Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 88-96
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.22015 Published Online April 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

The Relation between Solutions of a Class of Higher Order Differential Equations with Periodic Coefficients and Functions of Small Growth*

Qing Wang[1], **Zongxuan Chen**[2#]

School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou
Email: 313547370@qq.com, #chzx@vip.sina.com

Received: Dec. 31st, 2011; revised: Jan. 13th, 2012; accepted: Jan. 22nd, 2012

Abstract: In this paper, we investigate the differential equations
$f^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(k-1)}+\cdots+\left[P_{0}\left(e^{z}\right)+Q_{0}\left(e^{-z}\right)\right]f=0$ and
$f^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(k-1)}+\cdots+\left[P_{0}\left(e^{z}\right)+Q_{0}\left(e^{-z}\right)\right]f=R_{1}\left(e^{z}\right)+R_{2}\left(e^{-z}\right)$. Moreover, we obtained the relation between solutions of the two differential equations and their 1th derivatives of differential equation and small functions.

Keywords: Differential Equation; Entire Functions; Function of Small Growth; Exponent of Convergence

关于线性微分方程的解的性质*

王　青[1]，陈宗煊[2#]

华南师范大学数学科学学院，广州
Email: 313547370@qq.com, #chzx@vip.sina.com

收稿日期：2011 年 12 月 31 日；修回日期：2012 年 1 月 13 日；录用日期：2012 年 1 月 22 日

摘　要：在文中研究了微分方程 $f^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(k-1)}+\cdots+\left[P_{0}\left(e^{z}\right)+Q_{0}\left(e^{-z}\right)\right]f=0$ 和 $f^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(k-1)}+\cdots+\left[P_{0}\left(e^{z}\right)+Q_{0}\left(e^{-z}\right)\right]f=R_{1}\left(e^{z}\right)+R_{2}\left(e^{-z}\right)$ 的解以及它们的一阶导数与小函数的关系。

关键词：微分方程；整函数；小函数；收敛指数

1. 引言

本文使用值分布理论的标准记号(见文[1])，还使用 $\sigma_2(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的超级，用 $\lambda(f)$,$\overline{\lambda}(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的零点及不同零点的收敛指数，用 $\overline{\lambda}(f-\varphi)$ 表示亚纯函数取小函数的点的收敛指数，以及 $\overline{\lambda}_2(f-\varphi)$[2]表示亚纯函数取小函数 φ 的点的二级收敛指数。还使用 $\tau(f)$ 表示亚纯函数 f 的不动点收敛指数，以及 $\tau_2(f)$[2]表示亚纯函数 f 的二级不动点收敛指数。

考虑微分方程：

$$f^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(k-1)}+\cdots+\left[P_{0}\left(e^{z}\right)+Q_{0}\left(e^{-z}\right)\right]f=0, \tag{1.1}$$

*基金项目：国家自然科学基金资助项目(NO. 11171119)。
#通讯作者。

$$f^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(k-1)}+\cdots+\left[P_{0}\left(e^{z}\right)+Q_{0}\left(e^{-z}\right)\right]f=R_{1}\left(e^{z}\right)+R_{2}\left(e^{-z}\right),\tag{1.2}$$

$$P_{j}\left(e^{z}\right)+Q_{j}\left(e^{-z}\right)=a_{jm_{j}}e^{m_{j}z}+\cdots+a_{j1_{j}}e^{z}+c_{j0}+b_{j1}e^{-z}+\cdots+b_{jn_{j}}e^{-n_{j}z},$$

$R_{1}\left(e^{z}\right)+R_{2}\left(e^{-z}\right)=a_{m_{j}}e^{mz}+\cdots+a_{1_{j}}e^{z}+c_{0}+b_{1_{j}}e^{-z}+\cdots+b_{n_{j}}e^{-nz}$. 且 $R_{1}\left(e^{z}\right)+R_{2}\left(e^{-z}\right)$ 不恒为零，其中 $a_{jm_{j}},\cdots,a_{j1},c_{j0},b_{j1},\cdots,b_{jn_{j}}\ (j=0,1,,\cdots,k-1)$ 为常数，m_{j},n_{j} 为正整数，且 $a_{jm_{j}}\neq 0,\ b_{jn_{j}}\neq 0$. 陈宗煊在文[3]中研究了方程(1.1) (1.2)的级，超级以及次正规解，并得到了以下定理：

定理 A[3] 假设 $P_{j}(z),Q_{j}(z)\ (j=0,1,,\cdots,k-1)$ 为关于 z 的多项式，且 $\deg P_{j}=m_{j}$, $\deg Q_{j}=n_{j}$。若 P_{0} 满足

$$m_{0}>\max\left\{m_{j}:j=1,2,\cdots,k-1\right\},\tag{1.3}$$

或者 Q_{0} 满足

$$n_{0}>\max\left\{n_{j}:j=1,2,\cdots,k-1\right\},\tag{1.4}$$

那么，方程(1.1)没有非平凡次正规解，且方程(1.1)的每个解 f 的超级 $\sigma_{2}(f)=1$.

