Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 205-207
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.13039 Published Online October 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Entire Functions Sharing a Small Function with Its Difference Operators or Shifts#

Qiuying Li, Tiantian Shen*, Qingquan Wang
Department of Mathematics, China University of Petroleum, Qingdao
Email: shentiantian1023@163.com
Received: Jun. 29th, 2011; revised: Aug. 5th, 2011; accepted: Aug. 10th, 2011.

Abstract: In this paper, we investigate an entire function of finite order share a small function with its difference and shift. Two theorems will be got, that is, if $f(z)$ and $\Delta_\eta^n f(z)$ share $a(z)$ CM (counting multiplies), then $1\le\rho(f)$; if $f(z)$ and $f(z+\eta)$ share $a(z)$ CM, then $1\le\rho(f)$ or $f(z)\equiv f(z+\eta)$. The results we obtain improve some known results of Li Sheng and Gao Zongsheng in [1].

Keywords: Difference; Shift; CM Share; Small Function

整函数与其差分或平移分担一个小函数#

李秋颖，申田田*，王庆泉
中国石油大学(华东)，青岛
Email: shentiantian1023@163.com
收稿日期：2011 年 6 月 29 日；修回日期：2011 年 8 月 5 日；录用日期：2011 年 8 月 10 日

摘　要：本文研究有穷级整函数 $f(z)$ 与其差分算子 $\Delta_\eta^n f(z)$ 或移位算子 $f(z+\eta)$ 计数分担一小函数 $a(z)$ 的唯一性问题。得到两个重要结论：如果 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta^n f(z)$ 计数分担 $a(z)$，则 $1\le\rho(f)$。如果 $f(z)$ 和 $f(z+\eta)$ 计数分担 $a(z)$，则 $1\le\rho(f)$ 或 $f(z)\equiv f(z+\eta)$。这些结论推广了李昇和高宗升在[1]中的结论。

关键词：差分；移位；计数分担；小函数

1. 引言与结果

在本文中，我们使用值分布理论的基本概念和标准记号[2-5]。特别地，我们分别用记号 $\rho(f)$ 和 $\lambda(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级和下级(见[5])。对于非常数的亚纯函数 $f(z)$，我们用 $S(r,f)$ 表示满足 $S(r,f)=o(T(r,f))\ (r\to\infty, r\notin E)$ 的量，其中例外集 $E\subset(0,\infty)$ 具有有穷对数测度。如果亚纯函数 $a(z)$ 满足 $T(r,a)=S(r,f)$，则称 $a(z)$ 为 $f(z)$ 的一个小函数。此外，两个亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ CM 分担小函数 $a(z)$ 是指 $f-a$ 与 $g-a$ 的零点完全相同且有着相同重数。对于非零复常数 η，我们定义差分算子：$\Delta_\eta f(z)=f(z+\eta)-f(z)$，当 $n\ge 2$ 时 $\Delta_\eta^n f(z)=\Delta_\eta^{n-1}(\Delta_\eta f(z))$，$n\in N$。如果 $\eta=1$，我们采用一般的差分记号 $\Delta_\eta^n f(z)=\Delta^n f(z)$。

1977 年，Rubel 和杨重骏[6]开始讨论亚纯函数与其导数分担公共值的唯一性问题，此后，关于这方面的结果[5]层出不穷。自 2006 年以来，有大量文献涉及亚纯函数与其移动，差分的值分布性质[7-10]。人们发现，对于有穷级亚纯函数而言，其移动和差分某些程度上类似导数，比如说，$m(r,f(z+c)/f(z))$ 有类似于对数导数引理

#资助信息：本项目由中国石油大学(华东)研究生自主创新工程资助项目资助。

的结果成立。很自然地，关于亚纯函数与其差分或移动分担值的唯一性就成为研究的新热点。近来，Heittokangas 等[11]证明了：

定理 A 假设 $f(z)$ 为级不超过 2 的亚纯函数，$\eta \in C$。如果 $f(z)$ 和 $f(z+\eta)$ CM 分担 $a \in C$ 和 ∞，则存在某常数 τ 使得 $f(z+\eta)-a=\tau(f(z)-a)$。

