

# 一类Fredholm积分 - 微分方程的重心Jacobi插值求解法

刘高原<sup>1</sup>, 张益<sup>1</sup>, 陈冲<sup>2</sup>

<sup>1</sup>西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充

<sup>2</sup>西华师范大学公共数学学院, 四川 南充

收稿日期: 2024年3月8日; 录用日期: 2024年3月27日; 发布日期: 2024年4月30日

## 摘要

本文运用重心Jacobi插值配置法求解一类Fredholm积分 - 微分方程。首先通过取消重心Gegenbauer插值中参数相等的条件, 得到重心Gegenbauer插值的一般形式——重心Jacobi插值, 并表明重心Jacobi插值等价于插值节点为移位Gauss-Jacobi节点的Jacobi插值。然后基于配置法, 应用重心Jacobi插值构造一类带有初值条件的Fredholm积分 - 微分方程的数值算法。误差估计表明, 在合适的条件下, 该算法是收敛的。最后, 数值算例验证算法的有效性。

## 关键词

重心Jacobi插值配置法, Fredholm积分 - 微分方程, 误差估计

# Barycentric Jacobi Interpolation Method for Solving a Kind of Fredholm Integral-Differential Equation

Gaoyuan Liu<sup>1</sup>, Yi Zhang<sup>1</sup>, Chong Chen<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics & Information, China West Normal University, Nanchong Sichuan

<sup>2</sup>School of Public Mathematics, China West Normal University, Nanchong Sichuan

Received: Mar. 8<sup>th</sup>, 2024; accepted: Mar. 27<sup>th</sup>, 2024; published: Apr. 30<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

In this paper, the barycentric Jacobi interpolation collocation method is used to solve a kind of

**Fredholm Integral-Differential equation. Firstly, the general form of barycentric Gegenbauer interpolation, barycentric Jacobi interpolation, is obtained by canceling the condition that the parameters in barycentric Gegenbauer interpolation are equal, and it is shown that the barycentric Jacobi interpolation is equivalent to the Jacobi interpolation whose interpolation nodes are shifted Gauss-Jacobi nodes. Then based on the collocation method, the numerical algorithm for a kind of Fredholm Integral-Differential equation with initial value conditions is constructed by barycentric Jacobi interpolation. The result of error estimates show that the algorithm is convergent under suitable conditions. Finally, the effectiveness of the algorithm is verified by a numerical example.**

## Keywords

**Barycentric Jacobi Interpolation Collocation Method, Fredholm Integral-Differential Equation, Error Estimates**

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

积分 - 微分方程是积分方程与微分方程的交叉学科, 在众多类型的积分 - 微分方程中, Fredholm 积分 - 微分方程[1]常出现在数学物理应用问题中, 如热 - 粘弹性力学问题以及三维薄翼理论相关问题[2], 因此, Fredholm 积分 - 微分方程在理论上具有重要的研究意义, 因这类积分 - 微分方程不仅包括未知函数的微分, 还包括未知函数的积分, 同时还满足多个边值条件, 故求其精确解较困难, 需采用适当的数值方法求其数值解。

数十年来, Fredholm 积分 - 微分方程的高效数值解法一直是计算数学领域中的研究热点, 同伦分析法[3]、配置法[4]、Galerkin 法[5]及 Nystöm 法[6]等都是求 Fredholm 积分 - 微分方程的数值解有效的方法。在这些方法中, 多项式是函数逼近的常用工具, 近年来, Bessel 多项式[7]、Legendre 多项式[8]以及 Chebyshev 多项式[9]等正交多项式已被应用于构造 Fredholm 积分 - 微分方程的数值解。文献[10]将 Fredholm 积分 - 微分方程的求解问题转化为积分方程的求解问题, 并运用正交 Gegenbauer 插值配置法求解了一类 Fredholm 积分 - 微分方程。文献[11]表明以 Gauss-Gegenbauer 节点为插值节点的 Gegenbauer 插值在数学意义上等价于 Lagrange 插值。Lagrange 插值可改写为重心 Lagrange 插值, 文献[12]提出了以 Gauss-Gegenbauer 节点为插值节点的 Gegenbauer 插值的重心形式——重心 Gegenbauer 插值, 并将其应用于求解积分、微分以及积分 - 微分方程, 同时表明以重心 Gegenbauer 插值为核心的求积方法是高阶、稳定且有效的伪谱方法。从目前的研究状况来看, 重心型插值并未被广泛应用于求解 Fredholm 积分 - 微分方程, 并且关于重心 Gegenbauer 插值中参数取值范围的问题并未被进一步研究。本文考虑扩大重心 Gegenbauer 插值中参数的取值范围, 并基于重心 Gegenbauer 插值的一般形式, 运用配置法求解一阶线性 Fredholm 积分 - 微分方程[3] [4] [5]

$$\begin{cases} u^{(1)}(x) + u(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt = f(x), & x \in D = [a, b], \\ u(a) = c, & c \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $f(x)$  与  $K(x, t)$  分别是  $D$  和  $D \times D$  上的已知连续函数,  $u(x)$  是方程(1)的未知函数, 且  $u(x)$  的一阶

导数  $u^{(1)}(x)$  满足  $u^{(1)}(x) = du(x)/dx$ 。

本文共分为四节，其中，第一节的主要内容是证明重心 Jacobi 插值等价于以移位 Gauss-Jacobi 节点为插值节点的 Jacobi 插值，并阐明重心 Jacobi 插值配置法求解积分/微分方程的基本原理与步骤。第二节的主要内容是应用重心 Jacobi 插值以及 Gauss-Legendre 求积公式构造方程(1)的数值算法，算法的构造思路是将方程(1)转化为一个积分方程，然后应用重心 Jacobi 插值配置法将其离散为一个线性方程组。第三节的主要内容是对本文算法进行误差估计，并通过算法的误差估计式分析本文方法的收敛性质。第四节的主要内容是通过数值结果验证本文方法的有效性，并探究 Jacobi 多项式中两参数的取值对数值结果的影响。

## 2. 重心 Jacobi 插值

### 2.1. 重心 Jacobi 插值多项式

**定义 1 [13]** 设  $d_1 = b - a$ ,  $d_2 = a + b$  为任意实数，区间  $\Omega = [-1, 1]$  上的  $j (j \in \mathbb{N})$  次 Jacobi 多项式为  $J_j^{(\alpha, \beta)}(\hat{x}) = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^j C_{j+\alpha}^k C_{j+\beta}^{j-k} (\hat{x}-1)^{j-k} (\hat{x}+1)^k (\hat{x} \in \Omega, \alpha, \beta > -1)$ ，则任意区间  $D = [a, b]$  上的  $j$  次 Jacobi 多项式定义为

$$\tilde{J}_j^{(\alpha, \beta)}(x) = J_j^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{2x - d_2}{d_1}\right), x \in D.$$