定理 B[3] 假设 $P_{j}(z),Q_{j}(z)\ (j=0,1,,\cdots,k-1)$， $R_{i}(z)(i=1,2)$ 均为关于 z 的多项式，且 $\deg P_{j}=m_{j}$, $\deg Q_{j}=n_{j}$。若满足 P_{0} (1.3)或者 Q_{0} 满足(1.4)，那么

1) 方程(1.2)至多有一个非平凡次正规解 f_{0}，且形如 $f_{0}(z)=S_{1}\left(e^{z}\right)+S_{2}\left(e^{-z}\right)$，其中 S_{1},S_{2} 均为关于 z 的多项式。

2) 除去 1)中可能存在的一个次正规解，方程(1.2)的其余解 f 的超级 $\sigma_{2}(f)=1$。

在此基础上，我们研究了方程(1.1)和方程(1.2)的解与小函数的关系，并得到了以下结论：

定理 1.1 假设 $P_{j}(z),Q_{j}(z)\ (j=0,1,,\cdots,k-1)$ 为关于 z 的多项式，且 $\deg P_{j}=m_{j}$, $\deg Q_{j}=n_{j}$。若 P_{0} 满足式(1.3)或者 Q_{0} 满足式(1.4)。若 φ (不恒为零)是有限级整函数，那么对于微分方程(1.1)的任一非零解 f 满足

$$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\sigma(f)=\infty.\qquad \overline{\lambda}_{2}(f-\varphi)=\sigma_{2}(f)=1.$$

若 $\sigma(\varphi)<1$，还有

$$\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\sigma(f)=\infty.\qquad \overline{\lambda}_{2}(f'-\varphi)=\sigma_{2}(f)=1.$$

定理 1.2 假设 $P_{j}(z),Q_{j}(z)\ (j=0,1,,\cdots,k-1)$，$R_{i}(z)(i=1,2)$ 均为关于 z 的多项式，且 $\deg P_{j}=m_{j}$, $\deg Q_{j}=n_{j}$. 若 P_{0} 满足(1.3)或者 Q_{0} 满足(1.4)，那么

1) 方程(1.2)至多有一个有限级解 f_{0}，其余所有非零解 f 有 $\sigma(f)=\infty$。

2) 若 φ (不恒等于 f_{0})是有限级非零整函数，那么对于微分方程(1.2)的任一无穷级解 f，满足

$$\overline{\lambda}(f-\varphi)=\sigma(f)=\infty.\qquad \overline{\lambda}_{2}(f-\varphi)=\sigma_{2}(f)=1.$$

特别地，若 φ 是级小于 1 的非零整函数且 φ (不恒等于 f_{0})，并且以下两个条件之一成立：

1) $m_{0}>\max\left\{m_{j}:j=1,2,\cdots,k-1\right\}$ 且 $m\neq m_{0,}$

2) $n_{0}>\max\left\{n_{j}:j=1,2,\cdots,k-1\right\}$ 且 $n\neq n_{0}$.

则对于除去 1)中可能存在的有限级例外解 f_{0} 以外的所有解 f 还有

$$\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\sigma(f)=\infty.\qquad \overline{\lambda}_{2}(f'-\varphi)=\sigma_{2}(f)=1.$$

事实上，当 $\varphi=z$ 时，由以上定理就能得到方程(1.1)方程(1.2)的解的不动点的一系列结论：

推论 1.3 假设 $P_{j}(z),Q_{j}(z)\ (j=0,1,,\cdots,k-1)$ 以及 m_{j},n_{j} 满足定理 1.1 的条件。则方程(1.1)的每个非零解 f 及其一阶导数 f' 均有无穷多个不动点，且 $\tau(f)=\tau(f')=\infty,\ \tau_{2}(f)=\tau_{2}(f')=1$。

