Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 107-113
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144116

Hans汉斯

一类二阶微分方程边值问题解的相似结构

何荣娇，郑鹏社，蒋廷荣

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年2月27日；录用日期：2024年3月21日；发布日期：2024年4月17日

摘 要

通过分析一类二阶微分方程边值问题解的表达式，发现此边值问题的解的表达式都呈现连分式乘积形式，是由六个引解函数组成的相似核函数和左边界条件系数构造而成。由此得到求解该类边值问题的相似结构解的相似构造法，并对一个具体的二阶微分方程边值问题进行求解。该方法降低了求解难度，得到的解表达式简洁明了，更能清晰地反映各个参数对解的影响。

关键词

二阶微分方程，边值问题，相似构造法，相似核函数

Similar Structure of Solutions to a Class of Second-Order Differential Equation Boundary Value Problems

Rongjiao He, Pengshe Zheng, Tingrong Jiang

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Feb. 27th, 2024; accepted: Mar. 21st, 2024; published: Apr. 17th, 2024

Abstract

By analysing the expressions of the solutions of a class of second-order differential equation boundary value problems, it is found that the expressions of the solutions of this boundary value problem are all in the form of a continuous fractional product, which is constructed by the similar kernel function consisting of six induced solution functions and the left boundary condition coefficients. As a result, the similar construction method for solving similarly structured solutions of this class of boundary value problem is obtained, and a specific second-order differential equation boundary value problem is solved. The method reduces the difficulty of the solution, and the ob-

文章引用: 何荣娇, 郑鹏社, 蒋廷荣. 一类二阶微分方程边值问题解的相似结构[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 107-113.
DOI: 10.12677/pm.2024.144116

tained solution expression is concise and more clearly reflects the influence of each parameter on the solution.

Keywords

Second-Order Differential Equation, Boundary Value Problem, Similar Construction Method, Similar Kernel Functions

1. 引言

随着社会的发展，许多工程技术和应用科学领域中的实际问题被转化为微分方程边值问题进行解决。例如，在石油工程的研究中，各种油藏渗流模型(如多层油藏[1]、双渗油藏[2]、复合油藏[3]、双孔复合油藏[4]、均质油藏[5])的求解都被转化为各类微分方程边值问题的求解，因而各类微分方程的边值问题的求解就显得极为重要。李顺初[6]在研究一类二阶常微分边值问题时，通过分析其解的结构，提出了相似构造法求解此类边值问题的解。随后，学者们开始在各种二阶常微分方程(如 Bessel 方程[7]、变型 Bessel 方程[8]、Airy 方程[9]、连带 Legendre 方程[10]、复合型变型 Bessel 方程[11]、复合 Hermit 方程[12])的某类边值问题中尝试应用相似构造法，并取得了许多显著的成果，但远远还未达到完善。

在实际油藏中，油藏的外边界条件具有弹性[13] [14] [15]，但是以往研究者总是局限于三种理想的外边界条件，故以往研究还不能完全满足实际应用的需求，有待进一步地发展和后续的不断探索。基于以上原因，本文探讨了一类二阶微分方程边值问题解的问题，通过对其解表达式的分析和观察，构造了由六个引解函数组成的相似核函数，提出了该类边值问题解的相似结构法，并且得到了边值问题解的相似结构式。对于上述研究的边值问题，常见的求解方法待定系数法、差分法、格林函数法、分离变量法等运算过程相对复杂，而相似构造法简化了运算过程，只需通过简单组装由六个引解函数组成的相似核函数和左边界条件系数即可获得边值问题的解。本文针对一类二阶微分方程边值问题解的研究拓展了可解二阶微分方程边值问题的范围，并为解决计算机仿真、石油工程勘测等实际工程问题奠定了相应的理论基础。解的相似构造法极大地降低了求解难度和计算时间，得到的解表达式简洁明了，为求解工程模型提供了一种简单、实用的新方法。

2. 主要定理

本文研究如下的一类二阶微分方程的边值问题，即

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial^2 y(x,z)}{\partial x^2}+Ax\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}-B(z)x^C y(x,z)=0,\quad x>a,z>0, \\ \left[Ey(x,z)+(M+EF)\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=a}=D, \\ \left[(Gx+H)y(x,z)+Q\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial z}+x\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=b}=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 A,C,D,E,F,M,G,H,Q,a,b 均为实数，且 $C\neq 0, D\neq 0, 0<a<b$。

定理 1 若边值问题(1)有唯一解，则解为如下连分式乘积形式

$$y(x,z)=D\cdot\frac{1}{E+\dfrac{M}{F+\Phi(a,z)}}\cdot\frac{1}{F+\Phi(a,z)}\cdot\Phi(x,z), \tag{2}$$

