

# $mC_{12}$ 的点被多重集可区别的I-全染色和VI-全染色

王 辰

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2024年3月5日; 录用日期: 2024年3月27日; 发布日期: 2024年4月30日

## 摘 要

通过构造以多重色集合和空集为元素的矩阵, 应用组合分析法及构造具体染色的方法, 得到了 $mC_{12}$ 的点被多重色集合可区别的I-全染色和VI-全染色的全色数及最优染色方案。

## 关键词

$mC_{12}$ , I-全染色, VI-全染色, 多重集, 色集合, 点可区别

# I-Total Coloring and VI-Total Coloring of $mC_{12}$ Which Are Vertex-Distinguishing by Multiple Sets

Chen Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 5<sup>th</sup>, 2024; accepted: Mar. 27<sup>th</sup>, 2024; published: Apr. 30<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

By constructing matrix with multi color sets and empty sets as elements, using the methods of combinatorial analysis and describing coloring explicitly, we obtain the total chromatic number of I-total coloring and VI-total coloring of  $mC_{12}$  which are vertex-distinguishing by multiple sets and determine strategy of the optimal coloring.

## Keywords

$mC_{12}$ , I-Total Coloring, VI-Total Coloring, Multi-Set, Color Set, Vertex-Distinguishing



## 1. 引言

本文所探讨的图均为有限简单无向图。关于图的点可区别正常边染色与图的点可区别一般边染色目前已有较多结论[1]-[7]。2008年, Zhang [8]等提出了点可区别的全染色及相关猜想, 图的点可区别 I-全染色及相关猜想由 Chen 等[9]在 2014 年给出。对于图在非多重集上的点可区别的未必正常的全染色已有许多研究[10] [11] [12]。图的任意两个不同顶点被非多重集合可区别的一般边染色已有一定的研究进展[13]。本文考虑图在多重集上的点可区别的一类未必正常全染色。

设  $f:V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,l\}$  为图  $G$  的一个一般全染色(未必正常)。若对  $\forall u,v \in V, u \neq v, uv \in E$ , 有  $f(u) \neq f(v)$ , 且  $\forall uv, vw \in E, uv \neq vw$ , 有  $f(uv) \neq f(vw)$ , 则称该染色  $f$  为图  $G$  的 I-全染色。若在  $f$  下图  $G$  的任意两条相邻边染以不同颜色, 则称  $f$  为 VI-全染色。显然 I-全染色是 VI-全染色。图  $G$  使用了  $l$  种颜色进行 I-全染色(VI-全染色), 称为图  $G$  的  $l$ -I-全染色( $l$ -VI-全染色)。

设  $f$  为图  $G$  的一般全染色。对  $\forall x \in V(G)$ , 将  $\tilde{C}_f(x)$  或  $\tilde{C}(x)$  (不引起混淆时)称为点  $x$  的多重色集合, 是由点  $x$  的颜色与点  $x$  关联的边的颜色构成。

显然有  $|\tilde{C}_f(x)| = d_G(x) + 1$ , 若称  $f$  是点被多重色集合可区别的, 是指对  $\forall u, v \in G$ , 总有  $\tilde{C}(u) \neq \tilde{C}(v)$ 。令

$$\tilde{\chi}_{vi}^i(G) = \min \{l \mid G \text{ 存在点被多重色集合可区别的 } l\text{-I-全染色}\},$$

$$\tilde{\chi}_{vi}^{vi}(G) = \min \{l \mid G \text{ 存在点被多重色集合可区别的 } l\text{-VI-全染色}\}.$$

将  $\tilde{\chi}_{vi}^i(G)$  称为点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全色数, 将  $\tilde{\chi}_{vi}^{vi}(G)$  称为点被多重色集合可区别的  $l$ -VI-全色数。用  $n_i(G)$  表示图  $G$  的度为  $i$  的顶点的个数,  $\delta \leq i \leq \Delta$ , 这里  $\delta$  和  $\Delta$  分别表示图  $G$  的最小度和最大度。规定

$$\tilde{\zeta}(G) = \min \left\{ l \mid i \binom{l}{i} + \binom{l}{i+1} \geq n_i, \delta \leq i \leq \Delta \right\}$$

