Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 299-306
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144137

Hans汉斯

函数极限的求解方法

阮利翔，杨进霞*

塔里木大学信息工程学院，新疆 阿拉尔

收稿日期：2024年3月4日；录用日期：2024年3月22日；发布日期：2024年4月28日

摘 要

本文旨在探讨函数极限的概念及其求解方法。首先介绍了函数极限的基本概念，然后详细讨论了常用的求函数极限的方法，包括代入法、抓大头法，两个重要极限，取对数法，洛必达法则和泰勒展开式。最后通过具体的例题，展示了如何运用不同的方法求解函数极限。

关键词

函数极限，求解方法，注意事项

Methods for Solving Function Limits

Lixiang Ruan, Jinxia Yang*

School of Information Engineering, Tarim University, Alaer Xinjiang

Received: Mar. 4th, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Apr. 28th, 2024

Abstract

This article aims to explore the concept of function limits and their solution methods. Firstly, the basic concept of function limits was introduced, and then the commonly used methods for finding function limits were discussed in detail, including the substitution method, the grasping method, two important limits, the logarithmic method, the Lopida rule, and the Taylor expansion. Finally, through specific examples, it was demonstrated how to use different methods to solve function limits.

Keywords

Function Limit, Solution Method, Matters Needing Attention

*通讯作者。

文章引用：阮利翔，杨进霞．函数极限的求解方法[J]．理论数学, 2024, 14(4): 299-306. DOI: 10.12677/pm.2024.144137

1. 引言

函数极限在数学和科学领域中具有重要的意义和研究价值。首先，函数极限是分析数学的基础，它帮助我们理解函数在趋近某一点时的行为，为我们提供了一种精确描述函数局部性质的工具。通过研究函数极限，我们可以深入理解函数的连续性、导数和积分等重要概念，从而建立起数学分析的理论框架。总之，函数极限的重要性在于它是数学分析的基础，具有广泛的应用价值，对于理论研究和实际问题都具有重要意义。通过深入研究函数极限，我们可以更好地理解自然现象、优化工程设计、提高计算效率，推动科学和技术的发展。本文将从函数极限的定义出发，系统地介绍了常用的求解方法，并通过一个例题展示了这些方法的应用，并且利用一些方法对于高中知识进行了一个拓展，结合作者学习的经验给予读者一个学习建议。

2. 函数极限的定义和性质

设函数 $f(x)$ 在点 a 的某个去心邻域内有定义，如果存在一个实数 L，对于任意小的正实数 ε，都存在另一个正实数 δ，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 成立，那么就称 L 是当 x 趋于 a 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim_{x\to a} f(x)=L$。

换句话说，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在对应的 $\delta>0$，使得当函数自变量 x 满足 $0<|x-a|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 成立。这意味着当 x 足够接近 a 时，函数值 $f(x)$ 就会足够接近 L。这个定义描述了函数在某一点的极限，即当自变量趋于该点时函数的取值趋于的确定值。

3. 求函数极限的方法

3.1. 直接代入法

直接代入法是求函数极限最直接的方法之一，即直接将自变量替换为极限的值，计算函数的取值。如果函数在该点连续，则代入法可以直接得到极限的值。原理：通过代数运算，将复杂的函数化简为简单形式，然后直接求解极限。适用条件：适用于基本的函数极限求解，对于简单的函数具有一定的适用范围。

例 1. $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$ 求当 $x\to 2$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

我们可以直接带入 $x=2$，得到 $f(2)=\dfrac{3\times 2^2-2\times 2+1}{2\times 2^2+2-3}=\dfrac{9}{7}$

优点：简单易懂，适用范围广。

缺点：对于复杂的函数极限，直接代入法往往不够有效，求解过程繁琐，不易得到结果。

3.2. 抓大头法求极限

针对题型：分式极限 A/B 且分子、分母趋向于无穷大。原理：在计算一个关于指数函数或幂函数的 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限时，通常采用的方法是找到分子分母的“大头”，或者说变化最快的部分，分子分母其他的部分可省略。适用条件：关于指数函数或幂函数的 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限。