推论 1.4 假设 $P_{j}(z),Q_{j}(z)\ (j=0,1,,\cdots,k-1)$, $R_{i}(z)(i=1,2)$ 以及 m_{j},n_{j} 满足定理 1.2 的条件。则方程(1.2)的每个非零解 f 及其一阶导数 f' 均有无穷多个不动点，且 $\tau(f)=\tau(f')=\infty,\ \tau_{2}(f)=\tau_{2}(f')=1$, 至多一个例外。

2. 为证明定理所需要的引理

引理 **2.1**[3] 假设 $G(r)$ 和 $H(r)$ 为两个定义在 $(0,+\infty)$ 内的非减实函数。

1) 若除去一个有穷线测度的集合 E 外有 $G(r)\le H(r)$，那么对任意的 $\alpha>1$，存在 r_0 使得对所有 $r\ge r_0$ 都有 $G(r)\le H(\alpha r)$。

2) 若存在一个集合 E，其对数测度 $m_l(E)=\delta<\infty$，集合 E 的对数测度 $m_l(E)$ 定义为

$$m_l(E)=\int_1^{+\infty}\left(\chi_E(t)\right)/t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\chi_E(t)=\begin{cases}1, r\in E\\ 0, r\notin E\end{cases}$，使得当 $r\notin E$ 时 $G(r)\le H(r)$，那么对任意常 $\beta\left(>e^{\delta}\right)$，当 $r>1$ 时，有 $G(r)\le H(\beta r)$。

引理 2.2[4] 假设 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1},F$ (不恒为零)是有限级亚纯函数，如果 $f(z)$ 是方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_1f'+A_0f=F$$

的亚纯解，并且 $\sigma(f)=\infty$，那么 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$。

3. 定理 1.1 的证明

首先证明方程(1.1)的的任一非零解 f 有 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。假设 f 为方程(1.1)的任一非零解，由微分方程基本理论易知 f 为整函数。由文[3]定理 2 的证明过程知，当 P_0 满足(1.3)或者 Q_0 满足(1.4)时，f 为超越整函数，且 $\sigma(f)=\infty$。令 $g_0=f-\varphi$，那么 $\sigma(g_0)=\sigma(f)=\infty,\ \sigma_2(g_0)=\sigma_2(f)=1$ 和 $\overline{\lambda}(g_0)=\overline{\lambda}(f-\varphi)$。将 $f=g_0+\varphi$ 代入方程(1.1)中，得到

$$g_0^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]g_0^{(k-1)}+\cdots+\left[P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right]g_0=-h(z). \tag{3.1}$$

其中 $h(z)=\varphi^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]\varphi^{(k-1)}+\cdots+\left[P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right]\varphi$。注意到方程(3.1)可能具有有限级解，但这里仅讨论 $g_0=f-\varphi$ 为无穷级的解。所以接下来只对方程(3.1)的无穷级解 g_0，计算 $\overline{\lambda}(g_0)$。方程(3.1)的右边项 $-h\ne 0$。这是因为若 $-h\ne 0$，则易知 φ 是方程(1.1)的一个有限级非零解，这与定理 A 矛盾。根据引理 2.2 知，对于方程(3.1)而言，有 $\lambda(g_0)=\overline{\lambda}(g_0)=\sigma(f)=\infty$，即 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。

下面证明 $\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=1$。由(3.1)式，若 z_0 为 g_0 的 l 阶零点且 $l>k$，则 z_0 必为 $h(z)$ 的 $l-k$ 阶零点，并且有

$$N\left(r,\frac{1}{g_0}\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_0}\right)+N\left(r,\frac{1}{h(z)}\right). \tag{3.2}$$

由(3.1)式两边同除以 $h(z)g_0$ 得到

$$\frac{1}{g_0}=\frac{1}{h(z)}\left(\frac{g_0^{(k)}}{g_0}+\left[P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]\frac{g_0^{(k-1)}}{g_0}+\cdots+\left[P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right]\right). \tag{3.3}$$

所以有

$$m\left(r,\frac{1}{g_0}\right)\le m\left(r,\frac{1}{h(z)}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,P_j\left(e^z\right)+Q_j\left(e^{-z}\right)\right)+\sum_{i=1}^{k}m\left(r,\frac{g_0^{(i)}}{g_0}\right). \tag{3.4}$$

由对数导数引理，除去一线测度为有穷的集合 E 外，有

$$m\left(r,\frac{g_0^{(i)}}{g_0}\right)=O\left\{\log\left(rT\left(r,g_0\right)\right)\right\}. \tag{3.5}$$