**定义 2 [14]** 设  $u(x)$  是定义在区间  $D$  上的实值函数， $x_k (k = 0, 1, \dots, m \in \mathbb{N}^+)$  是区间  $D$  上的节点且  $u(x_k)$  已知，若存在实数  $\tilde{u}_j (j = 0, 1, \dots, m)$ ，使得函数

$$I_m u(x) = \sum_{j=0}^m \tilde{u}_j \tilde{J}_j^{(\alpha, \beta)}(x), x \in D, \alpha, \beta > -1, \tag{2}$$

满足  $I_m u(x_k) = u(x_k)$ ，则称  $I_m u(x)$  是实值函数  $u(x)$  在区间  $D$  上以  $\{x_k\}_{k=0}^m$  为插值节点的 Jacobi 插值多项式。

在定义 2 中，若插值节点是  $\tilde{J}_{m+1}^{(\alpha, \beta)}(x)$  的零点  $\{x_{m,j}^{(\alpha, \beta)}\}_{j=0}^m$ ，则系数  $\tilde{u}_j (j = 0, 1, \dots, m)$  满足[14]

$$\tilde{u}_j = \frac{\sum_{i=0}^m \varpi_i \tilde{J}_j^{(\alpha, \beta)}(x_{m,i}^{(\alpha, \beta)}) u(x_{m,i}^{(\alpha, \beta)})}{\rho_j^{(\alpha, \beta)}}, j = 0, 1, \dots, m, \tag{3}$$

其中， $\varpi_i (i = 0, 1, \dots, m)$  是 Gauss-Jacobi 求积权， $\rho_j^{(\alpha, \beta)}$  是与  $\alpha, \beta$  有关的正则化因子，满足[14]

$$\rho_j^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{(\alpha+\beta+1)} \Gamma(j+\alpha+1) \Gamma(j+\beta+1)}{(2j+\alpha+\beta+1) j! \Gamma(j+\alpha+\beta+1)}, j = 0, 1, \dots, m, \tag{4}$$

其中， $\Gamma(\cdot)$  是定义在实数域  $\mathbb{R}$  上的 Gamma 函数。将(3)式代入(2)式，令

$$L_{m,i}^{(\alpha, \beta)}(x) = \varpi_i \sum_{j=0}^m (\rho_j^{(\alpha, \beta)})^{-1} \tilde{J}_j^{(\alpha, \beta)}(x_{m,i}^{(\alpha, \beta)}) \tilde{J}_j^{(\alpha, \beta)}(x), x \in D, i = 0, 1, \dots, m, \tag{5}$$

则(2)式可记为

$$I_m u(x) = \sum_{i=0}^m L_{m,i}^{(\alpha, \beta)}(x) u(x_{m,i}^{(\alpha, \beta)}), x \in D, \alpha, \beta > -1. \tag{6}$$

**定理 1** 若  $I_m u(x)$  形如(6)式，且满足(4)式及(5)式，则(6)式是关于实值函数  $u(x)$  的以  $\{x_{m,j}^{(\alpha, \beta)}\}_{j=0}^m$  为插值节点的 Lagrange 插值多项式。

**证明** 利用定义 1，在(5)式中，将区间  $D$  上的 Jacobi 多项式转换为区间  $\Omega$  上的 Jacobi 多项式，可得

$$L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x}) = \varpi_i \sum_{j=0}^m \left(\rho_j^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1} J_j^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) J_j^{(\alpha,\beta)}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \Omega, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (7)$$

其中,  $x_{m,i}^{(\alpha,\beta)} = \frac{(b-a)}{2} \hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)} + \frac{(a+b)}{2}$ 。由文献[14]中的 Christoffel-Darboux 定理, 结合(4)式, 则(7)式可化为

$$L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x}) = \varpi_i \frac{2^{-(\alpha+\beta)} \Gamma(m+2) \Gamma(m+\alpha+\beta+2)}{(2m+\alpha+\beta+2) \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)} \frac{J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x}) J_m^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)}{\hat{x} - \hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}}, \quad (8)$$

因为  $\{\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\}_{i=0}^m$  是  $J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x})$  的零点, 故  $J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) = 0$ , 于是(8)式可化为

$$L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x}) = \frac{2^{-(\alpha+\beta)} \Gamma(m+2) \Gamma(m+\alpha+\beta+2) \varpi_i}{(2m+\alpha+\beta+2) \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)} \frac{\left[ J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x}) - J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) \right] J_m^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)}{\hat{x} - \hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}}, \quad (9)$$

将节点  $\hat{x}_{m,k}^{(\alpha,\beta)}$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) 代入(9)式中, 可得

$$L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,k}^{(\alpha,\beta)}\right) = \frac{2^{-(\alpha+\beta)} \Gamma(m+2) \Gamma(m+\alpha+\beta+2) \varpi_i}{(2m+\alpha+\beta+2) \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)} \frac{\left[ J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,k}^{(\alpha,\beta)}\right) - J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) \right] J_m^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)}{\hat{x}_{m,k}^{(\alpha,\beta)} - \hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}}. \quad (10)$$

(10)式中, 当  $i \neq k$  时, 因为  $J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,k}^{(\alpha,\beta)}\right) = 0$ , 故  $L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,k}^{(\alpha,\beta)}\right) = 0$ ; 当  $i = k$  时, 由洛必达法则[8], 对任意  $i = 0, 1, \dots, m$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}} \frac{\left[ J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x}) - J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) \right]}{\hat{x} - \hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}} = \frac{d}{d\hat{x}} J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right),$$

于是

$$L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) = \frac{2^{-(\alpha+\beta)} \Gamma(m+2) \Gamma(m+\alpha+\beta+2) \varpi_i}{(2m+\alpha+\beta+2) \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)} J_m^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) \frac{d}{d\hat{x}} J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right). \quad (11)$$

由 Gamma 函数的基本性质, 可得(11)式中

$$\Gamma(m+2) = (m+1)!, \quad \frac{\Gamma(m+\alpha+2)}{\Gamma(m+\alpha+1)} = m+\alpha+1,$$

