Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 91-97
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144114

Hans汉斯

G-期望框架下的指数O-U期权定价模型

江继祥

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年2月26日；录用日期：2024年3月19日；发布日期：2024年4月17日

摘　要

本文基于G-期望空间理论和指数O-U (Ornstein-Uhlenback)过程模型，将指数O-U过程推广到G-期望空间，在股价预期收益率波动的基础上，使模型更加广泛地适用于概率测度还无法确定的情况，推导出G-期望空间下的O-U过程模型的股票价格公式以及期权定价公式，使股票模型更贴近且反映金融市场实际情况。

关键词

随机微分方程，G-伊藤公式，指数O-U过程，非线性期望

Index O-U Option Pricing Model under G-Expectation Framework

Jixiang Jiang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 26th, 2024; accepted: Mar. 19th, 2024; published: Apr. 17th, 2024

Abstract

Based on the G-expectation space theory and the Ornstein-Uhlenback process model, the index O-U process is extended to the G-expectation space. Based on the volatility of stock price expected returns, the model is more widely applicable to situations where probability measures cannot be determined. The stock price formula and option pricing formula of the O-U process model in the G-expectation space are derived, making the stock model closer to and reflecting the actual situation of the financial market.

Keywords

Stochastic Differential Equations, G-Itô Formula, Exponential O-U Process, Nonlinear Expectation

文章引用: 江继祥. G-期望框架下的指数 O-U 期权定价模型[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 91-97.
DOI: 10.12677/pm.2024.144114

1. 引言

股票价格在金融市场中是一种复杂现象，尤其是股票价格波动规律引起了学者们的兴趣。1973 年 Black 和 Scholes [1]利用几何布朗运动构建了期权定价理论。从那时起，B-S 模型就对股票价格波动规律的研究和发展起到了重要作用。此后，学者们[2] [3] [4]基于该模型对其进行了深入的研究。1989 年 Peters [2]提出分形市场假说，充分考虑了资本市场上的股票价格的长期依赖性和自相似性，将模型推广到分数阶形式；后来的 Torres-Hernandez A [3]和 Wang J [4]在此基础上将其推广到 n 维形式的分数阶情况，并使用分数微分算子和提供径向基函数的方法来得到模型的数值解。但是他们都无法跳出 B-S 模型本身的局限，即无法描述预期收益率存在波动的情况。针对这种情况，Perelló J [5]提出的指数 O-U 过程模型很好地解决了这个问题，通过增加一个可变化的指数来模拟波动中的收益率，近年来也有众多学者在此基础上的研究得出了许多进展。Dai L [6]基于指数 Ornstein-Uhlenbeck 模型，过 α 路径的方法，推导出不确定的金融市场的期权定价公式，并讨论了这些期权定价公式的数学性质；Gao Y [7]研究了基于不确定指数 Ornstein-Uhlenbeck 模型的回看看涨期权和看跌期权定价公式，并设计了计算这些价格的算法来验证该模型的有效性。

2007 年，Peng S [8]院士创造性地提出了非线性期望即 G-期望理论，直接对不确定量——随机变量来定义其非线性期望泛函，形成了一套可以在概率模型本身还没有确定的情形下，就可以对各种风险进行文件的定量分析和计算的数学理论，在短短十几年时间中就受到了金融数学和随机控制领域的广泛认可、并被大范围应用。Avellaneda，Lévy 和 Parás [9]提出了一类不受控制的波动率不确定模型，在 G-期望框架下这类模型能够很好地处理，能更加广泛地将模型推广到概率测度无法确定的情况。在 G-期望理论进展的直接推动下，经济学界在这个方向也获得了非常重要的进展，Epstein L G 和 Ji S [10]提出了一个连续时间框架的效用模型，在 G-期望理论的基础上对漂移和波动的模糊性建模，捕捉了决策者对模糊性或模型不确定性的关注，对资产定价理论中一些基本结果也做出了相应扩展。目前，随着 G-伊藤公式、G-鞅理论、G-倒向随机微分方程理论等的不断提出，G-期望框架日趋完善。目前已有许多学者将 G-期望理论与股票期权模型相结合，陆允生[11]利用 G-几何布朗运动描述标的资产的价格变动，进而得到带有常数红利率的欧式看涨期权和欧式看涨幂期权的动态定价公式；王瑶[12]将经典的亚式期权定价题植入到 G 期望架下，重新研究得到了 G-期望框架下的亚式期权定价公式及复制策略，但他们仍无法跳出经典的 Black-Scholes 模型自身的局限性。而将指数 O-U 模型与 G-期望理论相结合，得出的 G-框架下的指数 O-U 股票和期权定价模型将是一个十分有效的方法。

