

# 带跳随机比例微分方程补偿分步 $\theta$ 方法的收敛性和稳定性

张思晴, 胡琳, 段颖鹏

江西理工大学理学院, 江西 赣州

收稿日期: 2024年3月7日; 录用日期: 2024年3月28日; 发布日期: 2024年4月30日

## 摘要

我们探讨了带跳的随机比例微分方程的补偿分步 $\theta$ 方法。首先, 证明了该数值方法收敛, 并且收敛阶为 $\frac{1}{2}$ , 其次证明了解析解的均方稳定性, 并且证明了补偿分步 $\theta$ 方法能保持解析解的均方稳定性, 最后给出数值算例验证理论结果的正确性。

## 关键词

随机比例微分方程, 泊松跳, 补偿分步 $\theta$ 方法, 均方收敛性, 均方稳定性

# Convergence and Stability of Compensated Split-Step Theta Methods for Stochastic Pantograph Differential Equations with Jumps

Siqing Zhang, Lin Hu, Yingpeng Duan

School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi

Received: Mar. 7<sup>th</sup>, 2024; accepted: Mar. 28<sup>th</sup>, 2024; published: Apr. 30<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

A semi-implicit compensated split-step  $\theta$  method for stochastic pantograph differential equations with Poisson jumps is investigated in the paper. Firstly, the convergence of the numerical method

is discussed, and it is proved that the convergence order is  $1/2$ . Secondly, the mean-square stability of the analytical solution is proved, and it is found that the compensated split-step  $\theta$  methods can maintain the mean square stability of the analytical solution under some conditions. Finally, two numerical examples are given to verify the correctness of the theoretical results.

## Keywords

Stochastic Pantograph Differential Equations, Poisson Jumps, Compensated Split-Step  $\theta$  Methods, Mean-Square Convergence, Mean-Square Stability

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 前言

随机比例微分方程(stochastic pantograph differential equations, 简称 SPDEs)是一类特殊的随机无界延迟微分方程, 1971 年, Ockendon 和 Taylor [1]发现了电力机车的受电弓是如何收集电流的, 因此提出了随机比例微分方程。随机比例微分方程的一般形式如下

$$dx(t) = f(x(t), x(qt))dt + g(x(t), x(qt))dW(t) \quad (1-1)$$

在许多领域, 比如金融、控制和工程中都有广泛的应用。然而, 一般来说, SPDEs 没有显式解, 因此对 SPDEs 数值解的研究就非常重要。在实践中, 还广泛讨论了带泊松跳跃的随机微分方程和数值方法, 带泊松跳的随机系统如今广泛应用于随机金融学、电子工程、生物学等领域, 能够描述状态的意外、突然变化。将带跳的 Poisson 扰动项纳入随机比例延迟系统来建模突变, 泊松跳跃在随机金融和种群动力学领域受到越来越多的关注。带跳的 SPDE 可视为随机比例微分方程的扩展。

2007 年, Mao [2]开始了对带跳的随机比例微分方程的研究, 给出此方程的解存在且唯一的证明, 在此基础上给出了 Euler 方法的数值解, 证明了数值解在  $L^2$  意义下收敛于精确解。2011 年, Mao 等人[3]研究了局部 Lipschitz 条件下带跳的随机比例微分方程半隐式 Euler 方法的数值解均方收敛于方程的精确解。2013 年, Mao 等人[4]研究了一类具有 Markovian 切换和 Levy 跳跃的随机比例微分方程, 证明了在局部 Lipschitz 条件下 Euler 方法得到的数值解均方收敛且依概率收敛于方程的精确解。同年, Hu 等人[5]建立了关于带泊松跳随机比例微分方程的平衡隐式方法, 研究了该方法的均方收敛性和均方稳定性。证明了该方法强收敛阶为  $1/2$ , 同时还证明了, 对于线性标量方程, 当步长充分小时, 强平衡隐式方法和弱平衡隐式方法都是均方稳定的。2014 年, Yang 等人[6]研究了具有随机幅度的泊松驱动跳跃的随机比例微分方程, 给出了数值方法收敛的强阶, 并得到了数值方法的收敛性。但是, 对于非线性的带泊松跳随机比例微分方程解析解的均方稳定性研究仍是一个空白, 因此这成了本文研究的部分内容。

论文组织如下: 在第 2 节中, 我们将介绍带跳的 SPDE, 并定义补偿分步  $\theta$  方法(2-7), 证明了补偿分步  $\theta$  方法的均方收敛性; 在第 3 节中, 找到了方程解析解均方稳定的条件, 证明了补偿分步  $\theta$  方法的均方稳定性。

## 2. 补偿分步 $\theta$ 方法的收敛性

考虑  $n$  维带跳的随机比例微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), x(qt))dt + g(x(t), x(qt))dW(t) + h(x(t), x(qt))dN(t), & 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2-1)$$

其中,  $q \in (0,1)$  是比例系数,  $0 < T < \infty$ ,  $f, g, h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  都是 Borel 可测函数.  $x(t)$  是一个  $n$  维状态过程,  $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t))^T$  是各分量相互独立的  $m$  维标准维纳过程,  $N(t)$  是参变量为  $\lambda (\lambda > 0)$  的标量泊松过程, 初始条件  $x_0$  是一个有界的  $\mathcal{F}_0$  可测的随机向量, 也即  $E|x_0|^2 < \infty$  成立.

方程(2-1)等价于

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s), x(qs))ds + \int_0^t g(x(s), x(qs))dW(s) + \int_0^t h(x(s), x(qs))dN(s), t > 0, \quad (2-2)$$

为保证方程(2-1)解的存在唯一性, 假设系数  $f, g, h$  满足如下条件:

(1) (全局 Lipschitz 条件) 存在正常数  $K$ , 使得对所有的  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)|^2 \leq K(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2), \quad u = f, g, h.$$

(2) (线性增长条件) 存在正常数  $L$ , 使得对所有的  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$|u(x, y)|^2 \leq L(1 + |x|^2 + |y|^2), \quad u = f, g, h.$$

由条件(1)可得, 若  $u(0,0) = 0$ , 则对条件(1)的正常数  $K$ , 满足对任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$|u(x, y)|^2 \leq K(|x|^2 + |y|^2), \quad u = f, g, h. \quad (2-3)$$

为了方便, 本文假设  $u(0,0) = 0$ ,  $u = f, g, h$ , 易知方程(2-1)有解  $x(t) \equiv 0$ .