将该式以及 Gauss-Jacobi 求积权  $\{\varpi_j\}_{j=0}^m$  的显式表达式[15]代入(11)式, 可得

$$L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) = \frac{2(m+\alpha+1)(m+\beta+1) J_m^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)}{(2m+\alpha+\beta+2) \left(1 - \left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)^2\right) \frac{d}{d\hat{x}} J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (12)$$

在 Jacobi 多项式三项迭代式[15]中令  $\hat{x} = \hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}$ , 可得

$$\left(1 - \left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)^2\right) \frac{d J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)}{d\hat{x}} = \frac{2(m+\alpha+1)(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+2)} J_m^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (13)$$

将(13)式代入(12)式, 可得  $L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right) = 1$ 。

综上,  $L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\left(\hat{x}_{m,k}^{(\alpha,\beta)}\right) = \delta_{ik}$  ( $i, k = 0, 1, \dots, m$ ), 其中  $\delta_{ik}$  是 Kronecker-Delta 函数, 满足当  $i \neq k$  时,  $\delta_{ik} = 1$ ; 当  $i = k$  时,  $\delta_{ik} = 0$ 。结合(5)式、(7)式以及定义 1 可知,  $L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\left(x_{m,k}^{(\alpha,\beta)}\right) = \delta_{ik}$ , 故(6)式满足

$$I_m u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) = u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad \alpha, \beta > -1. \quad (14)$$

(14)式表明, (6)式是以  $\{x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^m$  为插值节点的 Lagrange 插值多项式。□

以  $\{L_{m,i,B}^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{i=0}^m$  表示 Lagrange 插值基函数  $\{L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{i=0}^m$  的重心形式, 则实值函数  $u(x)$  在  $D$  上的  $m$  次重心 Jacobi 插值多项式表示为

$$I_{m,B} u(x) = \sum_{i=0}^m L_{m,i,B}^{(\alpha,\beta)}(x) u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}), \quad \alpha, \beta > -1, \quad x \in D, \quad (15)$$

其中

$$L_{m,i,B}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\sigma_{m,i}^{(\alpha,\beta)}}{x - x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}} \left( \sum_{j=0}^m \frac{\sigma_{m,j}^{(\alpha,\beta)}}{x - x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}} \right)^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (16)$$

$\sigma_{m,i}^{(\alpha,\beta)}$  是与定义 1 中  $m+1$  次 Jacobi 多项式  $J_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x})$  的零点  $\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}$  对应的重心插值权。

特别地, 文献[9]中的重心 Gegenbauer 插值多项式是  $\alpha = \beta$  时的重心 Jacobi 插值多项式。

**定理 2** [16] (16)式中, 重心插值权  $\sigma_{m,i}^{(\alpha,\beta)}$  的显式表达式为

$$\sigma_{m,i}^{(\alpha,\beta)} = \sqrt{\left(1 - \left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)^2\right)} \omega_i, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

当  $m$  的取值较大时, 该式中的  $\left(1 - \left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)^2\right)$  会受到舍入误差的影响, 对其引入正弦变换

$$\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)} = \sin(\kappa) \left( i = 0, 1, \dots, m, \quad \kappa \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right), \quad \text{可消除舍入误差的影响, 此时}$$

$$\sigma_{m,i}^{(\alpha,\beta)} = (-1)^i \sqrt{\omega_i} \cos\left(\sin^{-1}\left(\hat{x}_{m,i}^{(\alpha,\beta)}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

根据定理 1 以及(16)式可知, (15)式在数学意义上等价于(6)式。由于(15)式的插值节点是定义 1 中区间  $D$  上  $m+1$  次 Jacobi 多项式  $\tilde{J}_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$  的零点, 与区间  $D$  上的 Gauss-Jacobi 求积节点(又称为移位 Gauss-Jacobi 节点)的含义相同[13], 所以(15)式是与区间  $D$  上以移位 Gauss-Jacobi 节点为插值节点的 Jacobi 插值多项式等价的重心 Lagrange 插值多项式。

### 2.2. 重心 Jacobi 插值配置法

配置法是一种全局数值方法[14], 它求解积分/微分方程的基本原理是运用全局插值函数逼近原方程的未知函数, 并将原方程离散化。重心 Jacobi 插值配置法求解积分/微分方程的主要思路是首先运用满足(15)式的  $m$  次重心 Jacobi 插值多项式  $I_{m,B} u(x)$  逼近原方程的未知函数, 得到原方程的近似方程, 然后令原方程在(15)式的插值节点  $x_{m,j}^{(\alpha,\beta)} (j = 0, 1, \dots, m)$  处精确成立, 并应用求积公式得到近似方程的离散方程组, 最后求解离散方程组, 该离散方程组的解是原方程的未知函数在节点  $x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}$  处的近似值, 将求得的数值结果代入(15)式, 即可得到原方程的重心 Jacobi 插值配置解。

### 3. 算法构造

以下详细阐述重心 Jacobi 配置法求解 Fredholm 积分 - 微分方程(1)的算法步骤。

第 1 步将原积分 - 微分方程改写为积分方程

结合初值条件, 积分 - 微分方程(1)可变形为

$$u(x) + \int_a^x u(t) dt + \int_a^x \int_a^b K(t_0, t) u(t) dt dt_0 = \int_a^x f(t) dt + u(a), \quad x \in D. \quad (17)$$

第 2 步构造积分方程的近似方程

由(15)式近似积分方程(17)中的  $u(x)$ , 可得方程(17)的近似方程

$$I_{m,B}u(x) + \int_a^x I_{m,B}u(t)dt + \int_a^x \int_a^b K(t_0, t)I_{m,B}u(t)dt dt_0 = \int_a^x f(t)dt + u(a). \quad (18)$$

第 3 步将近似方程离散化

令方程(18)在节点  $x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}$  ( $j=0,1,\dots,m$ ) 处精确成立, 则

$$I_{m,B}u(x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}) + \int_a^{x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}} I_{m,B}u(t)dt + \int_a^{x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}} \int_a^b K(t_0, t)I_{m,B}u(t)dt dt_0 = \int_a^{x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}} f(t)dt + u(a), j=0,1,\dots,m. \quad (19)$$