上式中加号前面的项表示点的色是其关联边的颜色之一,  $\binom{l}{i}$  表示从  $l$  种互异的颜色中取出  $i$  种互不相同的颜色的取法数, 对每种这样的取法, 点的色的取法共有  $i$  种, 因此共有  $i \binom{l}{i}$  种; 加号后面的项表示点的色不是其关联边的颜色, 此时点的多重色集合里的  $i+1$  种颜色互不相同, 具有这种特点的  $i+1$ -子集, 共有  $\binom{l}{i+1}$  个。

**命题 1.1**  $\tilde{\chi}_{vi}^i(G) \geq \tilde{\chi}_{vi}^{vi}(G) \geq \tilde{\zeta}(G)$

显然图  $G$  的点被多重色集合可区别的 I-全染色一定是图的点被多重色集合可区别的 VI-全染色, 因此本文只需讨论图的最优点被多重色集合可区别的 I-全染色, 从而得到图的最优点被多重色集合可区别的 VI-全染色。

## 2. 准备工作

为了方便在定理证明过程中构造最优的点被多重色集合可区别的 I-全染色和 VI-全染色, 我们先定

义一类矩阵。对任意的  $l \geq 10$ ，构造  $(l-1) \times l$  矩阵  $A_l$ ，使矩阵  $A_l$  的元素是集合  $\{1, 2, \dots, l\}$  的含  $l$  的多重 3-子集或空集，对其进行分类： $\{l, i, i\}, \{l, l, i\}, \{l, i, j\}, 1 \leq i < j \leq l-1$ ，这 3 类子集在  $A_l$  中仅出现一次；其中第  $i$  行含有  $i-1$  个  $\emptyset$ ：

$$A_l = \begin{pmatrix} \{l, 1, 1\} & \{l, l, 1\} & \{l, 1, 2\} & \cdots & \{l, l-3, l-2\} & \{l, l-2, l-1\} \\ \{l, 2, 2\} & \{l, l, 2\} & \{l, 1, 3\} & \cdots & \{l, l-3, l-1\} & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \{l, l-2, l-2\} & \{l, l, l-2\} & \{l, 1, l-1\} & \cdots & \emptyset & \emptyset \\ \{l, l-1, l-1\} & \{l, l, l-1\} & \emptyset & \cdots & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

设  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq l, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq l-1$ ，用  $A_l(i_1, i_2, \dots, i_r | j_1, j_2, \dots, j_s)$  表示矩阵  $A_l$  的位于第  $i_1, i_2, \dots, i_r$  行和第  $j_1, j_2, \dots, j_s$  列相交处的元素按其在原矩阵中的相对位置构成  $r \times s$  阶子矩阵。

**定义 1** 矩阵  $A_l$  的 12 个元素(非空)恰为  $C_{12}$  的某个点被多重色集合可区别的 I-全染色下  $C_{12}$  全体顶点的多重色集合，则称由这 12 个元素构成的组为一个好组。

**引理 1** 若  $l \equiv 1 \pmod{3} (l \geq 10)$ ，则  $A_l$  的染色方案为确定每 3 行 4 列共 12 个 3-子集为：

$$A_l(i_1, i_2, i_3 | j_{s_1}, j_{s_2}, j_{s_3}, j_{s_4})(i_1 \equiv 1 \pmod{3}, i_2 = i_1 + 1, i_3 = i_2 + 1; j_{s_1} \equiv 1 \pmod{4}),$$

$$(j_{s_2} = j_{s_1} + 1, j_{s_3} = j_{s_2} + 1, j_{s_4} = j_{s_3} + 1) \text{ 为一个好组, 对 } C_{12} \text{ 的全体顶点进行分配。}$$

当  $j_{s_1} = 1, j_{s_2} = 2, j_{s_3} = 3, j_{s_4} = 4$ ，即前 4 列  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 1, 2, 3, 4)$  中各顶点色集合为：组成一个好组，称这种染色方案为  $[l; m]$ -I-型染色方案。前 4 列进行染色后，第 5 列及之后的  $(l-5)$  列的 3 行 4 列子矩阵，