本文在 G-框架下首先利用 G-伊藤公式得出了指数 O-U 过程模型下的股票价格 S_t，并利用 G-期望的单调性、保常性、正齐性以及 G-Girsanov 定理、G-Hölder 不等式得出了指数 O-U 过程模型下的股票期权定价公式，与真实的金融市场更加贴近。

2. 预备知识(G-随机分析)

本文中作者将研究在 G 框架下的指数 O-U 模型，并将沿用文献[13]中对 G-随机分析的相关定义。对于 G-框架下，我们有如下引理。

定义 2.1 (G-布朗运动平方变差过程):

我们定义一个经典情形：设 $\pi_t^N\ (N=1,2,\cdots)$ 为一个区间[0, t]的一个满足 $\left|\pi_t^N\right|\to 0$ 的分割的序列，很容易证明：

$$\langle B\rangle_t=\lim_{\mu\left(\pi_t^N\right)\to 0}\sum_{j=0}^{N-1}\left(B_{t_{j+1}^N}-B_{t_j^N}\right)^2=B_t^2-2\int_0^t B_s\mathrm{d}B_s$$

其中 $\left(\langle B\rangle_t\right)_{t\ge 0}$ 是一个增过程，且 $\langle B\rangle_0=0$，我们称 $\langle B\rangle$ 为 G-布朗运动的平方变差过程。

引理 2.1 (G-伊藤公式):

我们用 B_t 表示 m 维 G 布朗运动。设 $\Phi\in C^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ 是有界的，并且 $\partial_{x^v}\Phi,\partial^2_{x^\mu x^v}\Phi\in C_{b.lip}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 是一致的李普希茨函数，其中 $\mu,v=1,\cdots,n$.假设 $s\in[0,T]$，且 $X=\left(X^1,\cdots,X^n\right)^{\mathrm{T}}$ 是一个在 $[s,T]$ 上的 n 维过程，形式如下：

$$X_t^v=X_s^v+\alpha^v(t-s)+\eta^{vij}\left(\left\langle B^i,B^j\right\rangle_t-\left\langle B^i,B^j\right\rangle_s\right)+\beta^{vj}\left(B_t^i,B_s^j\right),$$

其中 $v=1,\cdots,n,\ i,j=1,\cdots,d,\ \alpha,\eta^{vij},\beta^{vj}$ 是 $L_G^2\left(\Omega_s\right)$ 上的有界元素， $X_s=\left(X_s^1,\cdots,X_s^n\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $L_G^2\left(\Omega_s\right)$ 上给定的随机向量，由此我们得到：

$$\begin{aligned}\Phi\left(X_t\right)-\Phi\left(X_s\right)=&\int_s^t\partial_{x^v}\Phi\left(X_u\right)\beta^{vj}\mathrm{d}B_u^j+\int_s^t\partial_{x^v}\Phi\left(X_u\right)\alpha^v\mathrm{d}u\\&+\int_s^t\left[\partial_{x^v}\Phi\left(X_u\right)\eta^{vij}+\frac{1}{2}\partial^2_{x^\mu x^v}\Phi\left(X_u\right)\beta^{\mu i}\beta^{vj}\right]\mathrm{d}\left\langle B^i,B^j\right\rangle_u\end{aligned}$$

引理 2.2 (G 框架下的 Girsanov 定理):

令 $H(s,\omega)\in M_G^2(0,T)$，定义 $\varepsilon\left(B_t\right)=\exp\left\{\int_0^t H(s,\omega)\mathrm{d}B_s-\frac{1}{2}\int_0^t H^2(s,\omega)\mathrm{d}\langle B\rangle_s\right\}$，并对任意的 $X\in Lip(\mathcal{F})$，定义 $\tilde{E}_G[X]=E_G\left[\varepsilon\left(B_T\right)X\right]$，$\tilde{E}_G\left[X\mid\mathcal{F}_t\right]=\left[\varepsilon\left(B_t\right)\right]^{-1}E_G\left[\varepsilon\left(B_T\right)X\mid\mathcal{F}_t\right]$，若存在 $\delta_0>0$ 使得 $E_G\left[\left(\frac{1}{2}+\delta_0\right)\exp\left\{\int_0^T H^2(s,\omega)\mathrm{d}\langle B\rangle_s\right\}\right]<\infty$，可知 $B_t-\int_0^t H(s,\omega)\mathrm{d}\langle B\rangle_S$ 为 $\tilde{E}_G$ 下的 G 布朗运动。