第 4 步近似计算离散近似方程中的积分, 并得到离散方程组

采用  $M$  ( $M \in \mathbb{N}^+$ ) 个求积点的 Gauss-Legendre 求积公式计算方程(19)中的第二项与第三项, 结合定理 1, (19)式可转化为如下离散方程组

$$\tilde{u}(x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}) + \sum_{i=0}^m [p_{i,j,B}^{(1)} + \hat{p}_{i,j,B}^{(1)}] \tilde{u}(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) = \int_a^{x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}} f(t)dt + u(a), j=0,1,\dots,m, \quad (20)$$

其中,  $\tilde{u}(x_{m,j}^{(\alpha,\beta)})$  是  $u(x)$  在节点  $x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}$  的近似值, 且

$$p_{i,j,B}^{(1)} = \frac{(x_{m,j}^{(\alpha,\beta)} - a)}{2} \sum_{q=1}^M \omega_{M,q}^{(0,0)} L_{m,i,B}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x}_{M,q}^{(0,0)}, a, x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}),$$

$$\hat{p}_{i,j,B}^{(1)} = \frac{d_1}{2} \sum_{q=1}^M \left[ \int_a^{x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}} K(t_0, \hat{x}_{M,q}^{(0,0)}) dt_0 \right] \omega_{M,q}^{(0,0)} \sum_{i=0}^m L_{m,i,B}^{(\alpha,\beta)}(x_{M,q}^{(0,0)}), i, j=0,1,\dots,m,$$

其中,  $\{\hat{x}_{M,q}^{(0,0)}\}_{q=1}^M$  是 Gauss-Legendre 求积点,  $\{\omega_{M,q}^{(0,0)}\}_{q=1}^M$  是 Gauss-Legendre 求积权。

第 5 步将离散方程组改写为矩阵形式, 得到线性方程组

设

$$U = [\tilde{u}(x_{m,0}^{(\alpha,\beta)}) \quad \dots \quad \tilde{u}(x_{m,m}^{(\alpha,\beta)})]^T, P_B = (p_{i,j,B}^{(1)} + \hat{p}_{i,j,B}^{(1)})_{i,j=0}^m,$$

$$F_B = \left[ \int_a^{x_{m,0}^{(\alpha,\beta)}} f(t)dt + u(a) \quad \dots \quad \int_a^{x_{m,m}^{(\alpha,\beta)}} f(t)dt + u(a) \right]^T,$$

则方程(20)的矩阵形式为

$$U - P_B U = F_B, \quad (21)$$

(21)式是关于  $U$  的线性方程组。

第 6 步回代, 得到原方程的数值解

求解线性方程组(21)并得到  $\tilde{u}(x_{m,j}^{(\alpha,\beta)})$  ( $j=0,1,\dots,m$ ), 将其代入(15)式, 可得方程(1)的重心 Jacobi 插值配置解为

$$u(x) \approx I_{m,B} \tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^m L_{m,i,B}^{(\alpha,\beta)}(x) \tilde{u}(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}), \alpha, \beta > -1, x \in D. \quad (22)$$

#### 4. 误差估计

本节在  $\bar{\mathcal{X}} = (C(D), \|\cdot\|)$  ( $D$  上全体连续函数组成的完备空间)中对算法进行误差估计, 其中, 对任意  $u(x) \in C(D)$ , 范数  $\|\cdot\|$  定义为  $\|u(x)\| = \max_{x \in D} |u(x)|$ 。另外, 在本节中, 记号  $\Omega$  与  $D$  分别表示区间  $[-1,1]$  与区间  $[a,b]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )。

将(22)式代入方程(17)，并设余项为  $E_m(x)$ ，则有

$$I_{m,B}\tilde{u}(x) + \int_a^x I_{m,B}\tilde{u}(t)dt + \int_a^x \int_a^b K(t_0,t)I_{m,B}\tilde{u}(t)dt dt_0 = \int_a^x f(t)dt + u(a) + E_m(x), \tag{23}$$

以(17)式减(23)式，可得

$$E_m(x) = u(x) - I_{m,B}\tilde{u}(x) + \int_a^x (u(t) - I_{m,B}\tilde{u}(t))dt + \int_a^x \int_a^b K(t_0,t)(u(t) - I_{m,B}\tilde{u}(t))dt dt_0. \tag{24}$$

**引理 1** [17] 设  $f(x) \in C(\Omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ ，Gauss-Legendre 求积权为  $\omega_{n,k}^{(0,0)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )，Gauss-Legendre 求积节点为  $\hat{x}_{n,k}^{(0,0)}$ ，若  $R_n[f]$  为求积公式  $\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^n \omega_{n,k}^{(0,0)} f(\hat{x}_{n,k}^{(0,0)})$  的余项，则

$$R_n[f] = \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\eta), \quad \eta \in (-1, 1).$$

**推论 1** 若被积函数  $f(x)$  在积分区间  $\Omega$  内存在至多  $2n+1$  阶导数，则  $R_n[f] = 0$ 。

由(16)式可看出，重心 Jacobi 插值基函数  $L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) 是  $m$  次多项式，因此结合推论 1 可知，采用不小于  $(m+1)/2$  个求积点的 Gauss-Legendre 求积公式计算方程(19)中的第二项与第三项时，相应的求积余项为 0，此时， $E_m(x)$  由插值误差主导。

**定理 3** 设  $S_m = \text{span}\{L_{m,0}^{(\alpha,\beta)}(x), L_{m,1}^{(\alpha,\beta)}(x), \dots, L_{m,m}^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ ，若  $I_{m,B}$  满足(15)式，且是从  $C(D)$  到  $S_m$  的插值投影算子，则  $I_{m,B}$  是线性有界的，且满足  $\|I_{m,B}\| \leq \Lambda_m < \infty$ ，其中

$$\Lambda_m = \sup_{u \in C(D)} \frac{\|I_{m,B}u\|}{\|u\|} = \sup_{x \in D} \sum_{i=0}^m |L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x)|.$$

**证明** 对任意  $u, g \in C(D)$ ,  $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $x \in D$ ,

$$\begin{aligned} I_{m,B}(\varepsilon u + \delta g)(x) &= \sum_{i=0}^m L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x) [\varepsilon u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) + \delta g(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)})] \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^m L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x) u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) + \delta \sum_{i=0}^m L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x) g(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) \\ &= \varepsilon I_{m,B}u(x) + \delta I_{m,B}g(x), \end{aligned}$$

因此  $I_{m,B}$  是一个线性算子。由于

$$\begin{aligned} |I_{m,B}u(x)| &= \left| \sum_{i=0}^m L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x) u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^m |L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x)| |u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)})| \leq \Lambda_m \|u\|, \end{aligned}$$