利用补偿泊松过程  $\tilde{N}(t) := N(t) - \lambda t$  是鞅, 并且满足

$$E[\tilde{N}(t+s) - \tilde{N}(t)] = 0, E[(\tilde{N}(t+s) - \tilde{N}(t))^2] = \lambda s, t, s \geq 0.$$

于是方程(2-1)可写成如下等价的方程

$$\begin{cases} dx(t) = f_\lambda(x(t), x(qt))dt + g(x(t), x(qt))dW(t) + h(x(t), x(qt))d\tilde{N}(t), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2-4)$$

其中  $f_\lambda(x, y)$  定义如下:

$$f_\lambda(x, y) := f(x, y) + \lambda h(x, y).$$

方程(2-4)等价于如下积分形式:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f_\lambda(x(s), x(qs))ds + \int_0^t g(x(s), x(qs))dW(s) + \int_0^t h(x(s), x(qs))d\tilde{N}(s), t > 0, \quad (2-5)$$

易知  $f_\lambda(x, y)$  仍满足全局 Lipschitz 条件和线性增长条件, 只需将相应的 Lipschitz 常数和线性增长系数改为更大的常数:

$$K_\lambda = 2(\lambda^2 + 1)K, \quad L_\lambda = 2(\lambda^2 + 1)L. \quad (2-6)$$

定理 2.1 若条件(1)和(2)成立, 则方程(2-4)存在唯一解  $x(t)$ , 且

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^2\right) < \infty.$$

**证明** 解的存在唯一性参考文献[2], 下证  $E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^2\right) < \infty$ .

由基本不等式  $|a+b+c+d|^2 \leq 4|a|^2 + 4|b|^2 + 4|c|^2 + 4|d|^2$  及方程(2-5)可得

$$|x(t)|^2 \leq 4|x_0|^2 + 4\left|\int_0^t f_\lambda(x(s), x(qs))ds\right|^2 + 4\left|\int_0^t g(x(s), x(qs))dW(s)\right|^2 + 4\left|\int_0^t h(x(s), x(qs))d\tilde{N}(s)\right|^2$$

对上式两边取上界, 再取期望并由 Doob 鞅不等式、鞅等距映射性质及条件(2)可得

$$\begin{aligned} & E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|^2\right) \\ & \leq 4E|x_0|^2 + 4E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left|\int_0^s f_\lambda(x(v), x(qv))dv\right|^2\right) + 4E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left|\int_0^s g(x(v), x(qv))dW(v)\right|^2\right) \\ & \quad + 4E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left|\int_0^s h(x(v), x(qv))d\tilde{N}(v)\right|^2\right) \\ & \leq 4E|x_0|^2 + 4TE\left|\int_0^t f_\lambda(x(s), x(qs))\right|^2 ds + 16E\left|\int_0^t g(x(s), x(qs))dW(s)\right|^2 \\ & \quad + 16E\left|\int_0^t h(x(s), x(qs))d\tilde{N}(s)\right|^2 \\ & \leq 4E|x_0|^2 + 4TE\left|\int_0^t f_\lambda(x(s), x(qs))\right|^2 ds + 16E\left|\int_0^t g(x(s), x(qs))\right|^2 ds \\ & \quad + 16\lambda E\left|\int_0^t h(x(s), x(qs))\right|^2 ds \\ & \leq 4E|x_0|^2 + 4L_\lambda(T+4+4\lambda)\int_0^t (1+E|x(s)|^2 + E|x(qs)|^2) ds \\ & \leq 4E|x_0|^2 + 4L_\lambda T(T+4+4\lambda) + 8L_\lambda(T+4+4\lambda)\int_0^t E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|^2\right) ds. \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式可得

$$E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|^2\right) \leq (4E|x_0|^2 + 4L_\lambda T(T+4+4\lambda))\exp(8L_\lambda(T+4+4\lambda)T).$$

故

$$E\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s)|^2\right) \leq (4E|x_0|^2 + 4L_\lambda T(T+4+4\lambda))\exp(8L_\lambda(T+4+4\lambda)T) < \infty. \quad \square$$

分步  $\theta$  方法[7] (Split-step  $\theta$  method, 简称 SS  $\theta$  method)应用于方程(2-4)得到如下的补偿分步  $\theta$  方法 (Compensated split-step  $\theta$  method, 简称 CSS  $\theta$  method)

$$\begin{aligned} y_n^* &= y_n + \theta \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}), \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) + g(y_n^*, y_{[qn]})\Delta W_n + h(y_n^*, y_{[qn]})\Delta \tilde{N}_n. \end{aligned} \quad (2-7)$$

其中初值  $y_0 = x(0)$ , 步长  $\Delta t = \frac{T}{M}$ ,  $M$  为正整数, 参数  $\theta \in [0, 1]$ ,  $t_n = n\Delta t$ ,  $y_n$  是  $x(t_n)$  的近似数值解, 即  $y_n \approx x(t_n)$ ,  $y_{[qn]} \approx x(qt_n)$ 。  $[a]$  是指  $a$  的整数部分,  $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  是维纳增量,  $\Delta \tilde{N}_n = \tilde{N}(t_{n+1}) - \tilde{N}(t_n)$  是补偿泊松增量,  $n = 0, 1, \dots, M-1$ 。

注意到对每个  $n(=0, 1, \dots, M-1)$ ,  $y_n^*$ ,  $\Delta W_n$  和  $\Delta \tilde{N}_n$  相互独立, 且  $y_n^*$  是  $\mathcal{F}_{t_n}$ -可测的。当  $\theta=1$ , 补偿分步  $\theta$  方法就成了补偿分步向后欧拉法 (Compensated split-step back ward Euler Method, 简称 CSSBE method); 当  $\theta=0$ , CSS  $\theta$  方法就成了显式 Euler 方法。

由(2-7)式可得

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) + g(y_n^*, y_{[qn]})\Delta W_n + h(y_n^*, y_{[qn]})\Delta \tilde{N}_n.$$

对任意  $t \in [t_{n+1}, t_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, M-1$ , 定义

$$y(t) = y_n + (t - t_n) f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) + g(y_n^*, y_{[qn]})(W(t_{n+1}) - W(t_n)) + h(y_n^*, y_{[qn]})(\tilde{N}(t_{n+1}) - \tilde{N}(t_n)). \quad (2-8)$$

易知  $y(t_n) = y_n$ , 定义分段函数

$$Z_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n^* \mathcal{X}_{[t_n, t_{n+1})}(t),$$

$$Z_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_{[qn]} \mathcal{X}_{[t_n, t_{n+1})}(t).$$

其中  $\mathcal{X}_F(t) = \begin{cases} 1, & t \in F \\ 0, & t \notin F \end{cases}$ , 又  $y(0) = y_0$ , 于是(2-8)式可以表示为

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s)) ds + \int_0^t g(Z_1(s), Z_2(s)) dW(s) + \int_0^t h(Z_1(s), Z_2(s)) d\tilde{N}(s). \quad (2-9)$$

引理 2.2 设条件(2)成立,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 < \Delta t < \min\left\{1, \frac{1}{4\theta L_\lambda}\right\}$ , 那么存在正常数  $A = 4(1 + L_\lambda)$ ,  $B = 4L_\lambda$ ,

使得  $E|y_n^*|^2 \leq A \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 + B$ , 其中  $y_n$  与  $y_n^*$  由(2-7)式确定。

