Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 126-136
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144119

Hans汉斯

模糊Riesz代数的基本性质研究

周姮媛

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2024年3月1日；录用日期：2024年3月22日；发布日期：2024年4月23日

摘　要

本文首先给出模糊Riesz代数的定义，并且研究了模糊Riesz代数中$|fg|$与$|f||g|$、$(fg)^+$与$f^+g^+ + f^-g^-$及$(fg)^-$与$f^+g^- + f^-g^+$等关系式。接下来介绍了模糊*f*代数，并且给出了模糊*f*代数中$|fg|$与$|f||g|$、$(fg)^+$与$f^+g^+ + f^-g^-$及$(fg)^-$与$f^+g^- + f^-g^+$等关系式。最后给出了模糊Riesz代数是模糊*f*代数和半素模糊*f*代数的充要条件。

关键词

模糊Riesz空间，模糊Riesz代数，模糊*f*代数

The Study of Elementary Property of Fuzzy Riesz Algebra

Hengyuan Zhou

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Mar. 1st, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Apr. 23rd, 2024

Abstract

At first, the paper defined the fuzzy Riesz algebra and studied the relation of $|fg|$ & $|f||g|$、$(fg)^+$ & $f^+g^+ + f^-g^-$ and $(fg)^-$ & $f^+g^- + f^-g^+$. Moreover, the paper introduced the fuzzy *f*-algebra, then discussed the relation of $|fg|$ & $|f||g|$、$(fg)^+$ & $f^+g^+ + f^-g^-$ and $(fg)^-$ & $f^+g^- + f^-g^+$. Last, the paper gave the equivalent condition that fuzzy Riesz algebra is fuzzy *f*-algebra and semi-prime fuzzy *f*-algebra.

文章引用: 周姮媛. 模糊 Riesz 代数的基本性质研究[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 126-136. DOI: 10.12677/pm.2024.144119

Keywords

Fuzzy Riesz Space, Fuzzy Riesz Algebra, Fuzzy *f*-Algebra

1. 引言

二十世纪六十年代，L. A. Zadeh 教授在文章《Fuzzy Set》[1]中首次提出模糊集的概念，由此创立了模糊数学。模糊数学在能源、环保、教育等领域有着广泛的应用。1994 年，BEG I 首次提出了模糊 Riesz 空间的概念，并在[2]中讨论了模糊 Riesz 分解性质等。2015 年，HONG L 在[3]中研究了在模糊 Riesz 子空间中，模糊理想、模糊带以及模糊投影带等的性质。2020 年，MOBASHIR I 和 ZIA B 在[4]中讨论了阿基米德模糊 Riesz 空间的模糊 Dedekind 完备的存在性。2021 年，GUI R 等人在[5]中研究了模糊 Riesz 空间中的模糊正算子、模糊序连续算子以及模糊序有界线性算子等的性质。此外还有大量学者对模糊 Riesz 空间中的各种性质进行了研究，但对模糊 Riesz 代数的研究仍是空白。

所以本文的主要目的是探讨模糊 Riesz 代数的基本性质。模糊 Riesz 代数的基本性质丰富了模糊 Riesz 空间的理论知识，将有助于解决模糊 Riesz 空间理论在动力系统、流体力学等领域中应用所遇到的问题。本文的第二部分将回顾模糊 Riesz 空间中的相关定义和性质；第三部分将提出模糊 Riesz 代数定义，并且研究模糊 Riesz 代数中 $|fg|$ 与 $|f||g|$、$(fg)^+$ 与 $f^+g^+ + f^-g^-$ 及 $(fg)^-$ 与 $f^+g^- + f^-g^+$ 等关系式；第四部分将介绍模糊 f 代数，并且给出模糊 f 代数中 $|fg|$ 与 $|f||g|$、$(fg)^+$ 与 $f^+g^+ + f^-g^-$ 及 $(fg)^-$ 与 $f^+g^- + f^-g^+$ 等关系式，最后给出模糊 Riesz 代数是模糊 f 代数和半素模糊 f 代数的充要条件。

2. 预备知识

本节将回顾文献[2] [3] [6] [7]中的一些概念和性质，以便应用其得到本文主要结果。其中 R 代表全体实数，$\underline{0}$ 代表零向量。

定义 1.1 [1] [6]假设 X 是论域，模糊关系 $\mu: X\times X\to[0,1]$，如果满足以下条件：

1) 假设 $x\in X$，则 $\mu(x,x)=1$ (自反性)

2) 假设 $x,y\in X$，如果 $\mu(x,y)>0$，$\mu(y,x)>0$，则 $x=y$ (反对称性)