因此  $\|I_{m,B}\| \leq \Lambda_m < \infty$ 。综上， $I_{m,B}$  是一个线性有界算子。□

定理 3 中的  $\Lambda_m$  是与节点  $\{x_{m,j}^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^m$  对应的 Lebesgue 常数。结合(12)式，将  $\Lambda_m$  中的变量  $x \in D$  运用变量代换转化为  $\hat{x} \in \Omega$ ，可以发现

$$\Lambda_m = \sup_{x \in D} \sum_{i=0}^m |L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(x)| = \sup_{x \in \Omega} \sum_{i=0}^m |L_{m,i}^{(\alpha,\beta)}(\hat{x})|,$$

该式表明， $\Lambda_m$  也是与节点  $\{\hat{x}_{m,j}^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^m$  对应的 Lebesgue 常数。此外，文献[16]表明， $\Lambda_m$  有如下估计式成立

$$\Lambda_m = O\left(m^{\max\{\alpha,\beta\}+1/2}\right), \tag{25}$$

其中， $O\left(m^{\max\{\alpha,\beta\}+1/2}\right)$  表示与  $m^{\max\{\alpha,\beta\}+1/2}$  同阶的量。

**引理 2 [18]** 设存在  $p (p \in \mathbb{N}^+)$ , 使得  $d^p u(x)/dx = u^{(p)}(\hat{x}) \in C(\Omega)$ . 令  $B_m u(\hat{x})$  是  $u(\hat{x})$  的  $m$  次最佳逼近多项式, 则对任意  $p \leq m+1$ , 有

$$\|B_m u(\hat{x}) - u(\hat{x})\| \leq \frac{(\pi/2) \|u^{(p)}(\hat{x})\|}{(m-p+3)^p}.$$

**定理 4 (误差界)** 设方程(1)满足条件

$$\|K(x, t)\| = \max_{x, t \in D} |K(x, t)| \leq h \quad (h \text{ 为常量}),$$

精确解  $u(x) \in C^{(p)}(D) (p \in \mathbb{N}^+)$ ,

以(17)式~(22)式求解方程(1), 设  $\tilde{u}(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) (i=0, 1, \dots, m)$  是方程组(21)的解,  $u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)})$  为方程(1)在节点  $x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}$  的精确值, 若  $M = \frac{m+1}{2}$  且  $p \leq m$ , 则对任意  $i=0, 1, \dots, m$ , 有

$$\|E_m(x)\| \leq [1 + (b-a) + (b-a)^2 h] (\|u(x) - I_{m,B} u(x)\| + \Lambda_m \|e_i\|) = O(m^{2\max\{\alpha, \beta\} + 1 - p}),$$

其中,  $e_i = u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) - \tilde{u}(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)})$ ,  $\alpha, \beta$  是 Jacobi 多项式中的参数且满足  $\alpha, \beta > -1$ .

**证明** 由(24)式以及范数的三角形不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|E_m(x)\| &= \left\| u(x) - I_{m,B} \tilde{u}(x) + \int_a^x (u(t) - I_{m,B} \tilde{u}(t)) dt + \int_a^x \int_a^b K(t_0, t) (u(t) - I_{m,B} \tilde{u}(t)) dt dt_0 \right\| \\ &\leq \|u(x) - I_{m,B} \tilde{u}(x)\| + \left\| \int_a^x (u(t) - I_{m,B} \tilde{u}(t)) dt \right\| + \left\| \int_a^x \int_a^b K(t_0, t) (u(t) - I_{m,B} \tilde{u}(t)) dt dt_0 \right\|, \end{aligned}$$

由于  $x \in D$ , 故

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^x (u(t) - I_{m,B} \tilde{u}(t)) dt \right\| &\leq (b-a) \|u(x) - I_{m,B} \tilde{u}(x)\|, \\ \left\| \int_a^x \int_a^b K(t_0, t) (u(t) - I_{m,B} \tilde{u}(t)) dt dt_0 \right\| &\leq [(b-a)^2 h] \cdot \|u(x) - I_{m,B} \tilde{u}(x)\|, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \|E_m(x)\| &\leq [1 + (b-a) + (b-a)^2 h] \|u(x) - I_{m,B} \tilde{u}(x)\| \\ &\leq [1 + (b-a) + (b-a)^2 h] \cdot (\|u(x) - I_{m,B} u(x)\| + \|I_{m,B} u(x) - I_{m,B} \tilde{u}(x)\|). \end{aligned}$$

对任意  $\hat{x} \in \Omega$ , 有

$$\begin{aligned} |u(\hat{x}) - I_{m,B} u(\hat{x})| &\leq |u(\hat{x}) - I_{m,B} (B_m u(\hat{x}))| + |I_{m,B} (B_m u(\hat{x})) - I_{m,B} u(\hat{x})| \\ &= |u(\hat{x}) - B_m u(\hat{x})| + |I_{m,B} (B_m u - u)(\hat{x})|, \end{aligned}$$

结合定理 3 与引理 2, 可得

$$|u(\hat{x}) - I_{m,B} u(\hat{x})| \leq (1 + \Lambda_m) \|u(\hat{x}) - B_m u(\hat{x})\| \leq (1 + \Lambda_m) \frac{(\pi/2) \|u^{(p)}(\hat{x})\|}{(m-p+3)^p}.$$

对该式运用变量代换  $x = \frac{b-a}{2} \hat{x} + \frac{a+b}{2}$ , 结合(25)式, 可得  $u(x)$  的重心 Jacobi 插值误差估计式为

$$\|u(x) - I_{m,B} u(x)\| \leq \frac{(b-a)(1 + \Lambda_m)}{2} \frac{(\pi/2) \|u^{(p)}(x)\|}{(m-p+3)^p} = O(m^{\max\{\alpha, \beta\} + 1/2 - p}). \quad (26)$$



由(22)式, 对任意  $i = 0, 1, \dots, m$ , 有

$$\|I_{m,B}u(x) - I_{m,B}\tilde{u}(x)\| = \left\| \sum_{i=0}^m L_{m,i,B}^{(\alpha,\beta)}(x) \left[ u(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) - \tilde{u}(x_{m,i}^{(\alpha,\beta)}) \right] \right\| \leq \Lambda_m \|e_i\|.$$

因为当采用  $M = (m+1)/2$  个求积点的 Gauss-Legendre 求积公式近似积分时, 相应的求积余项为 0, 所以近似方程与原方程之间的误差主要是未知函数的重心 Jacobi 插值误差, 从而结合(26)式可知  $\|e_i\|$  满足

$$\|e_i\| \leq \|u(x) - I_{m,B}u(x)\| \leq O\left(m^{\max\{\alpha,\beta\}+1/2-p}\right),$$