李昇和高宗升[1]证明了下面的结果：

定理 B 假设 $f(z)$ 为非周期超越整函数，且具有有穷级。如果 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta^n f(z)$ CM 分担非零有穷复数 a，则 $1 \le \rho(f) \le \lambda(f-a)+1$。

本文中，我们试图讨论 $f(z)$ 与 $\Delta_\eta^n f(z)$ 或 $f(z+\eta)$ CM 分担小函数 $a(z)$ 时的唯一性，得到下面两个定理。

定理 1 假设 $f(z)$ 为有穷级的超越整函数，$a(z)$ 为其小函数。如果 $f(z)$ 和 $\Delta_\eta^n f(z)$ CM 分担 $a(z)$，则 $1 \le \rho(f)$。

定理 2 假设 $f(z)$ 为有穷级的超越整函数，$a(z)$ 为其小函数。如果 $f(z)$ 和 $f(z+\eta)$ CM 分担 $a(z)$，则 $1 \le \rho(f)$ 或 $f(z) \equiv f(z+\eta)$。

2. 主要引理

引理 1[8] 设 $f(z)$ 为亚纯函数且满足 $\rho(f)=\rho<1$，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和整数 $0 \le j<k$，存在有穷线性测度集合 $E \subset (1,\infty)$，使得对于满足 $|z|=r \notin E \cup [0,1]$ 的所有 z，有

$$\left|\Delta^k f(z)/\Delta^j f(z)\right| \le |z|^{(k-j)(\rho-1)+\varepsilon}. \tag{2.1}$$

引理 2[12] 设 $g(z)$ 为超越亚纯函数且级小于 1。令 $h>0$，则存在 $\varepsilon-setE$ 使得对于 $z \in C \setminus E \to \infty$，有

$$g'(z+\eta)/g(z+\eta) \to 0,\ g(z+\eta)/g(z) \to 0, \tag{2.2}$$

对于满足 $|\eta| \le h$ 的 η 一致成立。甚至，E 可以满足对于充分大的 $z \notin E$，$g(z)$ 在 $|\varsigma - z| \le h$ 内无零点和极点。其中，我们称平面上可数多个小圆盘的并集未一个 $\varepsilon - set$，这些圆盘均不包含圆点，且这些圆盘所对角度的总和为有限数。

引理 3[13] 设 $f(z)$ 为非常数整函数且具有有穷下级，$\alpha_j\ (j=1,2,\cdots,m)$ 为关于 $f(z)$ 的小函数，则存在一个对数密度为 1 的集合 E 使得

$M(r,\alpha_j)/M(r,f) \to 0, (j=1,2,\cdots,m)$

同时对 $r \in E, r \to \infty$ 成立。

3. 定理 1 的证明

不失一般性，假设 $\eta=1$。首先由定理 1 的条件，有

$$\left(\Delta^n f(z)-\alpha(z)\right)/\left(f(z)-\alpha(z)\right)=e^{p(z)} \tag{3.1}$$

其中 $p(z)$ 为多项式，且 $\deg p(z) \le \rho(f)$。接下来将用反证法证明 $\rho=\rho(f) \ge 1$。假设 $\rho<1$，从而不难看出 $p(z)$ 必为常数 c。由引理 1，对于任意给定 $0<\varepsilon<(1-\rho)/2$，存在具有有穷对数测度的集合 E_1，使得对于满足 $|z|=r \notin E_1 \cup [0,1]$ 的所有 z，有

$$\left|\Delta^n f(z)/f(z)\right| \le |z|^{n(\rho-1)+\varepsilon}. \tag{3.2}$$

利用引理 3，存在一对数密度为 1 的集合 E_2 使得

$$M(r,\alpha)/M(r,f) \to 0, \tag{3.3}$$

对 $r \in E_2, r \to \infty$ 成立。显然，集合 $E_2 \setminus E_1$ 仍然具有下对数密度 1。将(3.1)改写为可以取到一列点 $\left\{z_k=r_k e^{i\theta_k}\right\}$ 使