3) 假设 $x,z\in X$，则 $\mu(x,y)\ge\bigvee_{y\in X}\left[\mu(x,y)\wedge\mu(y,z)\right]$ (传递性)

则称 $\mu: X\times X\to[0,1]$ 是模糊偏序关系。其中 $\mu: X\times X\to[0,1]$ 是 $X\times X$ 中模糊子集的隶属函数。

定义 1.2 [1] [6]假设 X 是一个集合。如果在 X 中，存在模糊偏序关系 μ，则称 X 是模糊偏序集，记为 (X,μ)

定义 1.3 [6]假设 A 是模糊偏序集 X 的子集。如果

$$U(A)(y)=\begin{cases}0, & (\uparrow x)(y)\le\frac{1}{2}, x\in A\\ \left(\bigcap_{x\in A}\uparrow x\right)(y), & \text{其他}\end{cases},$$

则称 $U(A)$ 是 A 在 X 上的上界。同理，如果

$$L(A)(y)=\begin{cases}0, & (\downarrow x)(y)\le\frac{1}{2}, x\in A\\ \left(\bigcap_{x\in A}\downarrow x\right)(y), & \text{其他}\end{cases}$$

则称 $L(A)$ 是 A 在 X 上的下界。

对于 $x\in X$，如果 $U(A)(x)>0$，则称 $x\in U(A)$。此时，称 A 是有上界的且 x 是 A 的一个上界。类似地，对于 $x\in X$，如果 $L(A)(x)>0$，则称 $x\in L(A)$。此时，称 A 是有下界的且 x 是 A 的一个下界。如果 A 既有上界又有下界，则称 A 是有界的。

假设 $z\in X$，如果 z 满足以下两个条件：

1) $z\in U(A)$，

2) 如果 $y\in U(A)$，则 $y\in U(z)$，

则称 z 是 A 的上确界。

假设 $z\in X$，如果 z 满足以下两个条件：

1) $z\in L(A)$，

2) 如果 $y\in L(A)$，则 $y\in L(z)$，

则称 z 是 A 的下确界。

注 1.4 [6] $x\vee y=\sup\{x,y\}$，$x\wedge y=\inf\{x,y\}$

定义 1.5 [6]假设 X 是模糊偏序集。如果 X 的任何有限子集都有上确界和下确界，则称 X 是模糊格。

定理 1.6 [2]假设 X 是模糊格。对于 $x\in X$，$y_j\in X\ (j=1,2,\cdots,n)$ 且 n 是任意正整数，有

$$x\wedge\left(\bigvee_{j=1}^{n}y_j\right)=\bigvee_{j=1}^{n}\left(x\wedge y_j\right)$$

$$x\vee\left(\bigwedge_{j=1}^{n}y_j\right)=\bigwedge_{j=1}^{n}\left(x\vee y_j\right)$$

这两个等式称为有限分配律。在模糊格中，有限分配律不一定成立。

对于 $x,y,z\in X$，有

$$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$$

$$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)$$

这两个等式称为结合律。

定义 1.7 [7]假设 E 是实向量空间。如果 E 中存在模糊偏序关系 μ，使得向量结构和模糊序结构兼容，即：

1) 如果任意 $x\in E$，假设 $x_1,x_2\in E$，使得 $\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$，则 $\mu(x_1,x_2)\le\mu(x_1+x,x_2+x)$

2) 如果任意非负实数 α，假设 $x_1,x_2\in E$，使得 $\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$，则 $\mu(x_1,x_2)\le\mu(\alpha x_1,\alpha x_2)$

则称 E 是模糊序向量空间。

定理 1.8 [7]假设 X 是模糊序向量空间，$x,y,z\in X$，$\alpha,\beta\in R$。则下述条件成立

1) 如果 $\mu(\underline{0},x)>\frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0},y)>\frac{1}{2}$，则 $\mu(\underline{0},x+y)>\frac{1}{2}$

2) 如果 $\mu(\underline{0},x)>\frac{1}{2}$，$\alpha\ge 0$，则 $\mu(\underline{0},\alpha x)>\frac{1}{2}$

3) 如果 $\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$，$\alpha\le 0$，则 $\mu(\alpha x_2,\alpha x_1)>\frac{1}{2}$

定义 1.9 [2]假设 E 是模糊序向量空间。如果 E 也是模糊格，则称 E 是模糊 Riesz 空间

定义 1.10 [2]假设 E 是模糊 Riesz 空间，$x\in E$。如果 $x^+=x\vee 0$，则称 x^+ 是 x 的正部；如果 $x^-=(-x)\vee 0$，则称 x^- 是 x 的负部；如果 $|x|=x\vee(-x)$，则称 $|x|$ 是 x 的绝对值