$A_l(i_1, i_2, i_3 | j_{s_1}, j_{s_2}, j_{s_3}, j_{s_4})(i_2 = i_1 + 1, i_3 = i_2 + 1, i_1 \equiv 1 \pmod{3}; j_{s_1} \equiv 1 \pmod{4}, j_{s_2} = j_{s_1} + 1, j_{s_3} = j_{s_2} + 1, j_{s_4} = j_{s_3} + 1, j_{s_1} \geq 5)$  中各顶点色集合为： $\{l, p+3, q+4\}, \{l, p+1, q+2\}, \{l, p+2, q+3\}, \{l, p+3, q+4\}, \{l, p, q\}, \{l, p+1, q+1\}, \{l, p+2, q+2\}, \{l, p+3, q+3\}, \{l, p, q+1\}, \{l, p+1, q+2\}, \{l, p+2, q+3\}, \{l, p+4, q+5\} (q \equiv 1 \pmod{4}, q \geq 4)$  组成一个好组，称这种染色方案为  $[l; p, q]$ -II-型染色方案。

经过 I、II-型染色方案选出了所有的好组，剩下的非好组在每个  $A_l(i_1, i_2, i_3 | j_{s_1}, j_{s_2}, j_{s_3}, j_{s_4})$  下进行相应的补法，补足为  $C_{12}$  的好组。

当  $l \equiv 1 \pmod{3} (l \geq 10)$  时，经过 I-型染色方案染色后，子矩阵  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 1, 2, 3, 4)$  剩下的非好组 3-子集共 9 个： $\{l, l, l-3\}, \{l, 1, l-2\}, \{l, 2, l-1\}, \{l, l-2, l-2\}, \{l, l, l-2\}, \{l, 1, l-1\}, \{l, l, l-1\}, \{l, l-1, l-1\}, \{l, l-3, l-3\}$ ，再补足 3 个 3-子集即补足为一个  $C_{12}$  的好组；子矩阵  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 5, 6, 7, 8)$  剩下的 6 个非好组 3-子集，从中选取 3 个 3-子集： $\{l, 3, l-3\}, \{l, 3, l-2\}, \{l, 3, l-1\}$  与  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 1, 2, 3, 4)$  剩下的 9 个非好组 3-子集凑成一个  $C_{12}$  的好组，称此补法为  $\alpha_1$ -补法。经过 II-型染色方案染色后，第 9 列及之后的  $(l-9)$  列剩下的非好组 3-子集分为：3 行 3 列的非好组 3-子集，4 行 4 列的非好组 3-子集，5 行 4 列的非好组 3-子集，这 3 类非好组 3-子集循环出现。3 行 3 列中的非好组 3-子集共 6 个： $\{l, m+1, l-1\}, \{l, m+1, l-2\}, \{l, m+2, l-1\}, \{l, m, l-2\}, \{l, m, l-2\}, \{l, m, l-3\}, \{l, m, l-1\}, (m \equiv 3 \pmod{12})(m > 3)$  4 行 4 列中的非好组 3-子集共 10 个，其中  $\{l, n, l-1\}$  与 5 行 4 列中的 11 个非好组 3-子集，凑成一个  $C_{12}$  的好组，称此补法为  $\alpha_2$ -补法，那么经过  $\alpha_2$ -补法后 5 行 4 列的非好组 3-子集还剩下 3 个： $\{l, p, l-2\}, \{l, p, l-1\}, \{l, p+1, l-1\}$ ，4 行 4 列的非好组 3-子集还剩下 9 个。那么在  $\alpha_2$ -补法补足一个  $C_{12}$  的好组后，将 4 行 4 列剩下的 9 个非好组 3-子集与 3 行 3 列中的 3 个非好组 3-子集： $\{l, m, l-3\}, \{l, m, l-2\}, \{l, m, l-1\}$  凑成一个  $C_{12}$  的好组，称此补法为  $\alpha_3$ -补法。