**证明** 由(2-7)式, 基本不等式  $2ab \leq a^2 + b^2$ , 条件(2)及(2-6)式可得,

$$\begin{aligned} |y_n^*|^2 &= \left| y_n + \theta \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) \right|^2 \\ &= |y_n|^2 + \left| \theta \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) \right|^2 + 2\theta \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) y_n \\ &\leq |y_n|^2 + \theta^2 (\Delta t)^2 |f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]})|^2 + \theta \Delta t \left( |f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]})|^2 + |y_n|^2 \right) \\ &\leq |y_n|^2 + 2\theta \Delta t |f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]})|^2 + \theta \Delta t |y_n|^2 \\ &\leq (1 + \theta \Delta t) |y_n|^2 + 2\theta \Delta t L_\lambda \left( 1 + |y_n^*|^2 + |y_{[qn]}|^2 \right). \end{aligned}$$

上式两边取期望, 得

$$\begin{aligned} E|y_n^*|^2 &\leq (1 + \theta \Delta t) E|y_n|^2 + 2\theta \Delta t L_\lambda \left( 1 + E|y_n^*|^2 + E|y_{[qn]}|^2 \right) \\ &\leq (1 + \theta \Delta t + 2\theta \Delta t L_\lambda) \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 + 2\theta \Delta t L_\lambda \left[ 1 + E|y_n^*|^2 \right]. \end{aligned}$$

由  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $\exists \Delta t$  充分小, 使得  $2\theta \Delta t L_\lambda \leq \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{1}{1 - 2\theta \Delta t L_\lambda} \leq 2$ 。

$$\begin{aligned} \therefore E|y_n^*|^2 &\leq 2(1 + \theta \Delta t + 2\theta \Delta t L_\lambda) \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 + 4\theta \Delta t L_\lambda \\ &\leq 2(1 + 1 + 2L_\lambda) \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 + 4L_\lambda \\ &= 4(1 + L_\lambda) \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 + 4L_\lambda \\ &= A \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 + B, \end{aligned}$$

其中  $A = 4(1 + L_\lambda)$ ,  $B = 4L_\lambda$ 。□

引理 2.3 设条件(1)和(2)成立,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 < \Delta t < \min\left\{1, \frac{1}{4\theta L_\lambda}\right\}$ , 那么由(2-7)式得到的离散数值解满足

$$\max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 \leq C_1, \quad \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k^*|^2 \leq C_2.$$

证明 由(2-7)式、(2-9)式及  $y(t_{n+1}) = y_{n+1}$  可得

$$y_{n+1} = y(0) + \int_0^{t_{n+1}} f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s)) ds + \int_0^{t_{n+1}} g(Z_1(s), Z_2(s)) dW(s) + \int_0^{t_{n+1}} h(Z_1(s), Z_2(s)) d\tilde{N}(s),$$

其中  $n = 0, 1, \dots, M-1$ , 对上式两边取平方再取期望并由基本不等式

$$|a+b+c+d|^2 \leq 4|a|^2 + 4|b|^2 + 4|c|^2 + 4|d|^2, \quad \text{得}$$

$$\begin{aligned} E|y_{n+1}|^2 &\leq 4E|y_0|^2 + 4E\left|\int_0^{t_{n+1}} f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s)) ds\right|^2 + 4E\left|\int_0^{t_{n+1}} g(Z_1(s), Z_2(s)) dW(s)\right|^2 \\ &\quad + 4E\left|\int_0^{t_{n+1}} h(Z_1(s), Z_2(s)) d\tilde{N}(s)\right|^2. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 条件(2), (2-6)式, 鞅等距映射性质及 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq k \leq n+1} E|y_k|^2 \\ &\leq 4E|y_0|^2 + 4TE\int_0^{t_{n+1}} |f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds + 4E\int_0^{t_{n+1}} |g(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds \\ &\quad + 4\lambda E\int_0^{t_{n+1}} |h(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds \\ &\leq 4E|y_0|^2 + 4L_\lambda(T+1+\lambda)\int_0^{t_{n+1}} (1+E|Z_1(s)|^2 + E|Z_2(s)|^2) ds \\ &\leq 4E|y_0|^2 + 4L_\lambda T(T+1+\lambda) + 4L_\lambda(T+1+\lambda)\Delta t \left( \sum_{i=0}^n E|y_i|^2 + \sum_{i=0}^n E|y_i^*|^2 \right) \\ &\leq 4E|y_0|^2 + 4L_\lambda T(T+1+\lambda) + 4L_\lambda(T+1+\lambda)\Delta t \left( \sum_{i=0}^n E|y_i|^2 + \sum_{i=0}^n (A \max_{0 \leq k \leq i} E|y_k|^2 + B) \right) \\ &\leq 4E|y_0|^2 + 4L_\lambda T(T+1+\lambda) + 8L_\lambda T(T+1+\lambda)B + 4L_\lambda(1+A)(T+1+\lambda)\Delta t \sum_{i=0}^n (\max_{0 \leq k \leq i} E|y_k|^2) \\ &= k_1 + k_2 \Delta t \sum_{i=0}^n (\max_{0 \leq k \leq i} E|y_k|^2), \end{aligned}$$

其中  $k_1 = 4E|y_0|^2 + 4L_\lambda T(T+1+\lambda) + 8L_\lambda T(T+1+\lambda)B$ ,  $k_2 = 4L_\lambda(1+A)(T+1+\lambda)$ ,  $k_1, k_2$  均与  $\Delta t$  无关。

由离散的 Gronwall 不等式, 我们可得

$$\max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 \leq k_1 e^{k_2 T} := C_1.$$

由引理 2.2, 则

$$E|y_n^*|^2 \leq A \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 + B.$$

即

$$\max_{0 \leq k \leq n} E|y_k^*|^2 \leq A \max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 + B := C_2. \quad \square$$

为了证明主要结论, 给出如下引理 2.4:

引理 2.4 设条件(1)和(2)成立,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 < \Delta t < \min\left\{1, \frac{1}{4\theta L_\lambda}\right\}$ ,  $y(t)$  由(2-8)式给出, 则存在与  $\Delta t$  无关的正常数  $C_3$  和  $C_4$  使得

$$E|y(t) - Z_1(t)|^2 \leq C_3 \Delta t,$$

$$E|y(qt) - Z_2(t)|^2 \leq C_4 \Delta t.$$

证明 由(2-7)式及(2-9)式可得

$$\begin{aligned} y(t) - y_n^* &= \int_{t_n}^t f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s)) ds + \int_{t_n}^t g(Z_1(s), Z_2(s)) dW(s) \\ &\quad + \int_{t_n}^t h(Z_1(s), Z_2(s)) d\tilde{N}(s) - \theta \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*). \end{aligned}$$