定理 1.11 [2]假设 E 是模糊 Riesz 空间，$x\in E$，则 x^+，x^-，$|x|$ 是正的，且下述等式成立：

1) $x=x^+-x^-$

2) $|x|=x^++x^-$

定理 1.12 [2]假设 E 是模糊 Riesz 空间。对于任意 $x,y\in E$，下述不等式成立。

1) $\mu\left((x+y)^+,x^++y^+\right)>\frac{1}{2}$

2) $\mu\left((x+y)^-,x^-+y^-\right)>\frac{1}{2}$

定义 1.13 [2]假设 E 是模糊 Riesz 空间，$x_1,x_2\in E$，A 是 E 的子集。如果

$$|x_1|\wedge|x_2|=\underline{0}$$

则称 x_1 与 x_2 是不交的或正交的，记为 $x_1\perp x_2$。

定义 1.14 [3]假设 E 是模糊 Riesz 空间，A 是 E 的子集。如果有集合

$$A^d=\{x\in E\mid x\perp y,\forall y\in A\}$$

则称 A^d 为 A 的不交补。A^{dd} 是 A^d 的不交补，即 $A^{dd}=\left(A^d\right)^d$

定理 1.15 [2]假设 E 是模糊 Riesz 空间，对于任意的 $x\in E$，有 $x=x_1-x_2$ 且 $x_1\wedge x_2=\underline{0}$ 当且仅当 $x_1=x^+$，$x_2=x^-$

定理 1.16 [2]假设 E 是模糊 Riesz 空间。对于任意的 $x,x_1,x_2\in E$，则不等式

$$\mu\left(x\wedge(x_1+x_2),x\wedge x_1+x\wedge x_2\right)>\frac{1}{2}$$

成立。

3. 模糊 Riesz 代数

本节给出了模糊 Riesz 代数的定义，以及模糊 Riesz 代数中的一些关系式。

定义 2.1 假设 E 是具有通常代数性质的模糊 Riesz 空间，并且对于乘法满足结合律，及对任意 $f,g\in E$，并且 $\mu(\underline{0},f)>\frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0},g)>\frac{1}{2}$，有 $\mu(\underline{0},fg)>\frac{1}{2}$，则称 E 为模糊 Riesz 代数(又可以称模糊格序代数)。

例 2.2 假设 $C([0,1])$ 是 $[0,1]$ 上所有连续实函数构成的集合，并且在 $C([0,1])$ 上定义如下：

令 $f,g\in C([0,1])$，$\forall x\in[0,1]$，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad fg(x)=f(x)\cdot g(x)$$

$$(f\wedge g)(x)=f(x)\wedge g(x)$$

假设 μ 是 $C([0,1])$ 中的一个模糊偏序关系，定义如下：

$$\mu(f,g)=\begin{cases}1, & f=g\\ \frac{2}{3}, & f\le g\text{ 当且仅当 } f(x)\le g(x),\forall x\in E,\text{ 且 } f\ne g\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $f,g \in C([0,1])$

易证 $C([0,1])$ 是模糊 Riesz 空间。接下来证明 $C([0,1])$ 是模糊 Riesz 代数

假设 $f,g \in C([0,1])$ 且 $\mu(\underline{0},f) > \frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0},g) > \frac{1}{2}$，易得 $\mu(\underline{0},fg) > \frac{1}{2}$

$C([0,1])$ 是模糊 Riesz 代数得证。

定理 2.3 假设 E 是模糊 Riesz 代数，则下述结论成立：

1) 如果 $\mu(f,g) > \frac{1}{2}$，$w \in A$ 且 $\mu(\underline{0},w) > \frac{1}{2}$，则 $\mu(wf,wg) > \frac{1}{2}$ 且 $\mu(fw,gw) > \frac{1}{2}$。特别地，$\mu(\underline{0},w^2) > \frac{1}{2}$ 当且仅当 $\mu(\underline{0},w) > \frac{1}{2}$；

2) 如果 $\mu(\underline{0},f) > \frac{1}{2}$，$\mu(f,g) > \frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0},p) > \frac{1}{2}$，$\mu(p,q) > \frac{1}{2}$，$f,g,p,q \in E$，则 $\mu(fp,gq) > \frac{1}{2}$；