其中 $\Phi(x,z)$ 称为解 y 的相似核函数

$$\Phi(x,z)=\frac{(Gb+H)\varphi_{0,0}(x,b,z)+Q\varphi_{0,1}^{*}(x,b,z)+b\varphi_{0,1}(x,b,z)}{(Gb+H)\varphi_{1,0}(a,b,z)+Q\varphi_{1,1}^{*}(a,b,z)+b\varphi_{1,1}(a,b,z)} \tag{3}$$

其中 $\varphi_{0,0}(x,\xi,z),\varphi_{0,1}(x,\xi,z),\varphi_{1,0}(x,\xi,z),\varphi_{1,1}(x,\xi,z),\varphi_{0,1}^{*}(x,\xi,z),\varphi_{1,1}^{*}(x,\xi,z)$ 称为引解函数，具体公式如下

$$\varphi_{0,0}(x,\xi,z)=y_1(x,z)y_2(\xi,z)-y_2(x,z)y_1(\xi,z), \tag{4}$$

$$\varphi_{0,1}(x,\xi,z)=y_1(x,z)\frac{\partial y_2(\xi,z)}{\partial x}-y_2(x,z)\frac{\partial y_1(\xi,z)}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\varphi_{1,0}(x,\xi,z)=\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}y_2(\xi,z)-\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}y_1(\xi,z), \tag{6}$$

$$\varphi_{1,1}(x,\xi,z)=\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\frac{\partial y_2(\xi,z)}{\partial x}-\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\frac{\partial y_1(\xi,z)}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\varphi_{0,1}^{*}(x,\xi,z)=y_1(x,z)\frac{\partial y_2(\xi,z)}{\partial z}-y_2(x,z)\frac{\partial y_1(\xi,z)}{\partial z}, \tag{8}$$

$$\varphi_{1,1}^{*}(x,\xi,z)=\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\frac{\partial y_2(\xi,z)}{\partial z}-\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\frac{\partial y_1(\xi,z)}{\partial z}. \tag{9}$$

证明 边值问题(1)中的定解方程

$$x^2\frac{\partial^2 y(x,z)}{\partial x^2}+Ax\frac{\partial y(x,z)}{\partial x}-B(z)x^C y(x,z)=0 \tag{10}$$

的通解[16]为：

$$y(x,z)=C_1y_1(x,z)+C_2y_2(x,z). \tag{11}$$

其中 C_1、C_2 为任意常数，$y_1(x,z)$、$y_2(x,z)$ 为方程(10)的两个线性无关解。

由 $\left.\left[Ey(x,z)+(M+EF)\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\right|_{x=a}=D$ 得

$$C_1\left[Ey_1(a,z)+(M+EF)\frac{\partial y_1(a,z)}{\partial x}\right]+C_2\left[Ey_2(a,z)+(M+EF)\frac{\partial y_2(a,z)}{\partial x}\right]=D. \tag{12}$$

由 $\left.\left[(Gx+H)y(x,z)+Q\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial z}+x\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\right|_{x=b}=0$ 得

$$\begin{aligned}&C_1\left[(Gb+H)y_1(b,z)+Q\frac{\partial y_1(b,z)}{\partial z}+b\frac{\partial y_1(b,z)}{\partial x}\right]\\&+C_2\left[(Gb+H)y_2(b,z)+Q\frac{\partial y_2(b,z)}{\partial z}+b\frac{\partial y_2(b,z)}{\partial x}\right]=0.\end{aligned} \tag{13}$$

由于边值问题(1)的解存在且唯一，联立式(12)和式(13)，得到的关于待定系数 C_1、C_2 的线性方程组的系数矩阵 $\Delta\neq0$，且

$$\Delta = E\left[(Gb+H)\varphi_{0,0}(a,b,z)+Q\varphi_{0,1}^{*}(a,b,z)+b\varphi_{0,1}(a,b,z)\right] \\ +(M+EF)\left[(Gb+H)\varphi_{1,0}(a,b,z)+Q\varphi_{1,1}^{*}(a,b,z)+b\varphi_{1,1}(a,b,z)\right]. \tag{14}$$

根据 Cramer 法则得到

$$C_1 = \frac{D\left[(Gb+H)y_2(b,z)+Q\dfrac{\partial y_2(b,z)}{\partial z}+b\dfrac{\partial y_2(b,z)}{\partial x}\right]}{\Delta}, \tag{15}$$

$$C_2 = -\frac{D\left[(Gb+H)y_1(b,z)+Q\dfrac{\partial y_1(b,z)}{\partial z}+b\dfrac{\partial y_1(b,z)}{\partial x}\right]}{\Delta}. \tag{16}$$

将 C_1 和 C_2 代入式(11)得到

$$y(x,z) = D\cdot\frac{(Gb+H)\varphi_{0,0}(x,b,z)+Q\varphi_{0,1}^{*}(x,b,z)+b\varphi_{0,1}(x,b,z)}{\Delta}. \tag{17}$$