引理 2.3 (G-框架下的伊藤等距公式)

对任意的 $\eta\in M_G^2(0,T)$，有：

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\eta(s)\mathrm{d}B_s^a\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T\eta^2(s)\mathrm{d}\left\langle B^a\right\rangle_s\right]$$

引理 2.4 (G-期望框架下的 Hölder 不等式)

对任意的 $\xi,\eta\in X,\ p>1,\ q>1$ 以及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，我们有：

$$\mathbb{E}|\xi\eta|\le\left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}|\eta|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

引理 2.5 若 $\eta,\theta\in M_G^2(0,T)$， $0\le s\le r\le t\le T$ ，则有：

1) $\int_s^t\eta_u\mathrm{d}B_u=\int_s^r\eta_u\mathrm{d}B_u+\int_r^t\eta_u\mathrm{d}B_u$ ；

2) $\int_s^t\left(\alpha\eta_u+\theta_u\right)\mathrm{d}B_u=\alpha\int_s^t\eta_u\mathrm{d}B_u+\int_s^t\theta_u\mathrm{d}B_u$，其中 α 有界，且 $\alpha\in L_G^1\left(\mathcal{F}_t\right)$；

3) $E_G\left[X+\int_t^T\eta_u\mathrm{d}B_u\mid\mathcal{F}_t\right]=E_G\left[X\mid\mathcal{F}_t\right]$。

3. G-指数 O-U 模型下的股票价格

G 期望空间上的股价波动的指数 Ornstein-Uhlenbeck 过程模型：

$$dS_t = \mu(1-c\ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dB_t + \eta S_t d\langle B\rangle_t \tag{1}$$

其中：μ 预期收益率，c 为预期收益率变化系数，σ,η 为波动率。

定理 3.1 如果股票价格 S_t 满足(1)式，则：

$$S_t = S_0 \exp\left[\frac{1}{c} + e^{-\mu ct}\left(\sigma\int_0^t e^{\mu cs}dB_s + \left(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t e^{\mu cs}d\langle B\rangle_s\right)\right]. \tag{2}$$

证明：对(1)式，应用 G-Itô 公式得：

$$\begin{aligned} d\ln S_t &= \left[\frac{1}{S_t}\cdot\mu(1-c\ln S_t)S_t\right]dt + \frac{1}{S_t}\sigma S_t dB_t + \left[\frac{1}{S_t}\eta S_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right]d\langle B\rangle_t \\ &= \mu(1-c\ln S_t)dt + \sigma dB_t + \left[\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\right]d\langle B\rangle_t. \end{aligned}$$

取 $k=\mu c, m=\eta-\frac{1}{2}\sigma^2, X_t=\ln S_t$，则上式变为：

$$\begin{aligned} &dX_t = (\mu - kX_t)dt + \sigma dB_t + m d\langle B\rangle_t, \\ &d\left(e^{kt}X_t\right) = \left[ke^{kt}X_t + e^{kt}(\mu - kX_t)\right]dt + e^{kt}\sigma dB_t + \left(e^{kt}m + 0\right)d\langle B\rangle_t, \\ &X_t = \frac{\mu}{k} + e^{-kt}\left(\sigma\int_0^t e^{ks}dB_s + m\int_0^t e^{ks}d\langle B\rangle_s\right), \\ &S_t = S_0\exp\left[\frac{1}{c} + e^{-\mu ct}\left(\sigma\int_0^t e^{\mu cs}dB_s + \left(\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t e^{\mu cs}d\langle B\rangle_s\right)\right]. \end{aligned}$$

4. G-指数 O-U 模型下的股票期权定价

假设期满日时刻的价值为 $u(S_t,t)$，我们在时间间隔 $[0,T]$ 上定义一个统一的时间分区。对于 $0\le n\le N$，令 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n<\cdots<t_N=T$，$\Delta t = t_{n+1}-t_n$。令函数 $u(S_t,t)$ 是足够光滑的，$\Delta\langle B\rangle_n = \langle B\rangle_{t_{n+1}} - \langle B\rangle_{t_n}$ 和 $\Delta B_n = B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$。