由于 $h(z),P_j+Q_j$ 均为级为 1 的整函数，故当 r 充分大时，

$$m(r,h(z))<r^2,\ m(r,P_j+Q_j)<r^2. \tag{3.6}$$

故，由(3.2)-(3.6)式知，当 $r\notin E$ 且 r 充分大时，

$$T(r,g_0)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_0}\right)+O\left\{r^2+\log\left(rT(r,g_0)\right)\right\}. \tag{3.7}$$

又当 r 充分大时，

$$O\left\{\log\left(rT(r,g_0)\right)\right\}\le\frac{1}{2}T(r,g_0). \tag{3.8}$$

故由(3.7)，(3.8)式知，当 $r\notin E$ 且 r 充分大时，

$$\frac{1}{2}T(r,g_0)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_0}\right)+O\left(r^2\right). \tag{3.9}$$

由(3.9)式结合引理 2.1 知 $\sigma_2(g_0)\le\overline{\lambda_2}(g_0)$。故 $\overline{\lambda_2}(g_0)=\sigma_2(g_0)=\sigma_2(f)=1$。所以，$\overline{\lambda_2}(f-\varphi)=\overline{\lambda_2}(g_0)=1$。

下面证明 $\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\infty$。令 $g_1=f'-\varphi$，那么有 $\sigma(g_1)=\sigma(f')=\sigma(f)=\infty$，$\sigma_2(g_1)=\sigma_2(f')=\sigma_2(f)=1$ 和 $\overline{\lambda}(g_1)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)$。对方程(1.1)的两边微分，得到

$$\begin{aligned}&f^{(k+1)}+\left[P_{k-1}(e^z)+Q_{k-1}(e^{-z})\right]f^{(k)}+\sum_{i=1}^{k-1}\left[\left(P_i(e^z)\right)'+\left(Q_i(e^{-z})\right)'+P_{i-1}(e^z)+Q_{i-1}(e^{-z})\right]f^{(i)}\\&+\left[\left(P_0(e^z)\right)'+\left(Q_0(e^{-z})\right)'\right]f=0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

又由方程(1.1)得到

$$f=-\frac{1}{P_0(e^z)+Q_0(e^{-z})}\left(f^{(k)}+\left[P_{k-1}(e^z)+Q_{k-1}(e^{-z})\right]f^{(k-1)}+\cdots+\left[P_1(e^z)+Q_1(e^{-z})\right]f'\right). \tag{3.11}$$

将(3.11)式代入(3.10)式得到

$$\begin{aligned}&f^{(k+1)}+\left(P_{k-1}(e^z)+Q_{k-1}(e^{-z})-\frac{\left(P_0(e^z)\right)'+\left(Q_0(e^{-z})\right)'}{P_0(e^z)+Q_0(e^{-z})}\right)f^{(k)}\\&+\sum_{i=1}^{k-1}\left(P_{i-1}(e^z)+Q_{i-1}(e^{-z})+\left(P_i(e^z)\right)'+\left(Q_i(e^{-z})\right)'-\frac{\left[\left(P_0(e^z)\right)'+\left(Q_0(e^{-z})\right)'\right]\left[P_i(e^z)+Q_i(e^{-z})\right]}{P_0(e^z)+Q_0(e^{-z})}\right)f^{(i)}=0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

将 $f'=g_1+\varphi,f''=g_1'+\varphi',\cdots$ 代入式(3.12)，得到

$$\begin{aligned}&g_1^{(k)}+\left(P_{k-1}(e^z)+Q_{k-1}(e^{-z})-\frac{\left(P_0(e^z)\right)'+\left(Q_0(e^{-z})\right)'}{P_0(e^z)+Q_0(e^{-z})}\right)g_1^{(k-1)}+\\&\sum_{i=0}^{k-2}\left(P_i(e^z)+Q_i(e^{-z})+\left(P_{i+1}(e^z)\right)'+\left(Q_{i+1}(e^{-z})\right)'-\frac{\left[\left(P_0(e^z)\right)'+\left(Q_0(e^{-z})\right)'\right]\left[P_{i+1}(e^z)+Q_{i+1}(e^{-z})\right]}{P_0(e^z)+Q_0(e^{-z})}\right)g_1^{(1)}=-S(z).\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中

$$S(z)=\varphi^{(k)}+\left(P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)-\frac{\left(P_0\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'}{P_0\left(e^{z}\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)\varphi^{(k-1)}$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}\left(P_i\left(e^{z}\right)+Q_i\left(e^{-z}\right)+\left(P_{i+1}\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right)'-\frac{\left[\left(P_0\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right]\left[P_{i+1}\left(e^{z}\right)+Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right]}{P_0\left(e^{z}\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)\varphi^{(i)}.$$