方法：分子和分母中分别抓取出最大的一项或同一个数量级的几项。

例
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^5+(3+x)^4}{(3+2x)^5+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^5}{(3+2x)^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{5(1+x)^4}{10(3+2x)^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{20(1+x)^3}{80(3+2x)^3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{60(1+x)^2}{480(3+2x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{120(1+x)}{1920(3+2x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{120}{1920}=\frac{1}{32}$$

说明：先从分子和分母中保留最大的一项或同一个数量级的几项，发现 $x\to\infty$ 时分子和分母满足 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，可利用洛必达法则将分子和分母同时进行求导，进而求得极限值。

3.3. 根式有理化求极限

针对题型：表达式中含有根号的极限。原理：利用根式有理化将带有根号的式子进行简化，从而简化计算。适用范围：带有根号的式子或分式。

方法：凑成分式 A/B，分子和分母同时乘以平方差公式的另一半。

例
$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(9x^2+1-9x^2\right)}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3}=\frac{1}{6}$$

说明：观察分式中的根式，再进行平方差知识进行求解。

不过，虽说“有理化”的方法应对根号问题的能力很强，但有时候用等价无穷小等方法可能会更简单，比如当你遇到 $\sqrt{1+x}-1$ 这种形式，你在想到有理化之前，应该意识到它跟 $\frac{x}{2}$ 是 $x\to 0$ 时的一对等价无穷小。所以当做题熟练以后，不能对方法不加选择，而是要有一个整体思路，怎么简单怎么来。

3.4. 无穷小乘以有界函数求极限

针对题型：表达式中出现明显的有界函数。原理：我们可以确定一个符合条件的有界函数在此无穷小的自变量变化情况下无论是否有其极限，其与无穷小的乘积必然存在极限为 0 (左右极限分别分析，可知必相等)。适用条件：有界函数与无穷小的乘积。

如 sin、cos、arcsin、arccos、arctan、arccot。

方法：无穷小乘以有界函数 = 无穷小。

例 $\lim_{x\to 1}(x-1)\cos\frac{1}{x-1}$ 当 $x-1$ 时，$x-1\to 0$，$\cos\frac{1}{x-1}$ 为有界函数

$-1\le\cos\frac{1}{x-1}\le 1$，故 $\lim_{x\to 1}(x-1)\cos\frac{1}{x-1}=0$

说明：无穷小量和有界函数的乘积仍是无穷小量。

3.5. 等价无穷小求极限[1]

针对题型：含有等价无穷小特例的题目。原理：所谓等价无穷小就是两个无穷小商的极限是 1，所以用无穷小替换就是相当于乘以一个极限值为 1 的函数，根据极限的四则运算，乘积的极限等于极限的乘积，因此在乘积的因式可以用等价无穷小的替换，极限值不改变。适用条件：求函数乘积的极限。

方法：在乘除法中，使用等价无穷小。常见的等价公式有：$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，

$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$n$ 次根号下$(1+x)-1\sim\frac{x}{n}$。注意：无穷小才有资格去等价。

例 $\lim_{x\to0}\frac{(e^{3x}-1)\arcsin 2x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot 2x}{\frac{1}{2}(4x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x^2}{8x^2}=\frac{3}{4}$

说明：$x\to0$ 时，$e^{3x}-1\sim 3x$，$1-\cos 4x\sim\frac{1}{2}(4x)^2$，$\arcsin 2x\sim 2x$，利用等价无穷小求解。

易错点：在加减中的式子，你用等价无穷小替换的时候不是一个等价的变换，改变了以前的式子，很多时候得到错误的结果就不足为奇了。

经典错解示例：$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

错误分析：上述错误解法所用的理论知识为等价无穷小替换原理，若$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{H(x)}=A$，则$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{H(x)}=A$。证明：