结合相似核函数整理，即得到边值问题(1)的解为

$$y(x,z) = D\cdot\frac{1}{E+\dfrac{M}{F+\Phi(a,z)}}\cdot\frac{1}{F+\Phi(a,z)}\cdot\Phi(x,z). \tag{18}$$

即为式(2)。

在实际工程问题的分析时，常常用到以下推论：

推论 1 对于边值问题(1)，若内边界条件是 $\left[\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Big|_{x=a}=1$ 有

$$y(x,z) = \Phi(x,z). \tag{19}$$

推论 2 对于边值问题(1)，在 $x=a$ 处时有

$$\left[y(x,z)+F\frac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Big|_{x=a} = D\cdot\frac{1}{E+\dfrac{M}{F+\Phi(a,z)}}. \tag{20}$$

3. 相似构造法的求解步骤

根据上面的论述，可将相似构造法求解边值问题(1)的步骤归纳如下：

第一步构造引解函数

根据所给二阶微分方程边值问题中定解方程类型，得到定解方程的两个线性无关解 $y_1(x,z)$、$y_2(x,z)$，并利用其构造得到引解函数 $\varphi_{0,0}(x,\xi,z)$、$\varphi_{0,1}(x,\xi,z)$、$\varphi_{1,0}(x,\xi,z)$、$\varphi_{1,1}(x,\xi,z)$、$\varphi_{0,1}^{*}(x,\xi,z)$、$\varphi_{1,1}^{*}(x,\xi,z)$，即式(4)~(9)。

第二步构造相似核函数

利用六个引解函数和右边界条件 $\left[(Gx+H)y(x,z)+Q\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial z}+x\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Big|_{x=b}=0$ 中的系数 G,H,Q 构造相似核函数 $\Phi(x,z)$，即式(3)；并计算 $\Phi(a,z)$ 的值。

第三步构造相似结构解

根据第二步得到的相似核函数$\Phi(x,z)$，$\Phi(a,z)$和左边界条件$\left.\left[Ey(x,z)+(M+EF)\frac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\right|_{x=a}=D$中的系数$E,F,M,D$组装得到边值问题的相似结构解，即式(2)。

4. 应用举例

求解如下具体的边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y(x,z)}{\partial x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}-\left(z^3+2z^2+3z+\dfrac{1}{z}\right)y(x,z)=0,\ \ x>a,z>0,\\ \left.\left[2y(x,z)+(2+6)\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\right|_{x=1}=D,\\ \left.\left[(3x+2)y(x,z)+7\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial z}+x\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\right|_{x=2}=0,\end{cases} \tag{21}$$

通过对比分析边值问题(21)和边值问题(1)可得$A=1,C=2,D=6,E=2,F=3,M=2,$
$M=2,G=3,H=2,Q=7,a=1,b=2,B(z)=f(z)=z^3+2z^2+3z+\frac{1}{z}$，接下来利用相似构造法进行求解。

对于边值问题(21)，$I_0\left(x\sqrt{f(z)}\right),K_0\left(x\sqrt{f(z)}\right)$是边值问题中定解方程
$\frac{\partial^2 y(x,z)}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial y(x,z)}{\partial x}-\left(z^3+2z^2+3z+\frac{1}{z}\right)y(x,z)=0$的2个线性无关解。

第一步，构造引解函数

为了简化引解函数，我们引用以下函数

$$\psi_{m,n}(x,y,z)=K_m(xz)I_n(yz)+(-1)^{m-n+1}I_m(xz)K_n(yz), \tag{22}$$

其中$K_l(\cdot)$和$I_l(\cdot)$分别为l阶第二类和第一类变型Bessel函数，x,y和z为实变量，m和n为实常数。根据式(4)~(9)利用2个线性无关解构造引解函数，即

$$\varphi_{0,0}(x,2,z)=\psi_{0,0}\left(x,2,\sqrt{f(z)}\right), \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}^{*}(x,2,z)&=\frac{1}{\sqrt{f(z)}}\frac{\partial f(z)}{\partial z}\psi_{0,1}\left(x,2,\sqrt{f(z)}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{f(z)}}\left(3z^2+4z+3-\frac{1}{z^2}\right)\psi_{0,1}\left(x,2,\sqrt{f(z)}\right),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\varphi_{0,1}(x,2,z)=\sqrt{f(z)}\psi_{0,1}\left(x,2,\sqrt{f(z)}\right), \tag{25}$$