先证明 $S(z)\not\equiv 0$。假设 $S(z)\equiv 0$，也即

$$\left[P_0\left(e^{z}\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right]\varphi^{(k)}+\left[\left(P_0\left(e^{z}\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right)\left(P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right)-\left(\left(P_0\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right)\right]\varphi^{(k-1)}$$
$$+\sum_{i=0}^{k-2}\left[\left(P_0\left(e^{z}\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right)\left(P_{i+1}\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right)'+\left(P_0\left(e^{z}\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right)\right.$$
$$\left.\left(P_i\left(e^{z}\right)+Q_i\left(e^{-z}\right)\right)-\left(P_{i+1}\left(e^{z}\right)+Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right)\left(\left(P_0\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right)\right]\varphi^{(i)}\equiv 0. \tag{3.14}$$

以下分两种情况进行证明：1) P_0 满足式(1.3)。2) Q_0 满足式(1.4)。

1) P_0 满足式(1.3)时，取 $z=r\left(r\in(0,+\infty)\right)$，由(3.14)式易得到(3.14)式左边关于 e^{z} 的最高次项

$$a^{2}_{0m_0}e^{2m_0 r}\equiv 0. \tag{3.15}$$

得到

$$a_{0m_0}\equiv 0. \tag{3.16}$$

这与 $P_0\left(e^{z}\right)$ 的定义矛盾。

2) Q_0 满足式(1.4)时，取 $z=-r\left(r\in(0,+\infty)\right)$，此时，(3.14)式左边关于 e^{-z} 的最高次项 $b^{2}_{0n_0}e^{2n_0 r}\equiv 0$。这与 $Q_0\left(e^{-z}\right)$ 的定义矛盾。

综合 1)和 2)两种情况可知 $S(z)\not\equiv 0$。由引理 2.3 可知，$\overline{\lambda}(g_1)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\sigma(g_1)=\infty$。

下面证明 $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\sigma_2(f)=1$。由之前已证得 $S(z)\not\equiv 0$。且由式(3.13)知，若 z_0 为 g_1 的 l 阶零点且 $l>k$，则 z_0 必为 $S(z)$ 的 $l-k$ 阶零点，有

$$N\left(r,\frac{1}{g_1}\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_1}\right)+N\left(r,\frac{1}{S(z)}\right). \tag{3.17}$$

由(3.13)式两边同除以 $S(z)g_1$ 得到

$$\frac{1}{g_1}=-\frac{1}{S(z)}\left(\frac{g_1^{(k)}}{g_1}+\left(P_{k-1}\left(e^{z}\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)-\frac{\left(P_0\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'}{P_0\left(e^{z}\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)\frac{g_1^{(k-1)}}{g_1}\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{k-2}\left(P_i\left(e^{z}\right)+Q_i\left(e^{-z}\right)+\left(P_{i+1}\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right)'-\frac{\left[\left(P_0\left(e^{z}\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right]\left[P_{i+1}\left(e^{z}\right)+Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right]}{P_0\left(e^{z}\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)\frac{g_1^{(i)}}{g_1}\right). \tag{3.18}$$

所以有

$$m\left(r,\frac{1}{g_1}\right)\le m\left(r,\frac{1}{S(z)}\right)+2\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,P_j\left(e^z\right)+Q_j\left(e^{-z}\right)\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m\left(r,\left(P_j\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_j\left(e^{-z}\right)\right)'\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{k}m\left(r,\frac{g_1^{(i)}}{g_1}\right)+km\left(r,\frac{\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right). \tag{3.19}$$

由对数导数引理，除去一线测度为有穷的集合 E_1 外，有

$$m\left(r,\frac{g_1^{(i)}}{g_1}\right)=O\left\{\log\left(rT\left(r,g_1\right)\right)\right\}. \tag{3.20}$$

由于 $S(z),P_j\left(e^z\right)+Q_j\left(e^{-z}\right),\left(P_j\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_j\left(e^{-z}\right)\right)'$ 均为级为 1 的整函数，故当 r 充分大时，

$$T\left(r,\frac{1}{S(z)}\right)<r^2,\ m\left(r,P_j\left(e^z\right)+Q_j\left(e^{-z}\right)\right)<r^2,\ m\left(r,\left(P_j\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_j\left(e^{-z}\right)\right)'\right)<r^2. \tag{3.21}$$