3) 如果 $w \in A$ 且 $\mu(\underline{0},w) > \frac{1}{2}$，则

$$\mu((wf)\vee(wg),w(f\vee g)) > \frac{1}{2};$$

$$\mu((fw)\vee(gw),(f\vee g)w) > \frac{1}{2};$$

$$\mu(w(f\wedge g),(wf)\wedge(wg)) > \frac{1}{2};$$

$$\mu((f\wedge g)w,(fw)\wedge(gw)) > \frac{1}{2};$$

4) 对于任意 $f,g \in E$，有

$$\mu(|fg|,|f||g|) > \frac{1}{2};$$

$$\mu((fg)^+,f^+g^+ + f^-g^-) > \frac{1}{2};$$

$$\mu((fg)^-,f^+g^- + f^-g^+) > \frac{1}{2}。$$

证：1) 如果 $\mu(f,g) > \frac{1}{2}$，则 $\mu(\underline{0},g-f) > \frac{1}{2}$。根据定义 3.1 得 $\mu(\underline{0},w(g-f)) > \frac{1}{2}$，即

$$\mu(\underline{0},wg-wf) > \frac{1}{2}。$$

因此 $\mu(wf,wg) > \frac{1}{2}$。同理可得 $\mu(fw,gw) > \frac{1}{2}$

2) 由(1)可知，$\mu(fp,gp) > \frac{1}{2}$，$\mu(gp,gq) > \frac{1}{2}$。从而得到 $\mu(fp,gq) > \frac{1}{2}$

3) 由 $\mu(f,f\vee g) > \frac{1}{2}$ 且根据(1)得到 $\mu(wf,w(f\vee g)) > \frac{1}{2}$。同理可得

$$\mu(wg,w(f\vee g)) > \frac{1}{2}。$$

故得 $\mu((wf)\vee(wg),w(f\vee g)) > \frac{1}{2}$。

类似可证 $\mu\left(\left(fw\right)\vee\left(gw\right),\left(f\vee g\right)w\right)>\frac{1}{2}$。

又由 $\mu\left(f\wedge g,f\right)>\frac{1}{2}$ 且根据(1)得 $\mu\left(w\left(f\wedge g\right),wf\right)>\frac{1}{2}$，同理可得

$$\mu\left(w\left(f\wedge g\right),wg\right)>\frac{1}{2}。$$

因此可得 $\mu\left(w\left(f\wedge g\right),\left(wf\right)\wedge\left(wg\right)\right)>\frac{1}{2}$。

类似可证 $\mu\left(\left(f\wedge g\right)w,\left(fw\right)\wedge\left(gw\right)\right)>\frac{1}{2}$。

4) 对于任意 $f,g\in E$，有

$$fg=\left(f^{+}-f^{-}\right)\left(g^{+}-g^{-}\right)=\left(f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}\right)-\left(f^{+}g^{-}+f^{-}g^{+}\right),$$

可知 $\mu\left(fg,f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}\right)>\frac{1}{2}$，并且由 $\mu\left(\underline{0},f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}\right)>\frac{1}{2}$，可得

$$\mu\left(fg\vee\underline{0},f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}\right)>\frac{1}{2},$$

故 $\mu\left(\left(fg\right)^{+},f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}\right)>\frac{1}{2}$。

同理可证 $\mu\left(\left(fg\right)^{-},f^{+}g^{-}+f^{-}g^{+}\right)>\frac{1}{2}$。

又由 $|fg|=\left(fg\right)^{+}+\left(fg\right)^{-}$， $\mu\left(\left(fg\right)^{+}+\left(fg\right)^{-},\left(f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}\right)+\left(f^{+}g^{-}+f^{-}g^{+}\right)\right)>\frac{1}{2}$ 且 $\left(f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}\right)+\left(f^{+}g^{-}+f^{-}g^{+}\right)=\left(f^{+}+f^{-}\right)\left(g^{+}+g^{-}\right)=|f||g|$，可知

$$\mu\left(\left(fg\right)^{+}+\left(fg\right)^{-},|f||g|\right)>\frac{1}{2},$$

因此 $\mu\left(|fg|,|f||g|\right)>\frac{1}{2}$。

4. 模糊 *f* 代数

本节首先给出模糊 *f* 代数的定义及例子，其次讨论模糊 *f* 代数的一些基本性质，最后给出模糊 Riesz 代数是模糊 *f* 代数或半素模糊 *f* 代数的条件。

定义 3.1 假设 E 是模糊 Riesz 代数。当对任给的 $f,g\in E$，有 $f\wedge g=\underline{0}$ 时，对于任意 $w\in E$，$\mu\left(\underline{0},w\right)>\frac{1}{2}$，有

$$\left(fw\right)\wedge g=\left(wf\right)\wedge g=\underline{0},$$

此时称 E 为模糊 *f* 代数。

例 3.2 假设 $C\left(\left[0,1\right]\right)$ 是 $\left[0,1\right]$ 上所有连续实函数构成的集合，并且在 $C\left(\left[0,1\right]\right)$ 上定义如下：