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{H(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{H(x)}\cdot\frac{g(x)}{H(x)}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{H(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{H(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{H(x)}=A。$$

分析：上述证明过程要求函数 $f(x)$ 在点 a 的某邻域内不能为 0，如果为 0，那么上述证明过程失效，而在前面的错误解法中，不少学生忽略了这一点，对分子直接使用等价无穷小替换，从而计算错误。而对于上述题目的分子，当$x=\frac{1}{k\pi},(k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$时，$x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$。

正确解法：由于$|\sin x|<|x|$，所以$0<\left|\sin\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right|<\left|x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$，故有

$0<\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x}\right|<\left|\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|$。又因为$\lim_{x\to0}0=0$，$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|=\lim_{x\to0}\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|=0$，由夹逼定理得$\lim_{x\to0}\left|\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right|=0$，所以$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x}=0$。

3.6. 两个重要极限公式求极限[2]

针对题型：能够出题目的是第二个重要极限公式(第一个重要极限公式，很鸡肋，用等价就可以了)，整体为$(1+0)^{\wedge}$的指数型极限。原理：在满足函数的四则运算的条件下进行相应的运算法则进行计算。

方法：在指数的位置配凑成 1/0，从而形成第二个重要极限公式。注意：有时候会搭配抓大头。

例 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-\frac{2x+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{-2-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{-2}=e^{-2}$

说明：要求熟记重要极限$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$。

3.7. 取对数求极限

针对题型：指数型的极限的极限都可以用此方法，当然包括可以用第二个重要极限的$(1+0)^{\wedge}$的指数型极限和无法用第二个重要极限的$(1+\infty)^{\wedge}$的指数型极限。原理：取对数是利用$e^x-1\sim x$与$\ln(1+x)\sim x$来化简从而简化计算。适用范围：当求极限的式子是对数。

方法：表达式变成取以 e 为底的 ln 函数，从而让原来的底数和指数产生联系。

例 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x^2\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(1+\sin x^2\right)}=e^{\frac{\sin x^2}{1-\cos x}}$，而当$x\to 0$时，$\sin x^2\sim x^2$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x}=2$

说明：通常遇到指数型极限问题时往往使用第二个重要极限公式可以简便地解决指数型极限问题，有时也会结合等价来求解。

3.8. 洛必达法则求极限

针对题型：专门求分式极限 A/B，典型的有 0/0，∞/∞。其他的，如$0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$。整体为$(1+0)^{\wedge}$的指数型极限。原理：将不定型的函数极限转化为求导数的极限，然后利用导数的性质来求解原函数的极限。适用条件：适用于求解不定型的函数极限，对于分式、指数、对数等函数的极限求解比较有效。

方法：在指数的位置配凑成 1/0，从而形成第二个重要极限。注意，有时候会搭配抓大头

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x+x^2-1}{4^x-x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2+2x}{4^x\ln 4-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x(\ln 2)^2+2}{4^x(\ln 4)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x(\ln 2)^3}{4^x(\ln 4)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x}\left(\frac{\ln 2}{\ln 4}\right)^3$

当$x\to\infty$时，$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+x^2-1}{4^x-x+5}=0$

说明：运用三次洛必达法则，即可求出极限为 0。

优点：简化了求解过程，通常能够快速得到结果。

缺点：只适用于求解不定型的函数极限，对于其他类型的极限不适用，而且有时需要多次使用洛必达法则才能得到结果。

3.9. 泰勒公式求极限[3]

针对题型：比较复杂的分式极限，且其他方法相对算起来麻烦的情况下。原理：将函数用泰勒级数展开，然后求得函数的极限。适用条件：适用于求解复杂函数的极限，对于光滑函数的极限求解有一定的优势。

方法：利用带佩亚诺预想的麦克劳林公式来展开函数，展开的阶数看题目的最高次数。

例用泰勒公式求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

因为分母是x^4，所以只需将分子中的e^{x^2}和$\cos x$分别用带有佩亚诺余项的麦克劳林公式表示为

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o\left(x^4\right),\quad \cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right),$$