综上， $l \equiv 1 \pmod{3} (l \geq 10)$  时，在使用了所有可实行的 I、II-型染色方案和  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ -补法，找到所有  $C_{12}$  的好组后，剩下的 3-子集： $\{l, 4, l-2\}, \{l, 5, l-1\}, \{l, 4, l-1\}, \{l, m+1, l-2\}, \{l, m+2, l-1\}, \{l, m+1, l-1\} (m \equiv 3 \pmod{12}, m > 3) \{l, p, l-2\}, \{l, p, l-1\}, \{l, p+1, l-1\} (p \equiv 7 \pmod{12})$  (如果  $m, p$  存在的话,  $m, p < l$ )。

**引理 2** 若  $l \equiv 2 \pmod{3} (l \geq 10)$ , 经过引理 1 中的 I、II-型染色方案选出了所有的好组, 剩下的非好组在每个  $A_l(i_1, i_2, i_3 | j_{s_1}, j_{s_2}, j_{s_3}, j_{s_4})$  下进行相应的补法, 补足为  $C_{12}$  的好组。

当  $l \equiv 2 \pmod{3} (l \geq 10)$  时, 经过 I-染色方案染色后, 子矩阵  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 1, 2, 3, 4)$  剩下的非好组 3-子集共 13 个:  $\{l, l-1, l-1\}, \{l, l, l-1\}, \{l, l-4, l-4\}, \{l, l, l-4\}, \{l, 1, l-3\}, \{l, 2, l-2\}, \{l, l-3, l-3\}, \{l, l, l-3\}, \{l, 1, l-2\}, \{l, 2, l-1\}, \{l, l-2, l-2\}, \{l, l, l-2\}, \{l, 1, l-1\}$ ; 选取子矩阵  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 5, 6, 7, 8)$  剩下的非好组 3-子集中的 1 个:  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 1, 2, 3, 4)$  与  $\{l, 3, l-1\}$  剩下的非好组 3-子集中的 11 个 3-子集凑成一个  $C_{12}$  的好组  $\{l, l-4, l-4\}, \{l, l, l-4\}, \{l, 1, l-3\}, \{l, 2, l-2\}, \{l, l-3, l-3\}, \{l, l, l-3\}, \{l, 1, l-2\}, \{l, 2, l-1\}, \{l, l-2, l-2\}, \{l, 1, l-1\}, \{l, l, l-2\}$ , 称此补法为  $\beta_1$ -补法。使用  $\beta_1$ -补法后,  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 1, 2, 3, 4)$  剩下 2 个非好组 3-子集:  $\{l, l-1, l-1\}, \{l, l, l-1\}$ 。第 5 列及之后的  $(l-5)$  列剩下的非好组 3-子集分为: 4 行 4 列的非好组 3-子集, 3 行 3 列的非好组 3-子集, 5 行 4 列的非好组 3-子集, 这三类非好组 3-子集循环出现。4 行 4 列中的非好组 3-子集共 10 个:  $\{l, n+2, l-2\}, \{l, n+3, l-1\}, \{l, n+1, l-1\}, \{l, n+1, l-2\}, \{l, n+2, l-1\}, \{l, n+1, l-3\}, \{l, n, l-2\}, \{l, n, l-1\}, \{l, n, l-3\}, \{l, n, l-4\}, (n \equiv 3 \pmod{12})$ , 3 行 3 列中的非好组 3-子集共 6 个:  $\{l, m, l-3\}, \{l, m+1, l-2\}, \{l, m+2, l-1\}, \{l, m+1, l-2\}, \{l, m+1, l-1\}, \{l, m, l-1\} (m \equiv 7 \pmod{12})$ , 将 3 行 3 列中的非好组中的  $\{l, m, l-3\}, \{l, m, l-2\}, \{l, m, l-1\}$  和 4 行 4 列中的前 9 个非好组, 凑成一个  $C_{12}$  的好组, 称此补法为  $\beta_2$ -补法, 使用  $\beta_2$ -补法后, 剩下 3 行 3 列中的 3 个非好组 3-子集:  $\{l, m+1, l-2\}, \{l, m+2, l-1\}, \{l, m+1, l-1\}, \{l, m+1, l-2\}, \{l, m+2, l-1\}, \{l, m+1, l-1\}$ 。再将 4 行 4 列剩下的最后一个非好组  $\{l, n, l-1\}$ ,  $(n \equiv 3 \pmod{12})$  与 5 行 4 列中的 11 个非好组凑成一个  $C_{12}$  的好组, 称此补法为  $\beta_3$ -补法, 使用  $\beta_3$ -补法后, 剩下 5 行 4 列中的 3 个非好组 3-子集:  $\{l, p, l-2\}, \{l, p, l-1\}, \{l, p+1, l-1\}$ 。