由对数导数引理，除去一线测度为有穷的集合 E_2 外，有

$$m\left(r,\frac{\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)=O\left(\log r\right). \tag{3.22}$$

由(3.17)-(3.22)式可知

$$T\left(r,g_1\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_1}\right)+O\left(\log r\right)+O\left(r^2\right)+O\left\{\log\left(rT\left(r,g_1\right)\right)\right\}. \tag{3.23}$$

又当 r 充分大时，

$$O\left\{\log\left(rT\left(r,g_1\right)\right)\right\}\le\frac{1}{2}T\left(r,g_1\right). \tag{3.24}$$

由(3.23) (3.24)式得到，当 $r\notin E_1\cup E_2$ 且 r 充分大时，

$$\frac{1}{2}T\left(r,g_1\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_1}\right)+O\left(r^2\right)+O\left(\log r\right). \tag{3.25}$$

由(3.25)式结合引理 2.1 知，$\overline{\lambda}_2\left(g_1\right)=\sigma_2\left(g_1\right)=\sigma_2\left(f'\right)=\sigma_2\left(f\right)=1$。立刻得到，$\overline{\lambda}_2\left(f'-\varphi\right)=\sigma_2\left(f\right)=1$。

4. 定理 1.2 的证明

假设 f 为方程(1.2)的任一解，由微分方程基本理论易知 f 为整函数。方程(1.2)至多有一个有限级整函数解 f_0。这是因为假设 f_1 为方程(1.2)的另一个有限级整函数解，即 $\sigma\left(f_1\right)<\infty$，则 $\sigma\left(f_1-f_0\right)<\infty$。而 f_1-f_0 为对应的齐次方程(1.1)的解，则与定理 A 矛盾。故方程(1.2)至多有一个有限级例外解 f_0。所以，方程(1.2)的解至多除去一个有限级例外解 f_0，其余任何解 f 有 $\sigma\left(f\right)=\infty$。

接下来证明方程(1.2)的的任一无穷级解 f 有 $\overline{\lambda}\left(f-\varphi\right)=\infty$。令 $g_0=f-\varphi$，那么 $\sigma\left(g_0\right)=\sigma\left(f\right)=\infty$，$\sigma_2\left(g_0\right)=\sigma_2\left(f\right)=1$ 和 $\overline{\lambda}\left(g_0\right)=\overline{\lambda}\left(f-\varphi\right)$。将 $f=g_0+\varphi$ 代入方程(1.2)中，得到

$$g_0^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]g_0^{(k-1)}+\cdots+\left[P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right]g_0=T\left(z\right). \tag{4.1}$$

其中 $T\left(z\right)=R_1\left(e^z\right)+R_2\left(e^{-z}\right)-\left\{\varphi^{(k)}+\left[P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]\varphi^{(k-1)}+\cdots+\left[P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right]\varphi\right\}$。注意到方程(4.1)可能

具有有限级解，但这里仅讨论 $g_0 = f-\varphi$ 为无穷级的解。所以接下来只对方程(4.1)的无穷级解 g_0，计算 $\overline{\lambda}(g_0)$。我们断言 $T(z)\not\equiv 0$，这是因为若 $T(z)$，则易知 $\varphi(\not\equiv f_0)$ 是方程(1.2)的一个有限级非零解，这与之前所知方程(1.2)至多有一个有限级例外解 f_0 矛盾。根据引理 2.2 知，对于方程(4.1)而言，有 $\lambda(g_0)=\overline{\lambda}(g_0)=\sigma(g_0)=\sigma(f)=\infty$。即 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$。

下面证明 $\overline{\lambda}_2(f-\varphi)=\sigma_2(f)=1$。

已证得 $T(z)\not\equiv 0$，由(4.1)式，若 z_0 为 g_0 的 l 阶零点且 $l>k$，则 z_0 必为 $T(z)$ 的 $l-k$ 阶零点，并且有

$$N\left(r,\frac{1}{g_0}\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_0}\right)+N\left(r,\frac{1}{T(z)}\right). \tag{4.2}$$

由(4.1)式两边同除以 $T(z)g_0$ 得到

$$\frac{1}{g_0}=\frac{1}{T(z)}\left(\frac{g_0^{(k)}}{g_0}+\left[P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]\frac{g_0^{(k-1)}}{g_0}+\cdots+\left[P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right]\right). \tag{4.3}$$