由不等式  $|a + b + c|^2 \leq 3|a|^2 + 3|b|^2 + 3|c|^2$ , 条件(2)和(2-6)式可知, 对  $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$ ,

$$\begin{aligned} &E|y(t) - Z_1(t)|^2 \\ &\leq 3E\left|\int_{t_n}^t f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s)) ds - \theta \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*)\right|^2 + 3E\left|\int_{t_n}^t g(Z_1(s), Z_2(s)) dW(s)\right|^2 \\ &\quad + 3E\left|\int_{t_n}^t h(Z_1(s), Z_2(s)) d\tilde{N}(s)\right|^2 \\ &\leq 6E\left|\int_{t_n}^t f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s)) ds\right|^2 + 6\theta^2 (\Delta t)^2 E|f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*)|^2 \\ &\quad + 3E\left|\int_{t_n}^t g(Z_1(s), Z_2(s)) dW(s)\right|^2 + 3E\left|\int_{t_n}^t h(Z_1(s), Z_2(s)) d\tilde{N}(s)\right|^2 \\ &\leq 6T \int_{t_n}^t |f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds + 6\theta^2 (\Delta t)^2 E|f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*)|^2 \\ &\quad + 3E \int_{t_n}^t |g(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds + 3\lambda E \int_{t_n}^t |h(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds \\ &\leq 3[2T + 1 + \lambda] L_\lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} (1 + E|Z_1(s)|^2 + E|Z_2(s)|^2) ds \\ &\quad + 6\theta^2 (\Delta t)^2 L_\lambda (1 + E|y_n^*|^2 + E|y_{[qn]}^*|^2). \end{aligned}$$

由引理 2.3 知  $\max_{0 \leq k \leq n} E|y_k|^2 \leq C_1$ ,  $\max_{0 \leq k \leq n} E|y_k^*|^2 \leq C_2$ ,

$$\therefore |Z_1(s)|^2 \leq C_2, |Z_2(s)|^2 \leq C_1.$$

再由  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $0 < \Delta t < \min\left\{1, \frac{1}{4\theta L_\lambda}\right\}$  可得

$$\begin{aligned} &E|y(t) - Z_1(t)|^2 \\ &\leq 3[2T + 1 + \lambda] L_\lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} (1 + C_1 + C_2) ds + 6\theta^2 (\Delta t)^2 L_\lambda (1 + C_1 + C_2) \\ &\leq 3L_\lambda [2T + 1 + \lambda] (1 + C_1 + C_2) \Delta t + 6L_\lambda (1 + C_1 + C_2) \Delta t \\ &:= C_3 \Delta t, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

其中  $C_3 = 3L_\lambda [2T + 3 + \lambda] (1 + C_1 + C_2)$ 。

同样地,

$$\begin{aligned}
y(qt) - Z_2(t) &= y(qt) - y_{[qn]} = y(qt) - y([qn]\Delta t) \\
&= \int_{[qn]\Delta t}^{qt} f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s)) ds + \int_{[qn]\Delta t}^{qt} g(Z_1(s), Z_2(s)) dW(s) \\
&\quad + \int_{[qn]\Delta t}^{qt} h(Z_1(s), Z_2(s)) d\tilde{N}(s)
\end{aligned}$$

由基本不等式  $|a+b+c|^2 \leq 3|a|^2 + 3|b|^2 + 3|c|^2$ ，条件(2)及(2-6)式可知，对  $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$ ，

$$\begin{aligned}
&E|y(qt) - Z_2(t)|^2 \\
&\leq 3E\left|\int_{[qn]\Delta t}^{qt} f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s)) ds\right|^2 + 3E\left|\int_{[qn]\Delta t}^{qt} g(Z_1(s), Z_2(s)) dW(s)\right|^2 \\
&\quad + 3E\left|\int_{[qn]\Delta t}^{qt} h(Z_1(s), Z_2(s)) d\tilde{N}(s)\right|^2 \\
&\leq 3TE\int_{[qn]\Delta t}^{qt} |f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds + 3E\int_{[qn]\Delta t}^{qt} |g(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds \\
&\quad + 3\lambda E\int_{[qn]\Delta t}^{qt} |h(Z_1(s), Z_2(s))|^2 ds \\
&\leq 3(T+1+\lambda)L_\lambda\int_{[qn]\Delta t}^{qt} (1+E|Z_1(s)|^2 + E|Z_2(s)|^2) ds \\
&\leq 3(T+1+\lambda)L_\lambda\int_{[qn]\Delta t}^{qt} (1+C_1+C_2) ds \\
&\leq 6L_\lambda(T+1+\lambda)(1+C_1+C_2)\Delta t \\
&:= C_4\Delta t, \quad \forall t \in [0, T],
\end{aligned}$$

其中  $C_4 = 6L_\lambda(T+1+\lambda)(1+C_1+C_2)$ 。□

下面给出了 CSS  $\theta$  方法的收敛性。

定理 2.5 设条件(1)和(2)成立， $0 \leq \theta \leq 1$ ， $0 < \Delta t < \min\left\{1, \frac{1}{4\theta L_\lambda}\right\}$ ，由(2-9)式给出的连续时间数值解  $y(t)$

将均方收敛于方程(2-4)的真解  $x(t)$ ，即

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |y(t) - x(t)|^2\right] \leq C_5\Delta t,$$

其中  $C_5$  是独立于  $\Delta t$  的常数。

证明 令  $f_{\lambda 1}(Z_1(s), Z_2(s)) = f_\lambda(x(s), x(qs)) - f_\lambda(Z_1(s), Z_2(s))$ ，

$$g_1(Z_1(s), Z_2(s)) = g(x(s), x(qs)) - g(Z_1(s), Z_2(s)),$$

$$h_1(Z_1(s), Z_2(s)) = h(x(s), x(qs)) - h(Z_1(s), Z_2(s)).$$

对任意的  $0 \leq r \leq T$ ，由基本不等式  $|a+b+c|^2 \leq 3|a|^2 + 3|b|^2 + 3|c|^2$ ，Cauchy-Schwarz 不等式，Doob 鞅不等式，鞅等距映射性质，条件(1)，(2-6)式及引理 2.4 可得

$$\begin{aligned}
&E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^2\right] \\
&\leq 3E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^t f_{\lambda 1} ds\right|^2\right] + 3E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^t g_1 dW(s)\right|^2\right] + 3E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^t h_1 d\tilde{N}(s)\right|^2\right] \\
&\leq 3TE\int_0^r |f_{\lambda 1}|^2 ds + 12E\int_0^r |g_1|^2 ds + 12\lambda E\int_0^r |h_1|^2 ds \\
&\leq 3(T+4+4\lambda)E\int_0^r K_\lambda\left(|x(s) - Z_1(s)|^2 + |x(qs) - Z_2(s)|^2\right) ds
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq 6(T+4+4\lambda)K_\lambda E \int_0^r \left( |x(s)-y(s)|^2 + |y(s)-Z_1(s)|^2 + |x(qs)-y(qs)|^2 + |y(qs)-Z_2(s)|^2 \right) ds \\
&\leq 6(T+4+4\lambda)K_\lambda (C_3+C_4)T\Delta t + 12(T+4+4\lambda)K_\lambda \int_0^r E \left[ \sup_{0 \leq w \leq s} |x(w)-y(w)|^2 \right] ds \\
&= P_1\Delta t + P_2 \int_0^r E \left[ \sup_{0 \leq w \leq s} |x(w)-y(w)|^2 \right] ds.
\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式及  $r \in [0, T]$  的任意性可得

