Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 23-27
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.21005 Published Online January 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

The Similar Structure of Solutions of Second-Order Linear Homogeneous Differential Equation

Junchao Wang, Shunchu Li
Institute of Applied Mathematics, Xihua University, Chengdu
Email: wangjunchao2012@126.com
Received: Oct. 18th, 2011; revised: Nov. 24th, 2011; accepted: Nov. 29th, 2011

Abstract: The solution's formal similarity is gained by reducing the analytical expression of linear non-homogeneous boundary-value problems for second-order linear homogeneous differential equations, a new method is provided to construct solution of equation with complex boundary conditions by employing simple boundary conditions.

Keywords: Second-Order Linear Homogeneous Differential Equation; Boundary-Value Problem; Similar Structure; Kernel Function

二阶齐次线性微分方程解的相似结构

王俊超，李顺初
西华大学应用数学研究所，成都
Email: wangjunchao2012@126.com
收稿日期：2011 年 10 月 18 日；修回日期：2011 年 11 月 24 日；录用日期：2011 年 11 月 29 日

摘　要：本文针对二阶线性齐次微分方程的线性非齐次边值问题，通过对其解式的分析和简化，获得了解式的相似结构；提出了一种由一个基本边值问题的解去构造出较为复杂边值问题的解的一种新方法，有利于解决相应的应用问题。

关键词：二阶齐次线性微分方程；边值问题；相似结构；相似核函数

1. 引言

对工程技术问题中提炼出的一些微分方程(组)的求解问题大多都可归结为求解常微分方程(组)，那么研究常微分方程(组)边值问题解的结构对于解决工程实际中的问题就显得非常有用。

文献[1-6]研究了一些微分方程边值问题的解的形式，发现在不同的外边界条件下，方程的解有着统一的形式。微分方程解的相似结构理论是研究微分方程的边值问题解的表达式之间的联系的基础，即当边界条件中有一个为非齐次时，其解的表达式可以像实数一样表示成连分式或连分式乘积的形式，即解的相似结构，其形式由一非齐次的边界条件决定，而其它的边界条件则决定其核函数。微分方程解的相似结构理论可以广泛地应用工程中，特别是在各类油气藏渗流模型的求解问题中。文献[7-20]对均质、双孔、合采、复合等油藏的平面径向渗流模型求解都得到解的相似结构，油气藏渗流模型在不同外边界条件定义不同的核函数，其解有相同的结构。对不同的外边界条件只需改变其解的相似结构式中的相似核函数，这无疑对人们系统和全面地认识同一渗流定

解方程在不同定解条件下的压力分布规律带来清晰明了的数学直观以及编制相应试井分析软件的便利，更是可以提供一种由基本渗流边值问题的解去构造出复杂渗流边值问题的解的方法。

本文将文献[6]所讨论的齐次线性微分方程的边值问题中的右边界条件推广到非齐次的第三类边界条件情形，并对这一问题的解式进行分析和简化，同样得出其解的相似结构和相似核函数，并举例说明其在渗流工程中的一些应用。

2. 解的相似结构理论

文献[6]研究了以下二阶齐次线性微分方程两点边值问题：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

$$\left[ay+(1+ab)y'\right]_{x=1}=c \tag{2}$$

$$y(R)=0 \ \text{ or } \ y'(R)=0 \tag{3}$$

其中 a,b,c,d,R 均为实数，$c\neq 0$，$R>1$，$p(x)\in C^1(1,R)$，$q(x)\in C^2(1,R)$。记 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为方程(1)的两个线性无关的解。

定理 1[6] 在不同外边界条件下，边值问题(1)(2)(3)的解有统一的形式，即解的相似结构：

$$y(x)=\frac{c}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{\phi(1)}{\phi'(1)}}}\cdot\frac{1}{b+\dfrac{\phi(1)}{\phi'(1)}}\cdot\frac{\phi(x)}{\phi'(1)} \tag{4}$$

其相似核函数为：

$$\phi(x)=\begin{cases}\phi_1(x) & y(R)=0\\ \phi_2(x) & y'(R)=0\end{cases} \tag{5}$$

其中：

$$\phi_1(x)=y_2(R)y_1(x)-y_1(R)y_2(x),\quad \phi_2(x)=y_2'(R)y_1(x)-y_1'(R)y_2(x)$$

由定理 1 可知，边值问题的解可以表示成连分式乘积的形式；在不同的边界条件(3)下只有相似核函数不同，并且核函数是两个线性无关的解的一个组合。

定理 2 当边值问题的右边界件为非齐次的混合边界条件时

$$\left[my+ny'\right]_{x=R}=d \tag{6}$$

其中 d,m,n 均为实数，$mn\neq 0$。

边值问题(1)(2)(6)的解有如下相似结构：

$$y(x)=\frac{c}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{\Phi(1)}{\Phi'(1)}}}\cdot\frac{1}{b+\dfrac{\Phi(1)}{\Phi'(1)}}\cdot\frac{\Phi(x)}{\Phi'(1)} \tag{7}$$