综上,  $l \equiv 2 \pmod{3} (l \geq 11)$  时, 在使用了所有可实行的 I、II-型染色方案和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法, 找到所有  $C_{12}$  的好组后, 剩下的 3-子集:  $\{l, l-1, l-1\}, \{l, l, l-1\}, \{l, m+1, l-2\}, \{l, m+2, l-1\}, \{l, m+1, l-1\}, \{l, p, l-2\}, \{l, p, l-1\}, \{l, p+1, l-1\} (m \equiv 7 \pmod{12}) (p \equiv 11 \pmod{12})$  (如果  $m, p$  存在的话,  $m, p < l$ )。

**引理 3** 若  $l \equiv 0 \pmod{3} (l \geq 10)$ , 经过引理 1 中的 I、II-型染色方案选出了所有的好组, 剩下的非好组在每个  $A_l(i_1, i_2, i_3 | j_{s_1}, j_{s_2}, j_{s_3}, j_{s_4})$  下进行相应的补法, 补足为  $C_{12}$  的好组。

当  $l \equiv 0 \pmod{3} (l \geq 10)$  时, 经过 I-染色方案染色后, 子矩阵  $A_l(i_1, i_2, i_3 | 1, 2, 3, 4)$  剩下的非好组 3-子集共 5 个:  $\{l, l-1, l-1\}, \{l, l, l-1\}, \{l, l-2, l-2\}, \{l, l, l-2\}, \{l, 1, l-1\}$ 。第 5 列及之后的  $(l-5)$  列剩下的非好组 3-子集分为: 5 行 4 列的非好组 3-子集, 4 行 4 列的非好组 3-子集, 3 行 3 列的非好组 3-子集, 这三类非好组 3-子集循环出现。3 行 3 列中的非好组 3-子集共 6 个, 4 行 4 列中的非好组 3-子集共 10 个, 将 3 行 3 列中的非好组中的  $\{l, m, l-3\}, \{l, m, l-2\}, \{l, m, l-1\}$  和 4 行 4 列中的前 9 个非好组, 凑成一个  $C_{12}$  的好组, 称此补法为  $\gamma_1$ -补法, 使用  $\gamma_1$ -补法后, 剩下 3 行 3 列中的 3 个非好组 3-子集:  $\{l, m+1, l-2\}, \{l, m+2, l-1\}, \{l, m+1, l-1\}, (m \equiv 11 \pmod{12})$ 。将 4 行 4 列剩下的最后一个非好组  $\{l, n, l-1\} (n \equiv 7 \pmod{12})$  与 5 行 4 列中的 11 个非好组凑成一个  $C_{12}$  的好组, 称此补法为  $\gamma_2$ -补法, 使用  $\gamma_2$ -补法后, 剩下 5 行 4 列中的 3 个非好组 3-子集:  $\{l, p, l-2\}, \{l, p+1, l-1\}, \{l, p, l-1\}, (p \equiv 3 \pmod{12})$ 。

综上,  $l \equiv 0 \pmod{3} (l \geq 10)$  时, 在使用了所有可实行的 I、II-型染色方案和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法, 找到所有  $C_{12}$  的好组后, 剩下的 3-子集:  $\{l, l-1, l-1\}, \{l, l, l-1\}, \{l, m+1, l-2\}, \{l, m+2, l-1\}, \{l, m+1, l-1\}, \{l, p, l-2\}, \{l, p, l-1\}, \{l, p+1, l-1\}, \{l, l-2, l-2\}, \{l, l, l-2\}, \{l, 1, l-1\}, (m \equiv 11 \pmod{12}, p \equiv 3 \pmod{12})$  (如果  $m, p$  存在的话,  $m, p < l$ )。