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)-y(t)|^2 \right] \leq C_5\Delta t,$$

其中  $C_5 = P_1 e^{P_2 T}$ ,  $P_1 = 6(T+4+4\lambda)K_\lambda (C_3+C_4)T$ ,  $P_2 = 12(T+4+4\lambda)K_\lambda$ .  $\square$

### 3. 补偿分步 $\theta$ 方法的均方稳定性

考虑 CSS  $\theta$  方法求解非线性带跳的随机比例微分方程(2-1)的均方稳定性。为了讨论稳定性, 我们再假设系数  $f_\lambda$  满足如下条件[8]:

(3) 对  $\forall t \in [0, T]$ ,  $x, y \in R^n$ , 存在正常数  $\mu_1, \mu_2$  使得

$$2xf_\lambda(x, y) \leq -\mu_1|x|^2 + \mu_2|y|^2.$$

定理 3.1 设条件(1)、(2)和(3)成立, 当下列不等式成立:

$$\mu_1 > \mu_2 + 2K_\lambda(2 + \lambda), \quad (3-1)$$

则对任意步长, 方程(2-1)是均方稳定的, 也即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E|x(t)|^2 = 0.$$

证明由方程(2-1)和 Itô 公式, 我们有

$$\begin{aligned}
d|x(t)|^2 &= \left[ 2x(t)f(x(t), x(qt)) + |g(x(t), x(qt))|^2 \right] dt + 2x(t)g(x(t), x(qt))dW(t) \\
&\quad + \left( |x(t)+h(x(t), x(qt))|^2 - |x(t)|^2 \right) dN(t).
\end{aligned}$$

由  $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$ ,  $f_\lambda = f + \lambda h$  我们可得

$$\begin{aligned}
d|x(t)|^2 &= \left[ 2x(t)f(x(t), x(qt)) + |g(x(t), x(qt))|^2 \right] dt + 2x(t)g(x(t), x(qt))dW(t) \\
&\quad + \left( |x(t)+h(x(t), x(qt))|^2 - |x(t)|^2 \right) d\tilde{N}(t) + \lambda \left( |x(t)+h(x(t), x(qt))|^2 - |x(t)|^2 \right) dt \\
&= \left[ 2x(t)f_\lambda(x(t), x(qt)) + |g(x(t), x(qt))|^2 + \lambda |h(x(t), x(qt))|^2 \right] dt \\
&\quad + 2x(t)g(x(t), x(qt))dW(t) + \left( |x(t)+h(x(t), x(qt))|^2 - |x(t)|^2 \right) d\tilde{N}(t).
\end{aligned}$$

定义  $\varphi(t) = E|x(t)|^2$ , 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} &= E \frac{|x(t+\Delta t)|^2 - |x(t)|^2}{\Delta t} \\
&= E \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} \left[ 2x(s)f_\lambda(x(s), x(qs)) + |g(x(s), x(qs))|^2 + \lambda |h(x(s), x(qs))|^2 \right] ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{t+\Delta t} 2x(s)g(x(s), x(qs))dW(s) + \int_t^{t+\Delta t} \left( |x(s)+h(x(s), x(qs))|^2 - |x(s)|^2 \right) d\tilde{N}(s) \right\} \\
&= E \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left[ 2x(s)f_\lambda(x(s), x(qs)) + |g(x(s), x(qs))|^2 + \lambda |h(x(s), x(qs))|^2 \right] ds.
\end{aligned}$$

由控制收敛定理可得

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left( 2x(s) f_\lambda(x(s), x(qs)) + |g(x(s), x(qs))|^2 + \lambda |h(x(s), x(qs))|^2 \right) ds \right] \\ &= E \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left( 2x(s) f_\lambda(x(s), x(qs)) + |g(x(s), x(qs))|^2 + \lambda |h(x(s), x(qs))|^2 \right) ds \right] \\ &= E \left[ 2x(t) f_\lambda(x(t), x(qt)) + |g(x(t), x(qt))|^2 + \lambda |h(x(t), x(qt))|^2 \right]. \end{aligned}$$

因此

$$\varphi'(t) = E \left[ 2x(t) f_\lambda(x(t), x(qt)) + |g(x(t), x(qt))|^2 + \lambda |h(x(t), x(qt))|^2 \right].$$

由条件(3)和(2-3)式, 可得

$$\begin{aligned} & E \left[ 2x(t) f_\lambda(x(t), x(qt)) + |g(x(t), x(qt))|^2 + \lambda |h(x(t), x(qt))|^2 \right] \\ & \leq \left( -\mu_1 E|x(t)|^2 + \mu_2 E|x(qt)|^2 \right) + K(1+\lambda) \left( E|x(t)|^2 + E|x(qt)|^2 \right) \\ & \leq \left( -\mu_1 E|x(t)|^2 + \mu_2 E|x(qt)|^2 \right) + K_\lambda(2+\lambda) \left( E|x(t)|^2 + E|x(qt)|^2 \right) \\ & \leq \left[ -\mu_1 + \mu_2 + 2K_\lambda(2+\lambda) \right] E \left( \sup_{0 \leq s \leq t+\Delta t} |x(s)|^2 \right). \end{aligned}$$

因此, 由  $E \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |x(s)|^2 \right) < \infty$ , 只要  $-\mu_1 + \mu_2 + 2K_\lambda(2+\lambda) < 0$ , 也即  $\mu_1 > \mu_2 + 2K_\lambda(2+\lambda)$ , 即可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E|x(t)|^2 = 0. \quad \square$$

定理 3.2 设条件(1)、(2)、(3)和(3-1)式成立, 总存在一个正数  $h_0$ , 使得当  $\Delta t \in (0, h_0)$  时, CSS  $\theta$  方法(2-6)是均方稳定的, 也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|y_n|^2 = 0.$$

**证明** 由(2-7)式得

$$y_{n+1} = y_n^* + (1-\theta) \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*) + g(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta W_n + h(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta \tilde{N}_n.$$

上式两边平方, 得

$$\begin{aligned} |y_{n+1}|^2 &= |y_n^*|^2 + (1-\theta)^2 (\Delta t)^2 |f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*)|^2 + |g(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta W_n|^2 + |h(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta \tilde{N}_n|^2 \\ &+ 2(1-\theta) \Delta t y_n^* f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*) + 2y_n^* \left( g(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta W_n \right) + 2y_n^* \left( h(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta \tilde{N}_n \right) \\ &+ 2(1-\theta) \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*) \left( g(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta W_n \right) + 2(1-\theta) \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}^*) \left( h(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta \tilde{N}_n \right) \\ &+ 2 \left( g(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta W_n \right) \left( h(y_n^*, y_{[qn]}^*) \Delta \tilde{N}_n \right). \end{aligned} \quad (3-2)$$