其中，$\Phi(x)$ 是相似核函数：

$$\Phi(x)=m\phi_1(x)+n\phi_2(x)+\frac{d}{c}\varphi(x) \tag{8}$$

$$\varphi(x)=\left[ay_1(1)+(1+ab)y_1'(1)\right]y_2(x)-\left[ay_2(1)+(1+ab)y_2'(1)\right]y_1(x)$$

证明：微分方程(1)的通解为：

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{9}$$

其待定系数 c_1,c_2 可以由边界条件确定。

由左边界(2)条件可得：

$$\left[ay_1(1)+(1+ab)y_1'(1)\right]c_1+\left[ay_2(1)+(1+ab)y_2'(1)\right]c_2=c \tag{10}$$

由右边界条件(6)，得：

$$\left[my_1(R)+ny_1'(R)\right]c_1+\left[my_2(R)+ny_2'(R)\right]c_2=d \tag{11}$$

联立式(10)，(11)，得 c_1,c_2：

$$c_1=\frac{c\left[my_2(R)+ny_2'(R)\right]-d\left[ay_2(1)+(1+ab)y_2'(1)\right]}{T}, \quad c_2=-\frac{c\left[my_1(R)+ny_1'(R)\right]-d\left[ay_1(1)+(1+ab)y_1'(1)\right]}{T}$$

将所求 c_1,c_2 代人式(9)中，即可得边值问题(1)(2)(6)的解为：

$$y(x)=\frac{\left\{\left[c\left(my_2(R)+ny_2'(R)\right)-d\left(ay_2(1)+(1+ab)y_2'(1)\right)\right]y_1(x)-\left[c\left(my_1(R)+ny_1'(R)\right)-d\left(ay_1(1)+(1+ab)y_1'(1)\right)\right]y_2(x)\right\}}{T}$$

其中：

$$T=\left[ay_1(1)+(1+ab)y_1'(1)\right]\cdot\left[my_2(R)+ny_2'(R)\right]-\left[ay_2(1)+(1+ab)y_2'(1)\right]\cdot\left[my_1(R)+ny_1'(R)\right]$$

令：

$$\varphi(x)=\left[ay_1(1)+(1+ab)y_1'(1)\right]y_2(x)-\left[ay_2(1)+(1+ab)y_2'(1)\right]y_1(x)$$

$$\Phi(x)=m\phi_1(x)+n\phi_2(x)+\frac{d}{c}\varphi(x)$$

整理得解的相似结构：

$$y(x)=\frac{c}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\Phi(1)}{\Phi'(1)}}}\cdot\frac{1}{b+\cfrac{\Phi(1)}{\Phi'(1)}}\cdot\frac{\Phi(x)}{\Phi'(1)}$$

定理 2 表明，当边界条件为非齐次边界条件时，二阶齐次线性微分方程的两点边值问题的解可以表示成为连分式的形式，即解的相似结构，其形式只由左边界条件决定。右边界条件的变化只影响解的相似核函数。

推论 1 当边值问题的右边界条件为非齐次的第一类和第二类边界条件时，边值问题的解有同一相似结构(7)，并且其相似结构分别为：

$$\Phi(x)=\begin{cases}\Phi_1(x)=m\phi_1(x)+\dfrac{d}{c}\varphi(x) & y(R)=d\\[2ex] \Phi_2(x)=n\phi_2(x)+\dfrac{d}{c}\varphi(x) & y'(R)=d\end{cases}$$

推论 2 $\dfrac{\Phi(x)}{\Phi'(1)}$ 是二阶齐次线性微分方程边值问题：

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y'\big|_{x=1} = 1 \\ \left[my + ny'\right]_{x=R} = d \end{cases}$$

的解。

推论 2 表明相似核函数的实质是当左边界条件为第二类边界条件时边值问题的解。这也提供了一个通过简单的边界条件的边值问题的解求解复杂的边界条件的边值问题解的方法。

3. 解的相似结构理论的应用举例

微分方程解的相似结构理论可以广泛地应用工程中，特别是在各类油气藏渗流模型的求解问题中。对均质、双孔、合采、复合等油藏的平面径向渗流模型求解都得到解的相似结构。

例 1：文献[10]讨论的均质油藏平面径向渗流方程的边值问题：

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{\boldsymbol{p}}_D}{\mathrm{d}r_D^2} + \frac{1}{r_D}\frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{p}}_D}{\mathrm{d}r_D} = z\bar{\boldsymbol{p}}_D\text{，}\quad \left[-C_D z\bar{\boldsymbol{p}}_D + \left(1 + C_D zS\right)\frac{\mathrm{d}\,\bar{\boldsymbol{p}}_D}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_D}\right]\Bigg|_{r_D=1} = -\bar{\boldsymbol{q}}_D(z)$$