令 $f,g\in C\left(\left[0,1\right]\right)$， $\forall x\in\left[0,1\right]$，

$$\left(f+g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right),\quad fg\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$$

$$\left(f\wedge g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)\wedge g\left(x\right)$$

假设 μ 是 $C\left(\left[0,1\right]\right)$ 中的一个模糊偏序关系，定义如下：

$$\mu(f,g)=\begin{cases}1, & f=g \\ \dfrac{2}{3}, & f\le g \text{ 当且仅当 } f(x)\le g(x),\forall x\in E,\text{ 且 } f\ne g \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $f,g\in C([0,1])$

由例 2.2 知 $C([0,1])$ 是模糊 Riesz 代数。如果在 $C([0,1])$ 中有 $f\wedge g=\underline{0}$，那么对于任意 $w\in C([0,1])$ 且 $\mu(\underline{0},w)>\dfrac{1}{2}$，易得 $(fw)\wedge g=(wf)\wedge g=\underline{0}$。

故可得 $C([0,1])$ 也是模糊 f 代数。

定理 3.3 假设 E 是模糊 f 代数，A 是 E 的子集。若 A 是模糊 Riesz 代数，则 A 是模糊 f 代数。

因为这是显而易见的，所以在此不做证明。

根据定理 2.3 (3)、(4)得到了 $w(f\vee g)$ 与 $(wf)\vee(wg)$，$w(f\wedge g)$ 与 $(wf)\wedge(wg)$，$|fg|$ 与 $|f||g|$ 等之间的关系。那么这些关系式在模糊 f 代数中会发生变化吗？如果会，会发生怎样的变化，从而变成什么样的关系式？接下来的定理 3.4 (1)、(2)将给出这些关系式的一些性质。

定理 3.4 假设 E 是模糊 f 代数，则下述结论成立：

1) 若 $w\in E$ 且 $\mu(\underline{0},w)>\dfrac{1}{2}$，$f,g\in E$，有

$$w(f\vee g)=(wf)\vee(wg)\text{；}$$

$$(f\vee g)w=(fw)\vee(gw)\text{；}$$

$$w(f\wedge g)=(wf)\wedge(wg)\text{；}$$

$$(f\wedge g)w=(fw)\wedge(gw)\text{；}$$

2) 若 $f,g\in E$，$|fg|=|f||g|$，$(fg)^+=f^+g^++f^-g^-$，$(fg)^-=f^+g^-+f^-g^+$；

3) 若在 E 中有 $f\perp g$ 且 $h\in E$，则 $fh\perp g$，$hf\perp g$；

4) 若在 E 中 $f\perp g$，则 $fg=\underline{0}$；

5) 若 $f\in E$，则 $\mu(\underline{0},f^2)>\dfrac{1}{2}$，$\mu(\underline{0},ff^+)>\dfrac{1}{2}$；

6) 若 $f,g\in E$ 且 $\mu(\underline{0},f)>\dfrac{1}{2}$，$\mu(\underline{0},g)>\dfrac{1}{2}$，则有

$$\mu((fg)\vee(gf),f^2\vee g^2)>\frac{1}{2}\text{；}$$

$$\mu(f^2\wedge g^2,(fg)\wedge(gf))>\frac{1}{2}\text{。}$$

证：1) 令 $w\in E$ 且 $\mu(\underline{0},w)>\dfrac{1}{2}$，$f,g\in E$。根据 $(f-f\wedge g)\wedge(g-f\wedge g)=\underline{0}$ 且由定义 3.1 可知

$$[wf-w(f\wedge g)]\wedge[wg-w(f\wedge g)]=\underline{0}\text{，}$$

可得 $(wf)\wedge(wg)-w(f\wedge g)=\underline{0}$。即 $(wf)\wedge(wg)=w(f\wedge g)$。利用 $f+g=f\vee g+f\wedge g$，可得 $w(f+g)=w(f\vee g)+w(f\wedge g)$。由此得

$$w(f\vee g)=wf+wg-w(f\wedge g)=wf+wg-(wf\wedge wg)=wf\vee wg$$

右乘的证明类似。

2) 给定 $f,g\in E$。由 $g^+\wedge g^-=\underline{0}$ 且根据模糊 f 代数的定义，可知 $f^+g^+\wedge f^+g^-=\underline{0}$。即 $f^+g^+\perp f^+g^-$。同理可证 $f^+g^+\perp f^-g^+$， $f^-g^+\perp f^-g^-$， $f^+g^-\perp f^-g^-$。因此有

$$\begin{aligned} f^+g^+ &\perp\left(f^+g^-+f^-g^+\right) \\ f^-g^- &\perp\left(f^+g^-+f^-g^+\right) \end{aligned},$$