我们有期权定价公式[14]：

$$u(S_a,t_n) = \frac{1}{\rho}\mathbb{E}\left(\left[u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right) - u(S_n,t_n)\right] \mid S_{t_n} = S_a\right) + \frac{1}{\rho}u(S_a,t_n), \tag{3}$$

其中 $\rho = 1 + r\Delta t$，r 是无风险利率。

定理 4.1 G-指数 O-U 模型下的股票期权定价 $u(S_t,t)\in C_b^{4,2}$ (u 关于 S_t 连续四阶导数有界，关于 t 二阶偏导数有界)满足如下方程：

$$ru = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial S}S_a\left[-\mu c\left(\ln S_a - \ln S_0 - \frac{1}{c}\right)\right] + 2G\left[\frac{\partial u}{\partial S}S_a\left(me^{-\mu ct_{n+1}} + \sigma^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}S_a^2\sigma^2\right] \tag{4}$$

证明：用泰勒公式展开 $u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)$ 得：

$$u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right) - u(S_a,t_n) = \frac{\partial u(S_a,t_n)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial u(S_a,t_n)}{\partial S}\left(S_{t_{n+1}} - S_a\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(S_a,t_n)}{\partial S^2}\left(S_{t_{n+1}} - S_a\right)^2 + R_u^n,$$

其中：

$$\begin{aligned} R_u^n = &\frac{1}{2}(\Delta t)^2\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(S_a + \lambda\left(S_{t_{n+1}} - S_a\right), t_n + \lambda\Delta t\right)d\lambda \\ &+ \Delta t\left(S_{t_{n+1}} - S_a\right)\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial S}\left(S_a + \lambda\left(S_{t_{n+1}} - S_a\right), t_n + \lambda\Delta t\right)d\lambda \\ &+ \frac{1}{6}\left(S_{t_{n+1}} - S_a\right)^3\int_0^1 \frac{\partial^3 u}{\partial S^3}\left(S_a + \lambda\left(S_{t_{n+1}} - S_a\right), t_n + \lambda\Delta t\right)d\lambda. \end{aligned}$$

则有

$$u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u\left(S_a,t_n\right)=\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^2}\left(S_{t_{n+1}}-S_a\right)^2+O\left(\Delta t\right)^{\frac{3}{2}}.$$

我们令

$$S_{t_{n+1}}-S_a=S_0\exp\left\{Y^{n+1}\right\}-S_0\exp\left\{Y^n\right\}=S_a\left(\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1\right)$$

此时

$$\begin{aligned}u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u\left(S_a,t_n\right)=&\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left(\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1\right)\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^2}\left(S_a\right)^2\left(\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1\right)^2+O\left(\Delta t\right)^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

其中

$$Y^n=\frac{1}{c}+\mathrm{e}^{-\mu c t_n}\left[\sigma\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right],$$

$$Y^{n+1}=\frac{1}{c}+\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}\left[\sigma\int_0^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_0^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right],$$

$$\begin{aligned}Y^{n+1}-Y^n=&\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}\left[\sigma\int_0^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_0^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right]\\&-\mathrm{e}^{-\mu c t_n}\left[\sigma\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right]\\=&\left(\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}-\mathrm{e}^{-\mu c t_n}\right)\left[\sigma\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right]\\&+\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}\left[\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right].\end{aligned}$$

因为

$$\Delta B_n=B_{t_{n+1}}-B_{t_n},\ \Delta\left\langle B\right\rangle_n=\left\langle B\right\rangle_{t_{n+1}}-\left\langle B\right\rangle_{t_n},$$

$$\sigma\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s=\left(\ln S_a-\ln S_0-\frac{1}{c}\right)\mathrm{e}^{\mu c t_n},$$