$\boldsymbol{p}_D(\infty, t_D) = 0$ 外边界无穷大时； $\bar{\boldsymbol{p}}_D(R_D, t_D) = 0$ 外边界定压时； $\left.\dfrac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{p}}_D}{\mathrm{d}r_D}\right|_{r_D=R_D} = 0$ 外边界封闭时其解的相似结构为：

$$\bar{\boldsymbol{p}}_D(r_D, z) = \bar{\boldsymbol{q}}_D(z)\cdot\frac{1}{C_D z + \dfrac{1}{S + \Psi(1,z)}}\cdot\frac{1}{S + \Psi(1,z)}\cdot\Psi(r_D, z)$$

对应于三种外边界条件的相似核函数为

$$\Psi(r_D, z) = \begin{cases} \dfrac{K_0\left(\sqrt{z}r_D\right)}{\sqrt{z}K_1\left(\sqrt{z}\right)}, & \text{外边界无穷大} \\ \dfrac{\Psi_{0,0}\left(r_D, R_D, \sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}\Psi_{1,0}\left(1, R_D, \sqrt{z}\right)}, & \text{外边界定压} \\ \dfrac{\Psi_{0,1}\left(r_D, R_D, \sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}\Psi_{1,1}\left(1, R_D, \sqrt{z}\right)}, & \text{外边界封闭} \end{cases}$$

这里，符号说明详见文献[10]。

4. 致谢

感谢审稿人的审阅和对于本文的意见和建议。本项研究由西华大学应用数学校重点学科(编号：XZD091009-1)资助。

参考文献 (References)

[1] 田继东, 李顺初. 一类拟线性偏微分方程组的 Laplace 空间解的形式相似性[J]. 数学理论与应用, 2004, 24(2): 67-73.
[2] 贾闽惠, 李顺初. Bessel 方程的边值问题解的相似结构[J]. College Mathematics, 2005, 21(5): 38-39.

[3] 郑鹏社, 李顺初, 张宇飞. 一类常微分方程组在封闭右边界条件下解的结构[J]. 西华大学学报, 2005, 24(6): 80-90.
[4] 李顺初, 伊良忠, 郑鹏社. 微分方程定解问题解的相似结构[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2006, 43(4): 933-934.
[5] 李顺初. 一类二阶偏微分方程的 Laplace 空间解的形式相似性[J]. 西华大学学报, 2007, 26(4): 83-86.
[6] 李顺初. 二阶齐次线性微分方程的边值问题的解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2009, 28(5): 40-41.
[7] 苏见朋, 李顺初, 李成杰. 一类复合抛物型微分方程的 Laplace 空间解的相似结构[J]. 枣庄学院学报, 2009, 26(2): 6-11.
[8] M. H. Jia, S. C. Li. Formal similarity of solutions in the laplace space on the class of fluid flow differential equation. Journal of Electronic Science and Technology of China Press, 2005, 3(2): 172-174.
[9] 黄炳光, 李顺初, 王怒涛等. 定压外边界的双孔介质复合储层压力分布求解分析[J]. 西南石油学院学报, 2005, 27(1): 37-40.
[10] 李顺初, 郑鹏社, 张宇飞. 均质油气藏试井分析解的相似结构[J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(4): 459-463.
[11] 徐昌学, 李顺初, 朱维兵等. 双孔介质油藏试井分析解的相似结构[J]. 钻采工艺, 2006, 29(4): 28-30.
[12] 孙文涛, 黄炳光, 李顺初等. 复合双渗储层中压力分布的求解分析[J]. 西南石油学院学报, 2006, 28(5): 40-43.
[13] 徐昌学, 李顺初, 朱维兵. 分形复合油藏试井分析解的相似结构[J]. 钻采工艺, 2006, 29(5): 39-42.
[14] 郑鹏社, 李顺初, 徐文昭. 基于解的相似结构的复合油藏试井分析方法[J]. 钻采工艺, 2007, 30(3): 49-50.
[15] 吴迪, 黄炳光, 李顺初等. 复合双渗封闭储层压力分布求解分析[J]. 西南石油学院学报, 2007, 29(1): 118-122.
[16] 李顺初, 郑鹏社, 张宇飞. 复合油藏试井分析解的相似结构[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(3): 24-38.
[17] 朱维兵, 李顺初, 徐昌学. 分形合采油藏试井分析解的相似结构[J]. 钻采工艺, 2008, 31(3): 67-69.
[18] 郑鹏社, 李顺初, 朱维兵. 复合双孔介质油藏中压力分布的相似结构[J]. 钻采工艺, 2008, 31(4): 80-81.
[19] 李顺初, 郑鹏社, 张宇飞. 合采油藏试井分析解的相似结构[J]. 高校应用数学学报, 2009, 24(2): 234-238.
[20] 李顺初, 黄炳光. Laplace 变换与 Bessel 函数及试井分析理论基础[M]. 北京: 石油工业出版社, 2000.