故可得 $\left(f^+g^++f^-g^-\right)\perp\left(f^+g^-+f^-g^+\right)$

利用 $fg=\left(f^+-f^-\right)\left(g^+-g^-\right)=\left(f^+g^++f^-g^-\right)-\left(f^+g^-+f^-g^+\right)$ 且根据模糊 Riesz 分解性质知 $(fg)^+=f^+g^++f^-g^-$， $(fg)^-=f^+g^-+f^-g^+$。最后得

$$\begin{aligned} |fg| &=(fg)^++(fg)^-=f^+g^++f^-g^-+f^+g^-+f^-g^+ \\ &=\left(f^++f^-\right)\left(g^++g^-\right)=|f||g| \end{aligned}$$

3) 对于任意 $f,g\in E$，使得 $f\perp g$。令 $h\in E$。

由 $|f|\wedge|g|=\underline{0}$，可得 $|h||f|\wedge|g|=\underline{0}$。又根据 2)可知 $|hf|\wedge|g|=\underline{0}$，即 $hf\perp g$。

类似可证 $fh\perp g$。

4) 对于任意 $f,g\in E$，使得 $f\perp g$。由 3)可知 $fg\perp g$， $fg\perp fg$。因此 $fg=\underline{0}$。

5) 对于任意 $f\in E$，有

$$\begin{aligned} f^2 &=\left(f^+-f^-\right)^2 \\ &=\left(f^+\right)^2-f^+f^--f^-f^++\left(f^-\right)^2 \\ &=\left(f^+\right)^2+\left(f^-\right)^2 \end{aligned}$$

且由 $\mu\left(\underline{0},\left(f^+\right)^2+\left(f^-\right)^2\right)>\frac{1}{2}$，可知 $\mu\left(\underline{0},f^2\right)>\frac{1}{2}$。又利用 $ff^+=\left(f^+-f^-\right)f^+=\left(f^+\right)^2$ 且根据 $\mu\left(\underline{0},\left(f^+\right)^2\right)>\frac{1}{2}$，故得

$$\mu\left(\underline{0},ff^+\right)>\frac{1}{2}。$$

6) 对于任意 $f,g\in E$ 且 $\mu(\underline{0},f)>\frac{1}{2}$， $\mu(\underline{0},g)>\frac{1}{2}$。因知 $(f-g)^+\wedge(f-g)^-=\underline{0}$ 等价于 $(f-g)^+\wedge(g-f)^+=\underline{0}$，且根据模糊 f 代数的定义，故有

$$\left[(f-g)^+g\right]\wedge(g-f)^+=\underline{0}$$

$$\left[(f-g)^+g\right]\wedge\left[f(g-f)^+\right]=\underline{0}$$

$$\left(fg-g^2\right)^+\wedge\left(fg-f^2\right)^+=\underline{0},$$

可知 $\left[\left(fg-g^2\right)\wedge\left(fg-f^2\right)\right]^+=\underline{0}$，即

$$\mu\left(\left(fg-g^2\right)\wedge\left(fg-f^2\right),\underline{0}\right)>\frac{1}{2}$$

由此可得 $\mu\left(fg,g^2\right)>\frac{1}{2}$， $\mu\left(fg,f^2\right)>\frac{1}{2}$，即 $\mu\left(fg,g^2\vee f^2\right)>\frac{1}{2}$。又利用 $(f-g)^+\wedge(g-f)^+=\underline{0}$ 且根据定义 3.1 可知 $\left[f(f-g)^+\right]\wedge\left[(g-f)^+g\right]=\underline{0}$，即得

$$\mu\left(f^2 \wedge g^2, fg\right) > \frac{1}{2}$$

交换 f, g，得到 $\mu\left(gf, g^2 \vee f^2\right) > \frac{1}{2}$，$\mu\left(f^2 \wedge g^2, gf\right) > \frac{1}{2}$。此时可知

$$f^2 \vee g^2 \in U(fg, gf)，\quad f^2 \wedge g^2 \in L(fg, gf)$$

故得

$$\mu\left((fg) \vee (gf), f^2 \vee g^2\right) > \frac{1}{2}，\quad \mu\left(f^2 \wedge g^2, (fg) \wedge (gf)\right) > \frac{1}{2}。$$

定义 3.5 假设 E 是模糊 f 代数，对任意 $f \in E$，若 $f^2 = 0$，有 $f = 0$，则称 E 为半素模糊 f 代数。

在定理 3.4 中，如果 E 是模糊 f 代数并且对任意的 $f, g \in E$，若 $f \perp g$，则 $fg = 0$。下面我们将证明若 E 是半素模糊 f 代数，则反之成立。