于是$e^{x^2}+2\cos x-3=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o\left(x^4\right)+2\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right)-3=\frac{7}{12}x^4+o\left(x^4\right)$。

上面的运算中，两个比x^4高阶的无穷小的代数和仍记为$o\left(x^4\right)$，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{12}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)}{x^4}=\frac{7}{12}$$

说明：带有佩亚诺余项的麦克劳林公式通常可以帮助我们解决常见函数的近似值，阶数越高，近似值越精确。

优点：适用于求解复杂函数的极限，可以将函数用泰勒级数展开，进而求得函数的极限。

缺点：对于非光滑函数或者高阶导数难以计算的函数，泰勒展开可能不够有效，而且计算过程较为繁琐。

在这道题目中如果我们使用洛必达法则显然加大了运算难度，会让运算更加繁琐。接下来我们来使用洛必达来演算这道题目的一部分：

当 $x\to\infty$ 时，显然分式满足 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式，

$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}-2\cos x}{12x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(8x+4x^3\right)\mathrm{e}^{x^2}+2\sin x}{24x}$ 到这一步我们的显然发现运用洛必达法则显然行不通，陷入一个死循环，我们将不能求出最终的结果，这就可以体现运用泰勒公式求极限的优越性，并不是所有求极限都可以运用洛必达法则，当我们遇到的是复杂函数的极限，且是光滑函数的极限求解时运用泰勒公式求极限有一定的优势。

补充：论洛必达法则在高考题当中的运用。运用洛必达法则解决 2023 年高考数学乙卷 21 题[4]。

已知函数 $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln\left(x+1\right)$

若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 存在极值，求 a 的取值范围.

解：【本问最核心的部分是用了两个方法。1、参变分离；2、“洛必达”求函数极值】

$$\because f\left(x\right)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln\left(x+1\right)\left(x>0\right);$$

$$\therefore f'\left(x\right)=-\frac{\ln\left(x+1\right)}{x^2}+\frac{ax+1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}=0\quad\text{(根据题意有异号正根)}$$

即参变分离：$a=\frac{\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)-x}{x^2}\ \left(x>0\right)$

构造函数：$\varphi\left(x\right)=\frac{\left(x+1\right)\ln\left(x+1\right)-x}{x^2}\ \left(x>0\right)$

$h'\left(x\right)=\frac{2x-\left(x+2\right)\ln\left(x+1\right)}{x^3}\ \left(x>0\right)$

又令 $M\left(x\right)=2x-\left(x+2\right)\ln\left(x+1\right)\ \left(x>0\right)$

$$M'\left(x\right)=1-\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+1\right)$$

$$M''\left(x\right)=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x}{\left(x+1\right)^2}<0\ \left(x>0\right)$$

$\therefore M'\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)\downarrow$， $\therefore M'\left(x\right)<M'\left(0\right)=0$

那么 $M\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)\downarrow$， $M\left(x\right)<M\left(0\right)=0$

于是 $\varphi\left(x\right)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)\downarrow$

下面求函数 $\varphi(x)$ 的最大，最小值。

当 $x\to 0^+$ 时，$\varphi(x)=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{2}=\frac{1}{2}$

当 $x\to +\infty$ 时，$\varphi(x)=\frac{+\infty}{+\infty}\xrightarrow{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{2x}=\frac{+\infty}{+\infty}\xrightarrow{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{2}=0$

综上所述：所求 a 的取值范围为：$a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$。

当然利用泰勒展开式也能在高考中函数比大小题型中发挥优势，避免了构造函数和极大运算量的痛点，简化了做题步骤[5]。

高考常考函数在 0 处的泰勒展开式：

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{o}(x^n)\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\quad \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{o}(x^n)$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots x\in(-1,1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^2+\frac{17}{315}+\mathrm{o}(x^7)\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$$