于是

$$\|I_{m,B}u(x) - I_{m,B}\tilde{u}(x)\| \leq \Lambda_m O\left(m^{\max\{\alpha,\beta\}+1/2-p}\right) = O\left(m^{2\max\{\alpha,\beta\}+1-p}\right),$$

因此

$$\|E_m(x)\| \leq [1 + d_1 + (d_1)^2 h] \cdot \left[ O\left(m^{\max\{\alpha,\beta\}+1/2-p}\right) + O\left(m^{2\max\{\alpha,\beta\}+1-p}\right) \right] = O\left(m^{2\max\{\alpha,\beta\}+1-p}\right). \square$$

根据定理 4, 可得到以下推论

**推论 2 (收敛性)** 若  $p > 2 \max\{\alpha, \beta\} + 1$  ( $p \in \mathbb{N}^+, \alpha, \beta > -1$ ), 则当  $m \rightarrow \infty$  时,  $E_m(x)$  呈现指数收敛的特点: 按  $m$  的  $2 \max\{\alpha, \beta\} + 1 - p$  次幂收敛到 0; 此外, 若  $u(x)$  在  $D$  上充分光滑, 且  $-1 < \alpha, \beta \ll \infty$ , 则当  $m \rightarrow \infty$  时,  $E_m(x) \rightarrow 0$ .

**证明** 由定理 4, 可知  $\|E_m(x)\| \leq O\left(m^{2\max\{\alpha,\beta\}+1-p}\right)$ , 因此当  $p > 2 \max\{\alpha, \beta\} + 1$  时, 有

$$2 \max\{\alpha, \beta\} + 1 - p < 0, \tag{27}$$

因此当  $m \rightarrow \infty$  时,  $m^{2\max\{\alpha,\beta\}+1-p} \rightarrow 0$ , 从而  $E_m(x) \rightarrow 0$ , 且  $E_m(x)$  收敛到零的速率与  $m$  的  $1 - p + 2 \max\{\alpha, \beta\}$  次幂收敛到零的速率相同, 故此时  $E_m(x)$  呈现指数收敛的特点。

若  $u(x)$  在  $D$  上充分光滑, 则  $p \rightarrow \infty$ , 若  $-1 < \alpha, \beta \ll \infty$ , 则  $p \gg \alpha, \beta$ , 从而仍有(27)式成立, 故此时当  $m \rightarrow \infty$  时, 总有  $E_m(x) \rightarrow 0$  成立。□

**推论 3** 当  $m \rightarrow \infty$  时, 若  $E_m(x) \rightarrow 0$ , 则对任意  $\alpha, \beta > -1$ ,  $E_m(x)$  收敛到 0 的速率随  $\alpha, \beta$  中最大值的增大而减小。

**证明** 由推论 2 可知, 当  $E_m(x) \rightarrow 0$  时, 有  $2 \max\{\alpha, \beta\} + 1 - p < 0$  成立, 此时  $E_m(x)$  的收敛速率与  $m^{2\max\{\alpha,\beta\}+1-p}$  的收敛速率相同。固定  $p$  的取值不变, 当  $\max\{\alpha, \beta\}$  逐渐增大时,  $2 \max\{\alpha, \beta\} + 1 - p$  逐渐增大,  $m^{2\max\{\alpha,\beta\}+1-p}$  的收敛速率逐渐减小, 从而  $E_m(x)$  的收敛速率逐渐减小。□

### 5. 数值算例

本节所给算例已知精确解, 实验操作系统为 MATLAB R2018a, 机器精度  $eps = 2.220 \times 10^{-16}$ 。数值实验中使用 double 类型的变量进行计算, 并将得到的数值结果保留两位小数。设本文方法求得的数值解为  $I_{m,B}\tilde{u}(x)$  且满足(22)式, 其中  $m$  表示(22)式中数值解  $I_{m,B}\tilde{u}(x)$  的次数, 并将算例中的精确解与数值解在计算节点  $\{x_i\}_{i=0}^N \subset D (N \in \mathbb{Z}^+)$  的最大绝对误差可记为

$$\|\psi_m\| = \max_{0 \leq i \leq N} |u(x_i) - I_{m,B}\tilde{u}(x_i)|, x_i \in D, i = 0, 1, \dots, N. \tag{28}$$

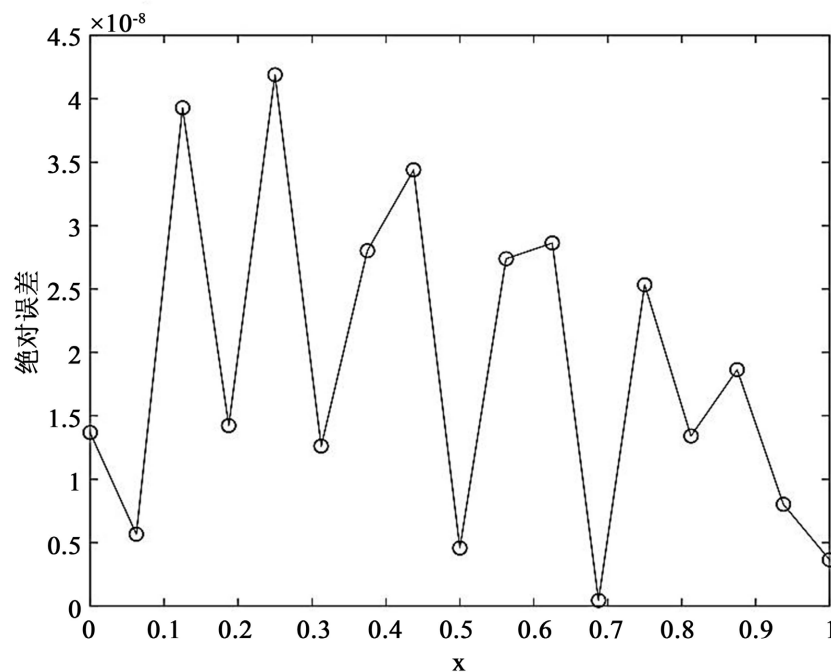
在算例中, 通过取不同的  $\alpha, \beta$  并根据(28)式计算  $\|\psi_m\|$  以体现 Jacobi 多项式中参数  $\alpha, \beta$  的取值对最大绝对误差的影响。