得$\left|f\left(z_k\right)\right| = M\left(r_k, f\right), r_k \in E_2 \setminus E_1$。将(3.2)、(3.3)代入上式，得到$\mathrm{e}^c = o(1)$，这是矛盾的。综上所述，得$\rho(f) \geq 1$，定理 1 得证。

4. 定理 2 的证明

首先由定理 2 的条件，有

$$\left(f(z+\eta)-\alpha(z)\right)\Big/\left(f(z)-\alpha(z)\right) = \mathrm{e}^{p(z)}, \tag{4.1}$$

其中 $p(z)$ 为多项式且 $\deg p(z) \leq \rho(f)$。假设 $\rho < 1$，不难看出 $p(z)$ 必为常数 c。由引理 2，对于任意给定 $0 < \varepsilon < (1-\rho)/2$，存在 $\varepsilon - set\ E_3$ 使得对于 $z \in C \setminus E_3 \to \infty$，有

$$f(z+\eta)/f(z) \to 1. \tag{4.2}$$

令 $E_4 = \left\{|z| : z \in E_3, |z| > 1\right\}$，则集合 E_4 具有有穷对数测度。将(4.1)改写为
$f(z+\eta)/f(z) - \alpha(z)/f(z) = \mathrm{e}^c\left(1-\alpha(z)/f(z)\right)$ 可以取到一列点 $\left\{z_k = r_k \mathrm{e}^{i\theta_k}\right\}$ 使得 $\left|f\left(z_k\right)\right| = M\left(r_k, f\right), r_k \in E_2 \setminus E_4$。将(3.3)和(4.2)代入上式，得到 $\mathrm{e}^c = 1 + o(1)$，故这意味着 $\mathrm{e}^c = 1$，即 $f(z) = f(z+\eta)$。综上所述，知道 $\rho(f) \geq 1$ 或 $f(z) = f(z+\eta)$，定理 2 得证。

5. 致谢

本项目由中国石油大学研究生自主创新工程资助项目(编号 CXYB11-17)资助。

参考文献 (References)

[1] S. Li, Z. S. Gao. A note on the Bruck conjecture. Archiv Der Mathematik, 2010, 95(3): 257-268.
[2] W. Hayman. Meromorphic function. Oxford: Clarendon Press, 1964.
[3] I. Laine. Nevanlinna theory and complex differential equation. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
[4] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
[5] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
[6] L. A. Rubel, C. C. Yang. Values shared by an entire function and its derivative. Complex Analysis, Lecture Notes in Math, 1977, 599: 101-103.
[7] Y.-M. Chiang, S.-J. Feng. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane. The Ramanujan Journal, 2008, 16(1): 105-129.
[8] Y.-M. Chiang, S.-J. Feng. On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions. Transaction of American Mathematical Society, 2009, 361(7): 3767-3791.
[9] R. G. Halburd, R. J. Korhonen. Nevanlinna theory for the difference operator. Annals Academy Scientiarum Fennicy Mathematical, 2006; 31(2): 463-478.
[10] R. G. Halburd, R. J. Korhonen. Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 314(2): 477-487.
[11] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo and J. L. Zhang. Value sharing results for shifts of meromorphic functions, and sufficient conditions for periodicity. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 355(1): 352-363.
[12] W. Bergweiler, J. K. Langley. Zeros of differences of meromorphic functions. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2007, 142: 133-147.
[13] J. Wang. Growth and poles of meromorphic solutions of some difference equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 379: 367- 377.