所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}\left[\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right]\\&=\mathrm{e}^{-\mu c\Delta t}\left[\sigma\Delta B_n+m\left\langle B\right\rangle_n\right]+\sigma\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\{\left(s-t_n\right)\int_0^1\mathrm{e}^{\mu c\left(t_n+\lambda\left(s-t_n\right)\right)}\mathrm{d}\lambda\right\}\mathrm{d}B_s\\&\quad+m\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left\{\left(s-t_n\right)\int_0^1\mathrm{e}^{\mu c\left(t_n+\lambda\left(s-t_n\right)\right)}\mathrm{d}\lambda\right\}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Y^{n+1}-Y^n\\&=\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}\left[\sigma\int_0^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_0^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right]-\mathrm{e}^{-\mu c t_n}\left[\sigma\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_0^{t_n}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right]\\&=\left(\mathrm{e}^{-\mu c\Delta t}-1\right)\left(\ln S_a-\ln S_0-\frac{1}{c}\right)+\mathrm{e}^{-\mu c t_{n+1}}\left[\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\left\langle B\right\rangle_s\right]\end{aligned}$$

对于

$$u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u\left(S_a,t_n\right)=\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left(\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1\right)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^2}\left(S_a\right)^2\left(\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1\right)^2+O\left(\Delta t\right)^{\frac{3}{2}}$$

取 $\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left(\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1\right)$ 为部分 I，$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^2}\left(S_a\right)^2\left(\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1\right)^2$ 为部分 II。由 $\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1$ 的泰勒展开可得：

$$\exp\left\{Y^{n+1}-Y^n\right\}-1=\left(Y^{n+1}-Y^n\right)+\frac{1}{2}\left(Y^{n+1}-Y^n\right)^2+\frac{1}{6}\mathrm{e}^{\theta\left(Y^{n+1}-Y^n\right)}\left(Y^{n+1}-Y^n\right)^3$$

其中 $Y^{n+1}-Y^n=\left(\mathrm{e}^{-\mu c\Delta t}-1\right)\left(\ln S_a-\ln S_0-\frac{1}{c}\right)+\mathrm{e}^{-\mu ct_{n+1}}\left[\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\langle B\rangle_s\right]$

此时：

$$\mathrm{I}=\mathbb{E}\left[\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left(\mathrm{e}^{-\mu c\Delta t}-1\right)\left(\ln S_a-\ln S_0-\frac{1}{c}\right)\right.$$
$$\left.+\mathrm{e}^{-\mu ct_{n+1}}\left[\sigma\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s+m\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}\langle B\rangle_s\right]+\mathrm{e}^{-2\mu ct_{n+1}}\sigma^2\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s\right)^2\right]$$

将 $\mathrm{e}^{-\mu cs}$ 在 t_n 处展开，$\mathrm{e}^{-\mu cs}=\mathrm{e}^{-\mu ct_n}+\mathrm{e}^{-\mu ct_n}\left(s-t_n\right)+R_n$

此时：

$$\mathrm{I}=\mathbb{E}\left[\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left[-\mu c\Delta t\left(\ln S_a-\ln S_0-\frac{1}{c}\right)+\mathrm{e}^{-\mu ct_{n+1}}\left[\mathrm{e}^{-\mu ct_n}\left(\sigma\Delta B_n+m\Delta\langle B\rangle_s\right)\right]\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mathrm{e}^{-2\mu ct_{n+1}}\sigma^2\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu ct_n}+\mathrm{e}^{\mu ct_n}\left(S-t_n\right)\mathrm{d}B_s\right)^2\right]\right]$$
$$=\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left[-\mu c\Delta t\left(\ln S_a-\ln S_0-\frac{1}{c}\right)\right]$$
$$+2G\left[\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left(m\mathrm{e}^{-\mu ct_{n+1}}+\mathrm{e}^{-2\mu c\Delta t}\sigma^2\right)\right]\Delta t$$

对部分 II：

$$\mathrm{II}=\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^2}S_a^2\mathrm{e}^{-2\mu c\Delta t}\sigma^2\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}}\mathrm{e}^{\mu cs}\mathrm{d}B_s\right)^2\right]$$
$$=2G\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^2}S_a^2\mathrm{e}^{-2\mu c\Delta t}\sigma^2\right)\Delta t$$

因此：

$$u\left(S_a,t_n\right)=\frac{1}{\rho}\mathbb{E}\left(\left[u\left(S_{t_{n+1}},t_{n+1}\right)-u\left(S_n,t_n\right)\right]\mid S_{t_n}=S_a\right)+\frac{1}{\rho}u\left(S_a,t_n\right)$$
$$=\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left[-\mu c\Delta t\left(\ln S_a-\ln S_0-\frac{1}{c}\right)\right.\right.$$
$$+2G\left[\frac{\partial u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S}S_a\left(m\mathrm{e}^{-\mu ct_{n+1}}+\mathrm{e}^{-2\mu c\Delta t}\sigma^2\right)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u\left(S_a,t_n\right)}{\partial S^2}S_a^2\mathrm{e}^{-2\mu c\Delta t}\sigma^2\right]\Delta t\right\}+\frac{1}{\rho}u\left(S_a,t_n\right)+O\left(\Delta t\right)^{\frac{3}{2}}$$