由  $E(\Delta W_n) = 0$ ,  $E(\Delta W_n)^2 = \Delta t$ ,  $E(\Delta \tilde{N}_n) = 0$ ,  $E(\Delta \tilde{N}_n)^2 = \lambda \Delta t$ ,  $y_n^*$  与  $y_{[qn]}$  都是  $\mathcal{F}_n$ -可测以及  $\Delta W_n$  与  $\Delta \tilde{N}_n$  相互独立可知

$$\begin{aligned} E \left| g(y_n^*, y_{[qn]}) \Delta W_n \right|^2 &= \Delta t E \left| g(y_n^*, y_{[qn]}) \right|^2, \\ E \left| h(y_n^*, y_{[qn]}) \Delta \tilde{N}_n \right|^2 &= \lambda \Delta t E \left| h(y_n^*, y_{[qn]}) \right|^2. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} Q_n &= 2y_n^* \left( g(y_n^*, y_{[qn]}) \Delta W_n \right) + 2y_n^* \left( h(y_n^*, y_{[qn]}) \Delta \tilde{N}_n \right) + 2(1-\theta) \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) \left( g(y_n^*, y_{[qn]}) \Delta W_n \right) \\ &\quad + 2(1-\theta) \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) \left( h(y_n^*, y_{[qn]}) \Delta \tilde{N}_n \right) + 2 \left( g(y_n^*, y_{[qn]}) \Delta W_n \right) \left( h(y_n^*, y_{[qn]}) \Delta \tilde{N}_n \right), \end{aligned}$$

则  $E(Q_n) = 0$ 。

对(3-2)式取期望, 并由条件(1), 条件(3), (2-3)式, (2-6)式,  $0 \leq K \leq K_\lambda$  及  $0 < \Delta t < 1$ ,  $0 < \theta \leq 1$  可得,

$$\begin{aligned} E|y_{n+1}|^2 &= E|y_n^*|^2 + (1-\theta)^2 (\Delta t)^2 E \left| f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) \right|^2 + \Delta t E \left| g(y_n^*, y_{[qn]}) \right|^2 \\ &\quad + \lambda \Delta t E \left| h(y_n^*, y_{[qn]}) \right|^2 + 2(1-\theta) \Delta t E \left( y_n^* f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) \right) \\ &\leq E|y_n^*|^2 + (1-\theta)^2 (\Delta t)^2 K_\lambda \left( E|y_n^*|^2 + E|y_{[qn]}|^2 \right) + \Delta t K \left( E|y_n^*|^2 + E|y_{[qn]}|^2 \right) \\ &\quad + \lambda \Delta t K \left( E|y_n^*|^2 + E|y_{[qn]}|^2 \right) + (1-\theta) \Delta t \left( -\mu_1 E|y_n^*|^2 + \mu_2 E|y_{[qn]}|^2 \right) \\ &\leq \left( 1 + (1-\theta)^2 (\Delta t)^2 K_\lambda + \Delta t K_\lambda + \lambda \Delta t K_\lambda - (1-\theta) \Delta t \mu_1 \right) E|y_n^*|^2 \\ &\quad + \left( (1-\theta)^2 (\Delta t)^2 K_\lambda + \Delta t K_\lambda + \lambda \Delta t K_\lambda + (1-\theta) \Delta t \mu_2 \right) E|y_{[qn]}|^2 \\ &\leq \left( 1 + \Delta t K_\lambda (2 + \lambda) - (1-\theta) \Delta t \mu_1 \right) E|y_n^*|^2 + \left( \Delta t K_\lambda (2 + \lambda) + (1-\theta) \Delta t \mu_2 \right) E|y_{[qn]}|^2 \\ &= K_1 E|y_n^*|^2 + K_2 E|y_{[qn]}|^2, \end{aligned} \tag{3-3}$$

其中  $K_1 = 1 + \Delta t K_\lambda (2 + \lambda) - (1-\theta) \Delta t \mu_1$ ,  $K_2 = \Delta t K_\lambda (2 + \lambda) + (1-\theta) \Delta t \mu_2$ 。

接下来估计  $E|y_n^*|^2$ , 由(2-7)式得

$$y_n^* - \theta \Delta t f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) = y_n.$$

两边平方后取期望, 由条件(3)得

$$\begin{aligned} E|y_n^*|^2 &\leq E|y_n|^2 + 2\theta \Delta t E \left( y_n^* f_\lambda(y_n^*, y_{[qn]}) \right) \\ &\leq E|y_n|^2 + \theta \Delta t \left( -\mu_1 E|y_n^*|^2 + \mu_2 E|y_{[qn]}|^2 \right). \end{aligned}$$

整理得

$$E|y_n^*|^2 \leq \frac{1}{1 + \theta \Delta t \mu_1} E|y_n|^2 + \frac{\theta \Delta t \mu_2}{1 + \theta \Delta t \mu_1} E|y_{[qn]}|^2.$$

代入(3-3)式得

$$\begin{aligned} E|y_{n+1}|^2 &\leq \frac{K_1}{1+\theta\Delta t\mu_1} E|y_n|^2 + \left(\frac{\theta\Delta t\mu_2 K_1}{1+\theta\Delta t\mu_1} + K_2\right) E|y_{[qn]}|^2 \\ &\leq \left(\frac{K_1 + \theta\Delta t\mu_2 K_1}{1+\theta\Delta t\mu_1} + K_2\right) \max\{E|y_n|^2, E|y_{[qn]}|^2\}. \end{aligned}$$

要使  $E|y_{n+1}|^2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 则要满足

$$\frac{K_1 + \theta\Delta t\mu_2 K_1}{1+\theta\Delta t\mu_1} + K_2 < 1.$$

上式等价于

$$L_1(\Delta t)^2 + L_2\Delta t < 0, \quad (3-4)$$

其中

$$L_1 = \theta K_\lambda (2 + \lambda)(\mu_1 + \mu_2),$$

$$L_2 = 2K_\lambda (2 + \lambda) + (\mu_2 - \mu_1).$$

由  $\theta, K_\lambda, \lambda, \mu_1, \mu_2$  均为正数, 可知  $L_1$  恒大于 0, 由抛物线对称轴的公式及  $\Delta t > 0$  可知, 需满足

$$-\frac{2K_\lambda (2 + \lambda) + (\mu_2 - \mu_1)}{2\theta K_\lambda (2 + \lambda)(\mu_1 + \mu_2)} > 0.$$

从而需满足

$$2K_\lambda (2 + \lambda) + (\mu_2 - \mu_1) < 0.$$

故当  $\mu_1 > \mu_2 + 2K_\lambda (2 + \lambda)$  时, 总存在一个正数  $\tilde{h}_0$ , 使得当  $\Delta t \in (0, \tilde{h}_0)$  时, (3-4) 式成立。由  $L_1(\Delta t)^2 + L_2\Delta t < 0$ , 得

$$\Delta t < -\frac{L_2}{L_1} = \tilde{h}_0.$$

因此, 只要取  $h_0 = \min(1, \tilde{h}_0)$ , 便能保证(3-4)式成立。□

#### 4. 数值算例

考虑如下非线性带跳随机比例微分方程:

$$\begin{cases} dx(t) = ax(t)dt + b \sin x(qt)dW(t) + cx(t)dN(t), 0 < t \leq T \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (4-1)$$

选取如下两组系数:

算例 1:  $a = -3; b = 0.3; c = 4; q = 0.7; \lambda = 0.7$ 。

算例 2:  $a = -2; b = 0.2; c = 1.7; q = 0.8; \lambda = 1$ 。

首先验证补偿分步  $\theta$  方法(2-7)的收敛性。在收敛性试验中, 我们用 1000 个样本轨道平均来模拟数值解的期望。因方程(4-1)没有显式的解析解, 我们用步长为  $\Delta t = 2^{-10}$  得到的数值解来近似地替代解析解。选择四种步长, 分别为  $2\Delta t, 4\Delta t, 8\Delta t, 16\Delta t, \Delta t = 2^{-10}$ , 均方误差  $\varepsilon^r = \varepsilon_{2^{1+r}\Delta t}^r, r = 0, 1, 2, 3$ , 给出了在终点时刻  $T = 1$  处的误差, 选取的 1000 个样本点记为  $\omega_i (1 \leq i \leq 1000)$ , 其均方误差由以下方式估计:

$$\varepsilon^r \cong \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} |x_{r,T}(\omega_i) - Y_{r,n}(\omega_i)|^2$$

在图 1 中我们以对数为底的坐标系中画出  $\sqrt{\varepsilon^r}$ ，并以斜率为 1/2 的红色虚线为参照，从图 1 中可以看出蓝色曲线基本平行于这条参照线。这清楚表明步长分步  $\theta$  方法(2-7)是均方收敛的。

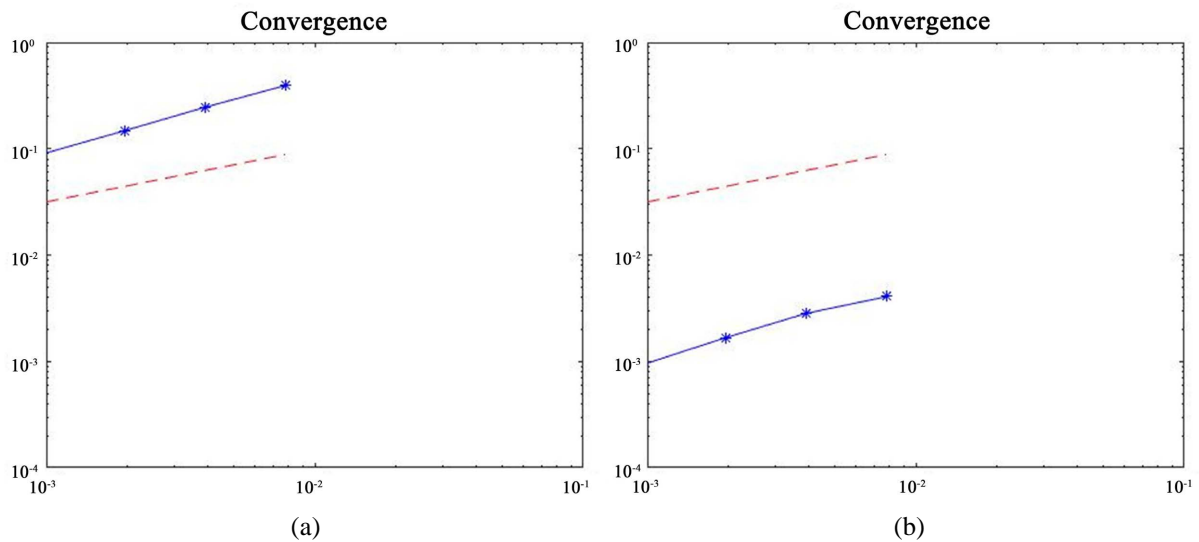


Figure 1. Convergence rate of the CSS  $\theta$  method (left: example 1, right: example 2)

图 1. 补偿分步  $\theta$  方法的收敛性(左: 算例 1, 右: 算例 2)

其次验证补偿分步  $\theta$  方法的稳定性。同样选取上述两组算例，对于算例 1，易知  $f_\lambda = f + \lambda h$  以常数  $K_\lambda = 0.04$  满足全局 Lipschitz 条件，以常数  $\mu_1 = 0.4, \mu_2 = 0$  满足条件(3)，从而满足(3-1)式，因而方程(4-1)的解析解是均方稳定的。同样地，对于算例 2， $K_\lambda = 0.09, \mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0$  也满足(3-1)式，方程的解析解也均方稳定。由定理 3.2 知， $\tilde{h}_0 = -\frac{L_2}{L_1}$ ，对算例 1， $\tilde{h}_0 = 8.518$ ，从而  $h_0 = \min(1, \tilde{h}_0) = 1$ ，因此保持数值方法稳定的步长范围是开区间  $(0, 1)$ ；而对算例 2， $\tilde{h}_0 = 0.740$ ，从而  $h_0 = \min(1, \tilde{h}_0) = 0.74$ ，因此保持数值方法稳定的步长范围是开区间  $(0, 0.74)$ 。

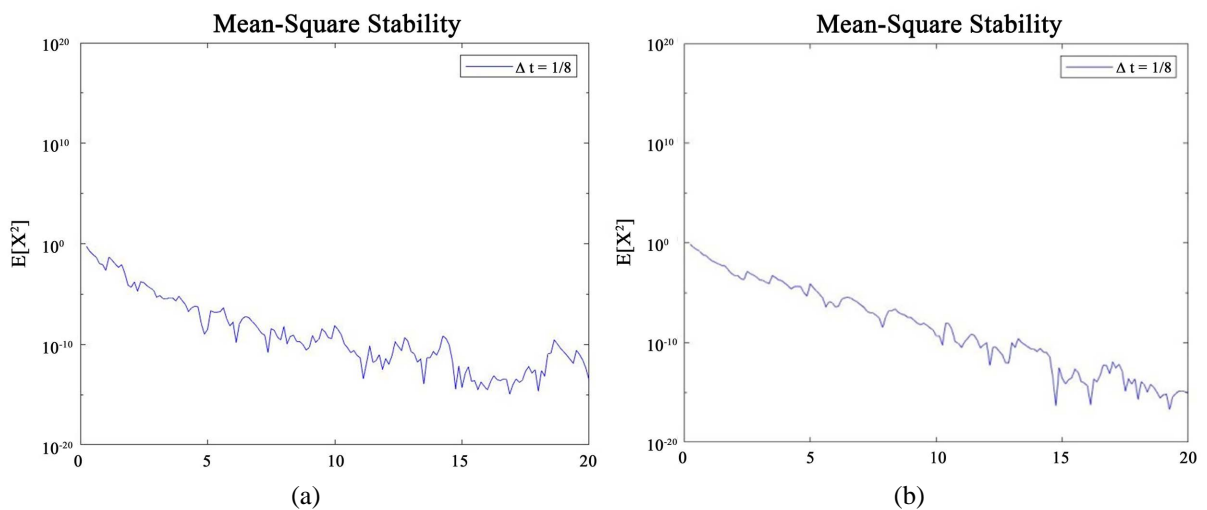
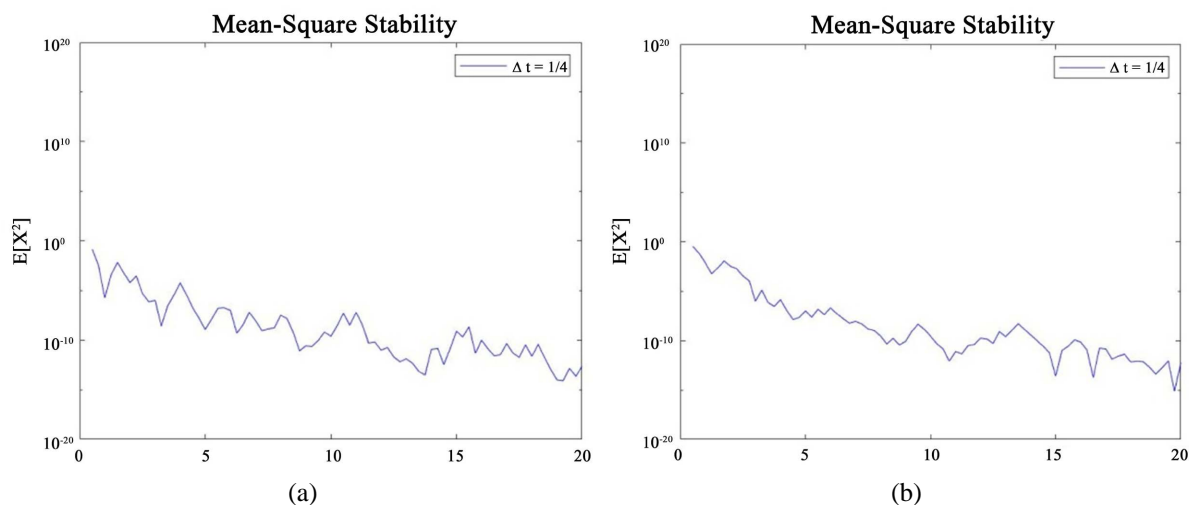