所以有

$$m\left(r,\frac{1}{g_0}\right)\le m\left(r,\frac{1}{T(z)}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,P_j\left(e^z\right)+Q_j\left(e^{-z}\right)\right)+\sum_{i=0}^{k}m\left(r,\frac{g_0^{(i)}}{g_0}\right). \tag{4.4}$$

又由对数导数引理，除去一线测度为有穷的集合 E 外，有

$$m\left(r,\frac{g_0^{(i)}}{g_0}\right)=O\left\{\log\left(rT\left(r,g_0\right)\right)\right\}. \tag{4.5}$$

由于 $T(z),P_j+Q_j$ 均为级为 1 的整函数，故当 r 充分大时，

$$m\left(r,T(z)\right)<r^2,\ m\left(r,P_j+Q_j\right)<r^2. \tag{4.6}$$

故，由(4.2)-(4.6)式知，当 $r\notin E$ 且 r 充分大时，

$$T\left(r,g_0\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_0}\right)+O\left(r^2\right)+O\left\{\log\left(rT\left(r,g_0\right)\right)\right\}. \tag{4.7}$$

又当 r 充分大时，

$$O\left\{\log\left(rT\left(r,g_0\right)\right)\right\}\le\frac{1}{2}T\left(r,g_0\right). \tag{4.8}$$

故由(4.7)，(4.8)式知，当 $r\notin E$ 且 r 充分大时，

$$\frac{1}{2}T\left(r,g_0\right)\le k\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_0}\right)+O\left(r^2\right). \tag{4.9}$$

由(4.9)式结合引理 2.1 知 $\sigma_2(g_0)\le\overline{\lambda_2}(g_0)$。故 $\overline{\lambda_2}(g_0)=\sigma_2(g_0)=\sigma_2(f)=1$。所以，$\overline{\lambda_2}(f-\varphi)=\sigma_2(f)=1$。

下面证明 $\overline{\lambda}(f'-\varphi)=\infty$。

假设 f 为方程(1.2)的任一解，那么至多除去一个有限级例外解 f_0，其余任何解 f 有 $\sigma(f)=\infty$。且之前已证得 $\overline{\lambda}(f-\varphi)=\infty$，现在计算 $\overline{\lambda}(f'-\varphi)$。

令 $g_1=f'-\varphi$，那么有 $\sigma(g_1)=\sigma(f')=\sigma(f)=\infty$，$\sigma_2(g_1)=\sigma_2(f')=\sigma_2(f)=1$ 和 $\overline{\lambda}(g_1)=\overline{\lambda}(f'-\varphi)$。对方程(1.2)的两边微分，得到

$$\begin{aligned}&f^{(k+1)}+\left[P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(k)}+\sum_{i=1}^{k-1}\left[\left(P_i\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_i\left(e^{-z}\right)\right)'+P_{i-1}\left(e^z\right)+Q_{i-1}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(i)}\\&+\left[\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right]f=\left(R_1\left(e^z\right)\right)'+\left(R_2\left(e^{-z}\right)\right)'.\end{aligned}\tag{4.10}$$

又由方程(1.2)得到

$$f=-\frac{1}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\left(-R_1\left(e^z\right)-R_2\left(e^{-z}\right)+f^{(k)}+\sum_{i=1}^{k-1}\left[P_i\left(e^z\right)+Q_{ki}\left(e^{-z}\right)\right]f^{(i)}\right).\tag{4.11}$$

将(4.11)式代入(4.10)式得到

$$\begin{aligned}&f^{(k+1)}+\left(P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)-\frac{\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)f^{(k)}\\&+\sum_{i=1}^{k-1}\left(P_{i-1}\left(e^z\right)+Q_{i-1}\left(e^{-z}\right)+\left(P_i\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_i\left(e^{-z}\right)\right)'-\frac{\left[\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right]\left[P_i\left(e^z\right)+Q_i\left(e^{-z}\right)\right]}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)f^{(i)}\\&=\left(R_1\left(e^z\right)\right)'+\left(R_2\left(e^{-z}\right)\right)'-\frac{\left[\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right]\left[R_1\left(e^z\right)+R_2\left(e^{-z}\right)\right]}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