**例 [3] [19] [20]** 考虑一阶线性 Fredholm 积分 - 微分方程初值问题

$$\begin{cases} u^{(1)}(x) = u(x) + \int_0^1 \frac{x}{(1+t)(\ln 2)^2} u(t) dt + f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (29)$$

其中,  $f(x) = -x/3 + 1/(1+x) - \ln(1+x)$ , 方程(29)的精确解为  $u(x) = \ln(1+x)$ 。

运用(17)式~(20)式, 将方程(29)离散为线性方程组, 求解离散线性方程组并得到数值解, 以(28)式计算精确解与数值解在计算节点的绝对误差与最大绝对误差。图1是本文方法在  $m=15, \alpha=-0.5, \beta=-0.6$  时求得的数值解与方程(29)的精确解在等距节点的绝对误差分布图, 表1比较了精确解与数值解在等距节点的计算结果。从图1及表1可看出, 本文方法对方程(29)的求解有效。当计算节点为  $[0, 1]$  上的等距节点时, 表2列举了本文方法在  $m=2^n-1 (n=1, \dots, 5)$  及  $\alpha=-0.5, \beta=-0.4:0.4:2$  时的数值结果; 在  $m$  相同的条件下, 表3列举了本文方法在  $\beta=-0.4:0.4:2, \alpha=-0.5$  时的数值结果。此两表中数据显示, 当  $m$  相对较小时, 随着  $m$  的增大, 本文方法的收敛速率逐渐变大, 且此时, 随  $\alpha, \beta$  中最大值的不断增大, 本文方法的收敛速率不断减小。总之, 通过大量的数值实验可以发现, 对本例, 最大绝对误差随  $m$  的增大而减小, 且此时本文方法的收敛速率随  $\alpha, \beta$  中最大值的增大而减小, 但当  $m$  增大到某个范围内的值后, 最大绝对误差不会再随  $m$  的增大减小, 而是保持相对稳定, 且此时本文方法的收敛速率的随  $\alpha, \beta$  取值的变化规律并不明显。



**Figure 1.** The absolute error distribution of the presented method at equidistant nodes for  $\alpha=-0.5, \beta=-0.6, m=15$

**图 1.** 当  $\alpha=-0.5, \beta=-0.6, m=15$  时, 本文方法在等距节点的绝对误差分布

由(22)式可知, 本文方法得到的数值解的展开式项数为  $m+1$ , 与文献[3]方法中构造的同伦级数解的展开式的项数相同。当  $\alpha=-0.2, \beta=-0.5$  时, 在展开式项数以及计算节点类型、个数均相同的条件下, 将本文方法所求的最大绝对误差与文献[3]方法比较, 结果见表4。从表4可看出, 与文献[3]方法相比, 本文方法求得的最大绝对误差更小。

**Table 1.** The calculation result of the presented method at equidistant nodes for  $\alpha = -0.5, \beta = -0.6, m = 15$

**表 1.** 当  $\alpha = -0.5, \beta = -0.6, m = 15$  时, 本文方法在等距节点的计算结果

节点	精确解	数值解	绝对误差
0	0	6.63e-14	6.63e-14
0.0625	0.061	0.061	3.14e-14
0.125	0.118	0.118	5.46e-14
0.1875	0.172	0.172	2.401e-14
0.25	0.22	0.22	3.533e-14
0.3125	0.272	0.272	7.705e-14
0.375	0.318	0.318	5.085e-14
0.4375	0.3629	0.3629	2.742e-14
0.500	0.405	0.405	6.967e-14
0.5625	0.446	0.446	3.170e-14
0.625	0.486	0.486	3.908e-14
0.6875	0.523	0.523	6.217e-14
0.75	0.5596	0.5596	3.242e-14
0.8125	0.5947	0.5947	1.077e-14
0.875	0.6286	0.6286	2.931e-14
0.9375	0.6614	0.6614	1.277e-14
1	0.6931	0.6931	5.329e-14

文献[20]在计算方程(29)的数值解时,生成一个维数为  $m_3 = (2m_1 + 1)(m_2 + 2)$  的线性方程组,其中  $m_1$  与  $m_2$  分别表示 Shannon 缩放函数的项数与母波展开式的项数;本文方法在计算方程(29)的数值解时,由(20)式可知,生成一个  $m_4 = m + 1$  维的线性代数方程组。表 5 列举了本文方法在  $\alpha = 0.2, \beta = 0.5$  时所求的数值解在 Sinc 节点[19]的最大绝对误差,并比较了本文方法与文献[20]方法的最大绝对误差为同一数量级时需计算的线性方程组的维数。从表 5 可看出,本文方法能更精确地计算方程(29)的数值解,且当这两种方法的最大绝对误差同阶时,本文方法需要计算的线性代数方程组维数更低,因此本文方法在计算时占用的内存更少,计算量更小。

**Table 2.** The calculation result of the presented method at different  $\beta, n$  for  $\alpha = -0.5$

**表 2.** 当  $\alpha = -0.5$  时, 本文方法基于不同  $\beta, n$  的数值结果

$n$	$\ \psi_{2^n-1}\ $						
	$\beta = -0.4$	$\beta = 0$	$\beta = 0.4$	$\beta = 0.8$	$\beta = 1.2$	$\beta = 1.6$	$\beta = 2$
1	5.31e-02	7.00e-02	7.98e-02	8.58e-02	8.96e-02	9.21e-02	9.70e-02
2	7.80e-04	1.47e-03	2.24e-03	3.05e-03	3.87e-03	4.68e-03	5.47e-03
3	3.59e-07	8.79e-07	1.68e-06	2.81e-06	4.29e-05	6.12e-05	8.33e-05
4	1.44e-13	4.61e-13	1.13e-12	2.40e-12	4.59e-12	8.10e-12	1.35e-11
5	2.22e-16	5.55e-16	1.54e-15	1.91e-15	6.52e-15	1.11e-14	6.81e-14

**Table 3.** The calculation result of the presented method at different  $\alpha, n$  for  $\beta = -0.5$ **表 3.** 当  $\beta = -0.5$  时, 本文方法基于不同  $\alpha, n$  的数值结果