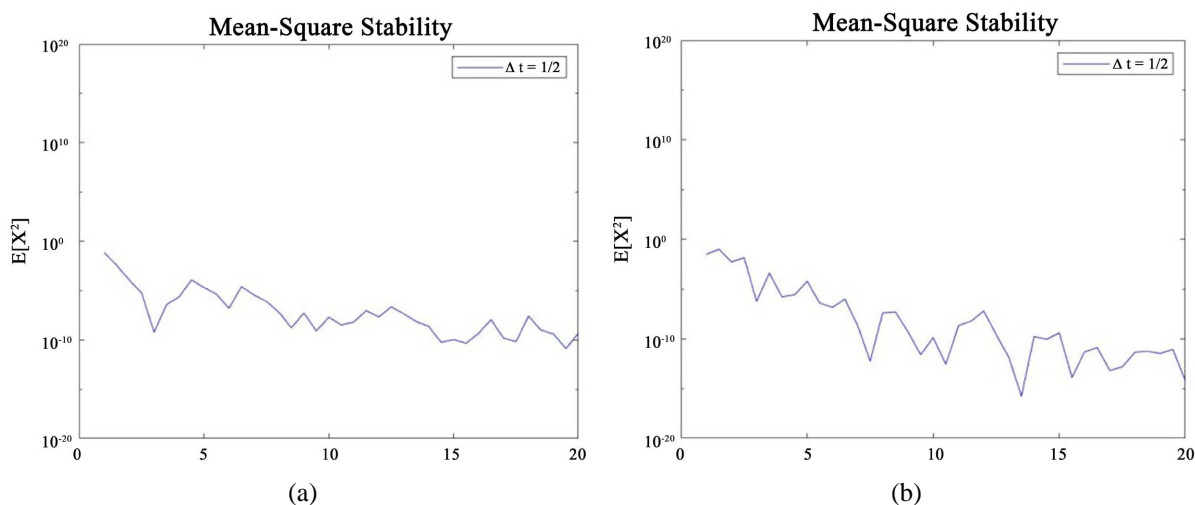
Figure 2. Mean-square stability of the CSS  $\theta$  method (left: example 1, right: example 2;  $\Delta t = 0.125$ )

图 2. 补偿分步  $\theta$  方法的均方稳定性(左: 算例 1, 右: 算例 2;  $\Delta t = 0.125$ )



**Figure 3.** Mean-square stability of the CSS  $\theta$  method (left: example 1, right: example 2;  $\Delta t = 0.25$ )

**图 3.** 补偿分步  $\theta$  方法的均方稳定性(左: 算例 1, 右: 算例 2;  $\Delta t = 0.25$ )



**Figure 4.** Mean-square stability of the CSS  $\theta$  method (left: example 1, right: example 2;  $\Delta t = 0.5$ )

**图 4.** 补偿分步  $\theta$  方法的均方稳定性(左: 算例 1, 右: 算例 2;  $\Delta t = 0.5$ )

图 2~4 表明了当步长  $\Delta t = 0.5, 0.25, 0.125$  时, 补偿分步  $\theta$  方法都保持稳定, 这与上述分析一致。

## 参考文献

- [1] Ockendon, J.R. and Tayler, A.B. (1971) The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive. *Proceedings of the Royal Society A. Mathematical and Physical Sciences*, **322**, 447-468. <https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078>
- [2] 毛伟. 一类带跳的随机比例微分方程解的存在唯一性和 Euler 数值方法的收敛性[J]. 江苏教育学院学报(自然科学版), 2007(4): 1-5.
- [3] Mao, W., Han, X.J. and Chen, B. (2011) The Semi-Implicit Euler Method for Stochastic Pantograph Equations with Jumps. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, **3**, 405-409.
- [4] Mao, W. and Mao, X.R. (2013) Approximate Solutions of Hybrid Stochastic Pantograph Equations with Levy Jumps. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID: 718627. <https://doi.org/10.1155/2013/718627>
- [5] Hu, L. and Gan, S.Q. (2013) Numerical Analysis of the Balanced Implicit Methods for Stochastic Pantograph Equations with Jumps. *Applied Mathematics and Computation*, **223**, 281-297. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.08.021>

- [6] Yang, H. and Jiang, F. (2014) Stochastic-Methods for a Class of Jump-Diffusion Stochastic Pantograph Equations with Random Magnitude. *The Scientific World Journal*, **2014**, Article ID: 589167. <https://doi.org/10.1155/2014/589167>
- [7] Lu, Y.L., Song, M.H. and Liu, M.Z. (2018) Convergence and Stability of the Compensated Split-Step Theta Method for Stochastic Differential Equations with Piecewise Continuous Arguments Driven by Poisson Random Measure. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **340**, 296-317. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.02.039>
- [8] Xiao, Y., Eissa, M.A. and Tian, B.P. (2017) Convergence and Stability of Split-Step Theta Methods with Variable Step-Size for Stochastic Pantograph Differential Equations. *International Journal of Computer Mathematics*, **95**, 939-960. <https://doi.org/10.1080/00207160.2017.1299862>