将 $f'=g_1+\varphi, f''=g_1'+\varphi,\cdots$ 代入式(4.12)，得到

$$\begin{aligned}&g_1^{(k)}+\left(P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)-\frac{\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)g_1^{(k-1)}\\&+\sum_{i=0}^{k-2}\left(P_i\left(e^z\right)+Q_i\left(e^{-z}\right)+\left(P_{i+1}\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right)'-\frac{\left[\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right]\left[P_{i+1}\left(e^z\right)+Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right]}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)g_1^{(i)}\\&=-R(z).\end{aligned}\tag{4.13}$$

其中

$$\begin{aligned}R(z)=&\left(R_1\left(e^z\right)\right)'+\left(R_2\left(e^{-z}\right)\right)'-\frac{\left[\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right]\left[R_1\left(e^z\right)+R_2\left(e^{-z}\right)\right]}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}-\varphi^{(k)}\\&-\left(P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)-\frac{\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)\varphi^{(k-1)}\\&-\sum_{i=0}^{k-2}\left(P_i\left(e^z\right)+Q_i\left(e^{-z}\right)+\left(P_{i+1}\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right)'-\frac{\left[\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right]\left[P_{i+1}\left(e^z\right)+Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right]}{P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)}\right)\varphi^{(i)}.\end{aligned}$$

下面证明 $R(z)\not\equiv 0$。假设 $R(z)\equiv 0$，也即

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\left(R_1\left(e^z\right)\right)'+\left(R_2\left(e^{-z}\right)\right)'\right)\left(P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right)-\left(R_1\left(e^z\right)+R_2\left(e^{-z}\right)\right)\left(\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right)\right]\\
&-\left[P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right]\varphi^{(k)}-\left[\left(P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right)\left(P_{k-1}\left(e^z\right)+Q_{k-1}\left(e^{-z}\right)\right)-\left(\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right)\right]\varphi^{(k-1)}\\
&-\sum_{i=0}^{k-2}\left[\left(P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right)\left(P_{i+1}\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right)'+\left(P_0\left(e^z\right)+Q_0\left(e^{-z}\right)\right)\right.\\
&\left.\left(P_i\left(e^z\right)+Q_i\left(e^{-z}\right)\right)-\left(P_{i+1}\left(e^z\right)+Q_{i+1}\left(e^{-z}\right)\right)\left(\left(P_0\left(e^z\right)\right)'+\left(Q_0\left(e^{-z}\right)\right)'\right)\right]\varphi^{(i)}\equiv 0.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

以下分两种情况进行证明：

1) $m_0>\max\left\{m_j: j=1,2,\cdots,k-1\right\}$且$m\neq m_0$，

2) $n_0>\max\left\{n_j: j=1,2,\cdots,k-1\right\}$且$n\neq n_0$。

1) $m_0>\max\left\{m_j: j=1,2,\cdots,k-1\right\}$且$m\neq m_0$时，取 $z=r\left(r\in(0,+\infty)\right)$。

情形 1：若 $m>m_0$，则(4.14)式左边关于 e^z 的最高次项$\left(a_{0m_0}a_m m-a_{0m_0}a_m m_0\right)e^{(m_0+m)r}\equiv 0$。得到 $m=m_0$。这与 $m>m_0$ 矛盾。

情形 2：若 $m<m_0$，则(4.14)式左边关于 e^z 的最高次项 $a_{0m_0}^2 e^{2m_0 r}\equiv 0$。得到 $a_{0m_0}\equiv 0$。这与 $P_0\left(e^z\right)$ 的定义矛盾。

由情形 1，2 可知：$R(z)\not\equiv 0$。

2) $n_0>\max\left\{n_j: j=1,2,\cdots,k-1\right\}$ 且 $n\neq n_0$时，取 $z=-r\left(r\in(0,+\infty)\right)$，接下来的证明方法和 1)一样。由 1)和 2)可知，$R(z)\not\equiv 0$。再结合引理 2.2 可得到$\overline{\lambda}\left(f'-\varphi\right)=\infty$。

下面用证明$\overline{\lambda}_2\left(f-\varphi\right)=\sigma_2\left(f\right)=1$的方法可以同样证明得到$\overline{\lambda}_2\left(f'-\varphi\right)=\sigma_2\left(f\right)=1$。

参考文献 (References)

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] 陈宗煊. 二阶复域微分方程解的不动点与超级[J]. 数学物理学报, 2000, 20(3): 425-432.

[3] Z. X. Chen, S. Kwangho. Subnormal solutions of differential equations with periodic coefficients. Acta Mathematica Scientia, 2010, 30B(1): 75-88.

[4] 徐俊峰, 仪洪勋. 微分方程的解和小函数的关系[J]. 数学学报, 2010, 53(2): 85-90.