$n$	$\ \psi_{2^n-1}\ $						
	$\alpha = -0.4$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1.2$	$\alpha = 1.6$	$\alpha = 2$
1	4.36e-02	3.38e-02	4.04e-02	6.08e-02	7.86e-02	9.41e-02	1.08e-01
2	5.86e-04	6.76e-04	1.30e-03	2.06e-03	2.94e-03	3.94e-03	5.04e-03
3	2.53e-07	4.86e-07	1.07e-06	2.03e-06	3.48e-06	5.55e-06	8.38e-06
4	9.46e-14	2.66e-13	7.50e-13	1.80e-12	3.89e-12	7.78e-12	1.45e-11
5	6.66e-16	7.77e-16	1.11e-15	5.55e-16	4.44e-16	2.23e-14	4.75e-14

**Table 4.** Numerical results of the method presented in this paper and the method presented in reference [3] for  $\alpha = -0.2, \beta = -0.5$ **表 4.** 当  $\alpha = -0.2, \beta = -0.5$  时, 本文方法与文献[3]方法的数值结果

$m$	本文方法的最大绝对误差	文献[3]方法的最大绝对误差
10	1.29e-09	7.82e-04
15	1.45e-13	9.05e-06
20	5.55e-16	5.68e-07

**Table 5.** Numerical results of the method presented in this paper and the method presented in reference [20] for  $\alpha = 0.2, \beta = 0.5$ **表 5.** 当  $\alpha = 0.2, \beta = 0.5$  时, 本文方法与文献[20]方法的数值结果

$m_3$	文献[20]方法的最大绝对误差	$m_4$	本文方法的最大绝对误差
20	9.28e-04	3	7.82e-04
42	1.21e-08	9	1.02e-08
70	8.09e-12	13	7.50e-12

## 6. 总结

本文探究了文献[12]中的重心 Gegenbauer 插值的一般形式——重心 Jacobi 插值, 表明了它本质上是与插值节点为移位 Gauss-Jacobi 节点的 Jacobi 插值等价的重心插值, 并基于重心 Jacobi 插值多项式, 探究了一类一阶线性 Fredholm 型积分 - 微分方程初值问题的重心 Jacobi 插值配置法, 给出了相应的误差估计式。数值算例中的数据验证了本文方法的有效性, 并体现出当原方程未知函数的重心 Jacobi 插值多项式的次数在一定范围内变化时, 本文方法求得的最大绝对误差随 Jacobi 多项式中参数  $\alpha, \beta$  最大值的增大而增大。

## 基金项目

自然科学基金, 项目批准号: 11801456, 项目名称: 超奇异积分及其积分方程的数值算法和应用。

## 参考文献

- [1] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 3-22.

- [2] 云天铨. 积分方程及其在力学中的作用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1990: 402-417.
- [3] Jaradat, H., Alsayyed, O. and Alshara, S. (2008) Numerical Solution of Linear Integro-Differential Equations. *Journal of Mathematics and Statistics*, **4**, 250-254.
- [4] Tair, B., Guebbai, H., Segni, S., *et al.* (2022) An Approximation Solution of Linear Fredholm Integro-Differential Equation Using Collocation and Kantorovich Methods. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **68**, 3505-3525. <https://doi.org/10.1007/s12190-021-01654-2>
- [5] Fathy, M., El-Gamel, M. and El-Azab, M.S. (2014) Legendre-Galerkin Method for the Linear Fredholm Integro-Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **243**, 789-800. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.057>
- [6] Tair, B., Guebbai, H., Segni, S., *et al.* (2021) Solving Linear Fredholm Integro-Differential Equation by Nyström Method. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, **20**, 53-64. <https://doi.org/10.17512/jamcm.2021.3.05>
- [7] Şahina, N., Yüzbaşı, Ş. and Sezer, M. (2011) A Bessel Polynomial Approach for Solving General Linear Fredholm Integro-Differential-Difference Equations. *International Journal of Computer Mathematics*, **89**, 3093-3111. <https://doi.org/10.1080/00207160.2011.584973>
- [8] Yalinba, S., Sezer, M. and Sorkun, H.H. (2009) Legendre Polynomial Solutions of High-Order Linear Fredholm Integro-Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **210**, 334-349. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.12.090>
- [9] Maadadi, A. and Rahmoune, A. (2018) Numerical Solution of Nonlinear Fredholm Integro-Differential Equations Using Chebyshev Polynomials. *International Journal of Advanced Scientific and Technical Research*, **4**, 85-91. <https://doi.org/10.26808/rs.st.i8v4.09>
- [10] Elgindy, K.T. and Smith-Miles, K.A. (2013) Solving Boundary Value Problems, Integral and Integro-Differential Equations Using Gegenbauer Integration Matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **237**, 307-325. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2012.05.024>
- [11] Elgindy, K.T. (2016) High-Order Numerical Solution of Second-Order One-Dimensional Hyperbolic Telegraph Equation Using a Shifted Gegenbauer Pseudospectral Method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **32**, 307-349. <https://doi.org/10.1002/num.21996>
- [12] Elgindy, K.T. (2017) High-Order, Stable, and Efficient Pseudo Spectral Method Using Barycentric Gegenbauer Quadratures. *Applied Numerical Mathematics*, **113**, 1-25. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2016.10.014>
- [13] Hesthaven, J.S., Gottlieb, S. and Gottlieb, D. (2007) Spectral Methods for Time-Dependent Problems. Vol. 21 of Cambridge Monographs on the Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 88-89. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511618352>
- [14] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L. (2011) Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7>
- [15] Mama, F. (2018) An Introduction to Orthogonal Polynomials. *2nd AIMS-Volkswagen Stiftung Workshop*, Douala, 5-12 October 2018, 3-24.
- [16] Wang, H., Daan, H. and Stefn, V. (2012) Explicit Barycentric Weights for Polynomial Interpolation in the Roots or Extrema of Classical Orthogonal Polynomials. *Mathematics*, **83**, 2893-2914. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2014-02821-4>
- [17] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版, 2008: 116-123.
- [18] Liang, F. and Lin, F.R. (2010) A Fast Numerical Solution Method for Two Dimensional Fredholm Integral Equations of the Second Kind Based on Piecewise Polynomial Interpolation. *Applied Mathematics and Computational*, **216**, 3073-3088. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.04.027>
- [19] Rashidinia, J. and Zarebnia, M. (2007) The Numerical Solution of Integro-Differential Equation by Means of the Sinc Method. *Applied Mathematics and Computation*, **188**, 1124-1130. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.063>
- [20] Maleknejad, K. and Attaryc, M. (2011) An Efficient Numerical Approximation for Linear Class of Fredholm Integro-Differential Equations Based on Cattani's Method. *Communication Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 2672-2679. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.09.037>