令 $\Delta t \to 0$ 得：

$$ru = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial S} S_a \left[-\mu c \left(\ln S_a - \ln S_0 - \frac{1}{c} \right) \right] + 2G \left[\frac{\partial u}{\partial S} S_a \left(m e^{-\mu ct} + \sigma^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} S_a^2 \sigma^2 \right]$$

定理 4.1 得证。

5. 结论

本文研究了在 G-框架下的指数 O-U 模型，给出了股票价格 S_t 与期权定价 $u(S_t, t)$ 的表达式，并给出了严格的证明。相较于传统的 B-S 模型，本文给出的模型能够更好地适用于预期收益率存在波动的情况，并且使模型更加广泛地适用于概率测度还无法确定的情况，是彭院士提出的 G-期望空间理论的又一实际应用，更贴合真实的股票市场。

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. https://doi.org/10.1086/260062

[2] Peters, E.E. (1989) Fractal Structure in the Capital Markets. *Financial Analysts Journal*, **45**, 32-37. https://doi.org/10.2469/faj.v45.n4.32

[3] Torres-Hernandez, A., Brambila-Paz, F. and Torres-Martínez, C. (2021) Numerical Solution Using Radial Basis Functions for Multidimensional Fractional Partial Differential Equations of Type Black-Scholes. *Computational and Applied Mathematics*, **40**, Article No. 245. https://doi.org/10.1007/s40314-021-01634-z

[4] Wang, J., Wen, S., Yang, M. and Shao, W. (2022) Practical Finite Difference Method for Solving Multi-Dimensional Black-Scholes Model in Fractal Market. *Chaos, Solitons & Fractals*, **157**, Article ID: 111895. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111895

[5] Perelló, J., Sircar, R. and Masoliver, J. (2008) Option Pricing under Stochastic Volatility: The Exponential Ornstein-Uhlenbeck Model. *Journal of Statistical Mechanics*: *Theory and Experiment*, **6**, P06010. https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/06/P06010

[6] Dai, L., Fu, Z. and Huang, Z. (2017) Option Pricing Formulas for Uncertain Financial Market Based on the Exponential Ornstein-Uhlenbeck Model. *Journal of Intelligent Manufacturing*, **28**, 597-604. https://doi.org/10.1007/s10845-014-1017-1

[7] Gao, Y., Yang, X. and Fu, Z. (2018) Lookback Option Pricing Problem of Uncertain Exponential Ornstein-Uhlenbeck Model. *Soft Computing*, **22**, 5647-5654. https://doi.org/10.1007/s00500-017-2558-y

[8] Peng, S. (2007) G-Expectation, G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus of Itô Type. *Stochastic Analysis and Applications*, **2**, 541-567. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70847-6_25

[9] Avellaneda, M., Levy, A. and Parás, A. (1995) Pricing and Hedging Derivative Securities in Markets with Uncertain Volatilities. *Applied Mathematical Finance*, **2**, 73-88. https://doi.org/10.1080/13504869500000005

[10] Epstein, L.G. and Ji, S. (2013) Ambiguous Volatility and Asset Pricing in Continuous Time. *The Review of Financial Studies*, **26**, 1740-1786. https://doi.org/10.1093/rfs/hht018

[11] 陆允生, 刘莹莹. 由 G-布朗运动驱动的某些欧式期权的定价[J]. 苏州科技学院学报(自然科学版), 2014, 31(3): 6-9.

[12] 王瑶. G-期望下的比较定理与亚式期权定价问题的研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京理工大学, 2018.

[13] Peng, S. (2008) Multi-Dimensional G-Brownian Motion and Related Stochastic Calculus under G-Expectation. *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 2223-2253. https://doi.org/10.1016/j.spa.2007.10.015

[14] Hu, M., Ji, S. and Xue, X. (2019) The Existence and Uniqueness of Viscosity Solution to a Kind of Hamilton-Jacobi-Bellman Equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **57**, 3911-3938. https://doi.org/10.1137/18M1231833