定理 3.6 假设 E 是半素模糊 f 代数，下述结论成立：

1) $f \perp g$ 当且仅当 $fg = 0$；

2) 如果 $f, g \in E$，$\mu(\underline{0}, f) > \frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0}, g) > \frac{1}{2}$，则 $\mu\left(f^2, g^2\right) > \frac{1}{2}$ 当且仅当 $\mu(f, g) > \frac{1}{2}$；

3) 如果 $fg = \underline{0}$，$\mu(\underline{0}, f) > \frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0}, g) > \frac{1}{2}$，则 $f^2 = g^2$ 当且仅当 $f = g$。

证：1) 充分性

根据定理 3.4 4) 可知，如果有 $f \perp g$，则 $fg = \underline{0}$。

必要性

假设 $fg = \underline{0}$。则有

$$\mu\left((|f| \wedge |g|)^2, |f||g|\right) > \frac{1}{2}$$

$$\mu\left((|f| \wedge |g|)^2, |fg|\right) > \frac{1}{2}$$

$$\mu\left((|f| \wedge |g|)^2, \underline{0}\right) > \frac{1}{2}$$

故可知 $(|f| \wedge |g|)^2 = \underline{0}$，又由条件知 E 是半素的，可得 $|f| \wedge |g| = \underline{0}$。即得 $f \perp g$。

2) 必要性

根据定理 2.3 2)可知，如果 $\mu(\underline{0}, f) > \frac{1}{2}$，$\mu(\underline{0}, g) > \frac{1}{2}$ 且 $\mu(f, g) > \frac{1}{2}$，则

$$\mu\left(f^2, g^2\right) > \frac{1}{2}。$$

充分性

假设 $\mu\left(f^2, g^2\right) > \frac{1}{2}$ 成立，但 $\mu(f, g) > \frac{1}{2}$ 不成立，即有 $\mu(f \wedge g, f) > \frac{1}{2}$，所以可知

$$\mu\left((f \wedge g)^2, f^2\right) > \frac{1}{2}。$$

又因为存在 $\mu(\underline{0}, w) > \frac{1}{2}$，使得 $f = f \wedge g + w$，可知

$$\mu\left((f \wedge g)^2 + w^2, f^2\right) > \frac{1}{2}。$$

又由条件 E 是半素的且 $\mu\left(\underline{0},w^2\right)>\frac{1}{2}$，可得 $f^2=f^2\wedge g^2=\left(f\wedge g\right)^2$，矛盾。

3)的证明与 2)类似。

定理 3.7 假设 E 是模糊 Riesz 代数并且 E 中结合律成立，则下列结论成立：

1) E 是模糊 f 代数当且仅当如果 $f,g\in E$ 且 $\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$，$\left(fg\right)^{dd}\subset\left(f\right)^{dd}\cap\left(g\right)^{dd}$；

2) E 是半素模糊 f 代数当且仅当如果 $f,g\in E$ 且 $\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$，$\left(fg\right)^{dd}=\left(f\right)^{dd}\cap\left(g\right)^{dd}$。

证：可知 $\left(fg\right)^{dd}\subset\left(f\right)^{dd}\cap\left(g\right)^{dd}$ 当且仅当 $\left(f\cap g\right)^{d}\subset\left(fg\right)^{d}$

1) 充分性：

假设 E 是模糊 f 代数，需要证明 $\left(f\cap g\right)^{d}\subset\left(fg\right)^{d}$。对于任意的 $f,g\in E$，$\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$，取 $w\in\left(f\wedge g\right)^{d}$ 且 $\mu\left(\underline{0},w\right)>\frac{1}{2}$，即 $w\wedge\left(f\wedge g\right)=\underline{0}$。因为在 E 中结合律成立，可知 $\left(w\wedge f\right)\wedge g=\underline{0}$。根据模糊 f 代数的定义，可知 $\left(w\wedge fg\right)\wedge fg=\underline{0}$。因此得 $w\wedge fg=\underline{0}$。故有 $w\in\left(fg\right)^{d}$，即 $\left(f\wedge g\right)^{d}\subset\left(fg\right)^{d}$。得证 $\left(fg\right)^{dd}\subset\left(f\right)^{dd}\cap\left(g\right)^{dd}$。