$$\varphi_{1,0}(1,2,z)=-\sqrt{f(z)}\psi_{1,0}\left(1,2,\sqrt{f(z)}\right), \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1,1}^{*}(1,2,z)&=-\frac{\partial f_i(z)}{\partial z}\psi_{1,1}\left(1,2,\sqrt{f(z)}\right)\\&=-\left(3z^2+4z+3-\frac{1}{z^2}\right)\psi_{1,1}\left(1,2,\sqrt{f(z)}\right),\end{aligned} \tag{27}$$

$$\varphi_{1,1}(1,2,z)=-f(z)\psi_{1,1}\left(1,2,\sqrt{f(z)}\right). \tag{28}$$

第二步，构造相似核函数

由于 $G=3, H=2, Q=7, b=2$，根据式(3)可以得到相似核函数，即

$$\Phi(x,z)=\frac{8\varphi_{0,0}(x,2,z)+7\varphi_{0,1}^{*}(x,2,z)+2\varphi_{0,1}(x,2,z)}{8\varphi_{1,0}(1,2,z)+7\varphi_{1,1}^{*}(1,2,z)+2\varphi_{1,1}(1,2,z)}. \tag{29}$$

第三步，构造相似结构解

由于 $D=6, E=2, F=3, M=2, a=1$，根据式(2)，可以得到边值问题(1)的相似结构解，即

$$y(x,z)=6\cdot\frac{1}{2+\dfrac{2}{3+\Phi(1,z)}}\cdot\frac{1}{3+\Phi(1,z)}\cdot\Phi(x,z). \tag{30}$$

5. 结论

对于二阶微分边值问题(1)，只需先根据定解方程的线性无关解构造引解函数，然后利用一个边界条件的系数以及六个引解函数构造相似核函数，最后将另外一个边界条件系数和相似核函数进行组装即可获得边值问题的解。

二阶微分边值问题(1)解的表达式都呈现连分式乘积形式，当改变边界条件系数时，解的相似结构仍保持不变。

利用相似构造法求解二阶微分边值问题(1)时，降低了求解难度，提高了计算的准确度，得到的解表达式清晰明了。

基金项目

页岩气藏渗流特征研究，四川省科技厅科技计划项目(基本科研－重点研发) (2015JY0245)；

西华大学研究生课程思政示范课程，西华大学研究生教育质量工程项目资助(YJSKC202204)。

参考文献

[1] 黄荣军. 多层油藏渗流模型解的相似构造法研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2014.

[2] 范聪银. 双渗油藏渗流模型解的相似构造法[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2014.

[3] 李顺初, 王俊超, 许丽. 复合油藏球向渗流问题的解的相似结构[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(3): 122-127.

[4] 李全勇, 李顺初, 李科, 等. 基于相似结构的双孔复合油藏的渗流模型研究[J]. 钻采工艺, 2012, 35(2): 54-56+10.

[5] 暴喜涛, 李顺初, 肖绪霞, 等. 均质油藏非线性渗流模型解的相似构造法[J]. 天然气与石油, 2012, 30(5): 47-51+108.

[6] 李顺初. 微分方程解的相似结构初探与展望[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2010, 29(2): 223-226.

[7] 陈宗荣, 李顺初. 求解 Bessel 方程的边值问题的相似结构法[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2011, 34(6): 850-853.

[8] 冷礼辉, 郑鹏社, 李顺初. 求解扩展变型 Bessel 方程边值问题的相似构造法[J]. 科技通报, 2017, 33(8): 1-3.

[9] 王芙蓉, 李顺初, 许东旭. Airy 方程的一类边值问题的解的相似构造法[J]. 湖北师范学院学报(自然科学版), 2013, 33(1): 79-85.

[10] 罗梅, 李顺初. 连带 Legendre 微分方程边值问题解的相似结构[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2015, 32(11): 34-37.

[11] 郑鹏社, 李顺初, 冷礼辉, 等. 一类非线性复合变型 Bessel 方程组边值问题的相似构造解法[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2014, 27(4): 490-492+504.

[12] 李顺初, 夏星, 李伟, 等. 复合 Hermit 方程边值问题的相似构造法[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2021, 36(2): 79-83.

[13] Li, S.C., Zhao, C.C., Zheng, P.S., *et al*. (2019) Analysis of Oil and Gas Flow Characteristics in the Reservoir with the Elastic Outer Boundary. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **175**, 280-285.

https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.12.042

[14] Li, S.C., Zhou, M., Zheng, P.S., *et al*. (2019) Analysis of Seepage Pressure in Dual-Porosity Reservoir under Elastic Boundary. *Mathematics of Computation*, **10**, 316-338.

[15] Li, S.C., Guo, H., Zheng, P.S., *et al*. (2020) The Elastic Boundary Value Problem of Extended Modified Bessel Equation and Its Application in Fractal Homogeneous Reservoir. *Computational and Applied Mathematics*, **39**, Article No. 63. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1104-1

[16] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 第 2 版. 北京: 气象出版社, 2002: 304-332.