我们能根据泰勒展开进行放缩，$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\Rightarrow \mathrm{e}^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2}$；$\mathrm{e}^x\leq 1-x+\frac{x^2}{2}$；$(x\geq 0)$

接下来让我们来观察 2022 年新课标 1 卷的选择压轴题：设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则

A. $a<b<c$ B. $c<b<a$ C. $c<a<b$ D. $a<c<b$

我们暂且运用泰勒展开来解决这个问题：(泰勒展开) $\mathrm{e}^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$，故

$a\approx 0.1\left(1+0.1+\frac{0.01}{2}\right)=0.1105$，$b\approx 0.1111$，$c=\ln\left(1+\frac{1}{9}\right)\approx\frac{1}{9}-\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^3}{3}\approx 0.1054$，故 $c<a<b$，选 C。

我们来进行一下复盘，整理运用泰勒展开的步骤[6]。当我们遇到函数比大小的问题时，通常几个函数的值都非常相近，我们无法直接求出或者看出它的具体值，这时我们会有几个解决办法，一是构造中间变量比大小，二是构造糖水不等式比大小，三是构造函数比大小，四是利用泰勒展开比大小。这里暂且说明泰勒展开的运用，首先我们需要先记住几个常见的函数在 0 处的泰勒展开式，再观察题目中函数，相相对应，直接带入运算，最后再进行比较。

感想：在如今高考大改革的状况中，题目变得越来越新颖，更加注重数学本身的思想，改变以往的套路式题目，学生更需要注重夯实基础。题目的深度不断提高，学生也需要不断提升自己的解题能力，函数在高考当中也是一大难点和重点，考察的维度也非常之广，极限思想又是函数的重中之重，在学有余力的时候建议学生学习洛必达法则求极限和理解简单的函数在 0 处的泰勒展开式，有时通常能帮助学

生快速求解。

4. 结语

通过以上例题的讨论，我们可以看到函数极限的求解方法有多种，包括直接代入法、根式有理化法、等价无穷小法、洛必达法则、取对数法、因式分解法、泰勒展开法等。在不同求函数的方法中还进行了扩展，包括各种方法的原理和适用范围，也进行了不同方法求极限的优缺点比较，补充了对于高等数学在高考题中的应用，为读者提供更便捷的解题思路。函数极限不仅是数学分析中的一个重要概念，也是理解和解决现实世界问题的一个强大工具。掌握极限的计算和理解，对于科学研究、工程设计、经济预测等多个领域都具有深远的影响。比如解决实际问题中的趋势和变化率问题、构建微积分学基础、发展高级数学理论、优化问题与数值分析、理解自然现象和科学模型。由此可见，函数极限的作用是不容忽视的，学习函数极限，体会函数极限，领悟函数极限[7]。

基金项目

塔里木大学校长校级一流本科专业“应用统计学”(YLZYXJ202211)。

参考文献

[1] 任铭，刘乐，张荣，等. 一种逆用等价无穷小在极限问题中的应用[J]. 洛阳理工学院学报(自然科学版), 2023, 33(3): 87-92.

[2] 赵士元. 数列及函数极限的几种特殊求法[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2023, 41(5): 177-180.

[3] 李婷，李东方，刘会彩. 泰勒公式在高等数学解题中的使用技巧探析[J]. 产业与科技论坛, 2023, 22(16): 227-229.

[4] 韦慧，倪晋波. 高等数学中函数极限计算的几种方法[J]. 安阳工学院学报, 2023, 22(2): 93-96. https://doi.org/10.19329/j.cnki.1673-2928.2023.02.018

[5] 李玉. 关于高等数学中函数极限教学方法的研究[J]. 科技视界, 2022(27): 140-142. https://doi.org/10.19694/j.cnki.issn2095-2457.2022.27.44

[6] 李慧平，丁万龙，赵建丽，等. 高等数学[M]. 北京师范大学出版社, 2022: 304.

[7] 杨小迪. 高等数学中求极限方法总结[J]. 文理导航(中旬), 2020(7): 23+25.