必要性：

对任意的 $f,g\in E$，有 $f\wedge g=\underline{0}$；对任意的 $w\in E$，$\mu\left(\underline{0},w\right)>\frac{1}{2}$，可得

$$w\wedge\left(f\wedge g\right)=\underline{0}。$$

由此可知 $w\in\left(f\wedge g\right)^{d}$，$g\in\left(w\wedge f\right)^{d}\subset\left(wf\right)^{d}$，即 $g\wedge wf=\underline{0}$。同理可得 $g\wedge fw=\underline{0}$。根据定义 3.1 可得 E 是模糊 f 代数

2) 充分性：

假设 E 是半素模糊 f 代数。取 $f,g\in E$，$\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$。需要证明

$$\left(f\wedge g\right)^{d}=\left(fg\right)^{d}。$$

由 1)可知 $\left(f\cap g\right)^{d}\subset\left(fg\right)^{d}$，取 $\mu\left(\underline{0},w\right)>\frac{1}{2}$ 且 $w\in\left(fg\right)^{d}$。即

$$w\wedge fg=\underline{0}。$$

根据定理 3.4 4)可知 $wfg=\underline{0}$。又利用

$$\mu\left(\left(w\wedge f\wedge g\right)^{3},wfg\right)>\frac{1}{2}\text{ 且 }\mu\left(\underline{0},\left(w\wedge f\wedge g\right)^{3}\right)>\frac{1}{2},$$

故得 $\left(w\wedge f\wedge g\right)^{3}=\underline{0}$。由条件知 E 是半素的，可得 $w\wedge f\wedge g=\underline{0}$。即 $w\in\left(f\wedge g\right)^{d}$。因此有

$$\left(fg\right)^{d}\subset\left(f\wedge g\right)^{d}。$$

故得 $\left(f\wedge g\right)^{d}=\left(fg\right)^{d}$。

必要性：

假设对于任意 $f,g\in E$ 且 $\mu\left(\underline{0},f\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(\underline{0},g\right)>\frac{1}{2}$，$\left(fg\right)^{dd}=\left(f\right)^{dd}\cap\left(g\right)^{dd}$ 成立。由 1)可知 E 是模糊 f 代数。

如果在 E 中，有 $h^2=\underline{0}$，则

$$\left(h\right)^{dd}=\left(\left|h\right|\right)^{dd}=\left(\left|h\right|^{2}\right)^{dd}=\left(h^{2}\right)^{dd}=\left(\underline{0}\right)^{dd}$$

故得 $h=\underline{0}$ 。

5. 结论

本文给出了模糊 Riesz 代数的定义，并且研究了模糊 Riesz 代数中 $\mu\left(\left|fg\right|,\left|f\right|\left|g\right|\right)>\frac{1}{2}$；$\mu\left(\left(fg\right)^{+},f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}\right)>\frac{1}{2}$；$\mu\left(\left(fg\right)^{-},f^{+}g^{-}+f^{-}g^{+}\right)>\frac{1}{2}$ 等关系式。还介绍了模糊 f 代数，并且探讨了模糊 f 代数中 $\left|fg\right|=\left|f\right|\left|g\right|$，$\left(fg\right)^{+}=f^{+}g^{+}+f^{-}g^{-}$，$\left(fg\right)^{-}=f^{+}g^{-}+f^{-}g^{+}$ 等关系式。最后给出了模糊 Riesz 代数是模糊 f 代数和半素模糊 f 代数的等价命题。由于个人理论水平有限，关于模糊 Riesz 代数中的性质还有许多未讨论到，在以后还可以对模糊 Riesz 代数中更多关系式和乘法运算的交换性等进行研究。

参考文献

[1] Zzdeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Beg, I. and Islam, M. (1994) Fuzzy Riesz Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **2**, 211-241. https://doi.org/10.1142/9789814447010_0001

[3] Hong, L. (2015) Fuzzy Riesz Subspaces, Fuzzy Ideals, Fuzzy Bands and Fuzzy Band Projections. *Seria Matematica-Informatica*, **53**, 77-108. https://doi.org/10.1515/awutm-2015-0005

[4] Iqbal, M. and Bashir, Z. (2020) The Existence of Fuzzy Dedekind Completion of Archimedean Fuzzy Riesz Space. *Computational & Applied Mathematics*, **39**, Article No. 116. https://doi.org/10.1007/s40314-020-1139-3

[5] Guirao, J.L.G., Iqbal, M., Bashir, Z., *et al*. (2021) A Study on Fuzzy Order Bounded Linear Operators in Fuzzy Riesz-Spaces. *Mathematics*, **9**, 1512. https://doi.org/10.3390/math9131512

[6] Venugopalan, P. (1992) Fuzzy Ordered Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **46**, 221-226. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90134-P

[7] Beg, I. and Islam, M.U. (1995) Fuzzy Ordered Linear Spaces. *Fuzzy Mathematics*, **3**, 659-670.