的定理 10 知，s_{f_i}在$I_i^{\,0}$内处处等于某一个常数$c_i,i=1,2,\cdots,k$。由于 $\left(I_1\times\cdots\times I_k\right)^0=I_1^{\,0}\times\cdots\times I_k^{\,0}$，故在$\left(I_1\times I_2\times\cdots\times I_k\right)^0$内，有$s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}=\sum_{i=1}^{k}s_{f_i}=\sum_{i=1}^{k}c_i$。由文献[8]的定理 10 知，$\gamma_{f_i}$在 $I_i^{\,0}$内处处等于某一个常数$d_i,i=1,2,\cdots,k$，则$\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}=\sum_{i=1}^{k}\gamma_{f_i}=\sum_{i=1}^{k}d_i$。因$s_{f_i}>0,\gamma_{f_i}>0,i=1,2,\cdots,k$，故

$s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}=\sum_{i=1}^{k}s_{f_i}>0$，$\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}=\sum_{i=1}^{k}\gamma_{f_i}>0$。

注记 6：定理 6 是文献[8]中的定理 10 的推广。

定理 7 设 $f_i:I_i\to I_i$ 为拓扑传递的线段映射，$\tilde{I}_i$ 为局部拓扑熵映射 s_{f_i} 恒为常值的 I_i^0 的最大开子集，$i=1,2,\cdots,k$，则 $s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}$ 在 $\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2\times\cdots\times\tilde{I}_k$ 内恒为常值；假如各次迭代 f_i^n 变差极限，设 $\tilde{J}_i$ 为局部变差增长映射 γ_{f_i} 恒为常值的 I_i^0 的最大开子集，$i=1,2,\cdots,k$，则局部变差增长映射 $\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}$ 在 $\tilde{J}_1\times\tilde{J}_2\times\cdots\times\tilde{J}_k$ 内恒为常值。并且这两个函数处处为正。

证明 根据文献[8]的定理 11，$\tilde{I}_i$ 或者为 I_i^0 或者为从 I_i^0 中去掉 f_i 的一个不动点所得的开集。故可假设 $s_{f_i}(x_i)\equiv c_i,x_i\in\tilde{I}_i;\gamma_{f_i}(x_i)\equiv d_i,x_i\in\tilde{J}_i,i=1,2,\cdots,k$。则对任意 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\tilde{I}_1\times\tilde{I}_2\times\cdots\times\tilde{I}_k$，有 $s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}s_{f_i}(x_i)=\sum_{i=1}^{k}c_i$；对任意 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\tilde{J}_1\times\tilde{J}_2\times\cdots\times\tilde{J}_k$，有 $\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}\gamma_{f_i}(x_i)=\sum_{i=1}^{k}d_i$。又因为 $s_{f_i}>0,\gamma_{f_i}>0,i=1,2,\cdots,k$，所以 $s_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}=\sum_{i=1}^{k}s_{f_i}>0$；$\gamma_{f_1\times f_2\times\cdots\times f_k}=\sum_{i=1}^{k}\gamma_{f_i}>0$。因此定理获证。

注记 7：定理 7 是文献[8]中的定理 11 的推广。

4. 致谢

作者十分感谢审稿人提出有益的修改意见！也衷心感谢左再思教授、沈文淮教授和南京大学数学系代雄平教授的鼓励及有益建议。

参考文献 (References)

[1] A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[2] G. Chen, T. Huang and Y. Huang. Chaotic behavior of interval maps and total vaiations of iterates. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(7): 2161-2186.

[3] M. Misiurewcz, W. Szlenk. Entropy of piecewise monotone maps. Studia Mathematica, 1980, 67: 45-63.

[4] C. Preston. Iterates of piecewise monotone mappings on an interval. Lecture Notes in Mathematics 1347. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.

[5] G. Chen, S. B. Hsu and T. Huang. Analyzing displacement term's memory effect in a Vander Pol type boundary condition to prove chaotic vibration of the wave equation. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2002, 12(5): 965-981.

[6] G. Chen, T. Huang, J. Juang and D. Ma. Unbounded growth of total variations of snapshots of the ID linear wave equation due to the chaotic behavior of iterates of composite nonlinear boundary reflection relation. In: G. Chen, et al., (Ed.), Control of nonlinear distributed parameter systems. New York: Marcel Dekker Lecture Notes on Pure & Applied Mathematics, 2001: 15-43.

[7] Y. Huang. Growth rates of total variations of snapshots of the 1D linear wave equation with composite nonlinear boundary reflection. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2003, 13(5): 1183-1196.

[8] 黄煜，罗俊，周作领. 线段映射的局部变差增长与局部拓扑熵[J]. 数学学报, 2006, 49(2): 311-316.

[9] P. Walters. An introduction to ergodic theory, graduate texts in mathematics 79. New York: Springer-Verlag, 1982.