### 3. 主要结果及其证明

**定理 3.1** 若  $2 \binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} < 12m < 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3}, l \leq 4, m \geq 1$ , 则  $\tilde{\chi}_{vt}^i(mC_{12}) = l$ 。

证明: 显然  $l = \tilde{\zeta}(mC_{12}) \leq \tilde{\chi}_{vr}^i(G)$ , 因此我们可直接对  $mC_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

1)  $\tilde{\chi}_{vr}^i(C_{12}) = 4$ , 显然  $2\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 7 < 12$ , 不是  $C_{12}$  的一个好组, 于是必有  $\tilde{\chi}_{vr}^i(C_{12}) \geq 5$ , 对第一个  $C_{12}$  分配以:  $\{1,1,2\}, \{2,2,1\}, \{1,3,3\}, \{3,1,1\}, \{1,2,3\}, \{3,3,2\}, \{3,4,4\}, \{4,3,1\}, \{2,2,3\}, \{4,2,2\}, \{2,4,1\}$  进行点被多重色集合可区别的 4-I-全染色, 则不是在该染色下的  $C_{12}$  的任意顶点的 4 个 3-子集为:  $\{4,1,4\}, \{4,2,3\}, \{4,2,4\}, \{4,3,3\}$ 。

2)  $\tilde{\chi}_{vr}^i(2C_{12}) = 5$ , 显然  $2\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 16 < 24$ , 在上述  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的 4-I-全染色的基础上, 给第 2 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 5-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{5,1,1\}, \{1,4,4\}, \{4,1,5\}, \{5,1,2\}, \{2,3,4\}, \{4,4,2\}, \{2,2,5\}, \{5,2,3\}, \{3,3,4\}, \{4,2,5\}, \{5,5,3\}, \{3,3,5\}$  进行点被多重色集合可区别的 5-I-全染色, 则不是在该染色下的  $C_{12}$  的任意顶点的 6 个 3-子集为:  $\{5,1,3\}, \{5,5,1\}, \{5,2,5\}, \{5,3,4\}, \{5,4,4\}, \{5,4,5\}$ 。

3)  $\tilde{\chi}_{vr}^i(mC_{12}) = 6$ ,  $3 \leq m \leq 4$ , 在已构造的  $2C_{12}$  的点被多重色集合可区别的 5-I-全染色的基础上, 从第 3 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 6-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{6,1,1\}, \{1,5,5\}, \{5,6,1\}, \{1,3,5\}, \{5,6,2\}, \{2,5,5\}, \{5,3,4\}, \{4,4,5\}, \{5,5,4\}, \{4,1,6\}, \{6,5,5\}, \{5,6,6\}$ ; 第 4 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 6-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{6,2,1\}, \{1,3,6\}, \{6,2,2\}, \{2,6,6\}, \{6,3,2\}, \{2,4,6\}, \{6,3,3\}, \{3,4,6\}, \{6,5,3\}, \{3,6,6\}, \{6,4,4\}, \{4,5,6\}$  进行点被多重色集合可区别的 6-I-全染色, 则不是在该染色下的  $4C_{12}$  的任意顶点的 6 个 3-子集为:  $\{5,1,3\}, \{5,5,1\}, \{5,2,5\}, \{5,3,4\}, \{5,4,4\}, \{5,4,5\}$ 。

4)  $\tilde{\chi}_{vr}^i(mC_{12}) = 7$ ,  $5 \leq m \leq 6$ , 在已构造的  $4C_{12}$  的点被多重色集合可区别的 6-I-全染色的基础上, 从第 5 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 7-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{7,1,1\}, \{1,6,6\}, \{6,5,7\}, \{7,7,1\}, \{1,2,7\}, \{7,3,1\}, \{1,4,7\}, \{7,5,1\}, \{1,7,6\}, \{6,6,4\}, \{4,7,2\}, \{2,3,7\}$ ; 第 4 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 7-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{7,2,2\}, \{2,7,6\}, \{6,6,7\}, \{7,4,3\}, \{3,3,7\}, \{7,4,6\}, \{6,3,7\}, \{7,4,4\}, \{4,7,5\}, \{5,3,7\}, \{7,2,5\}, \{5,5,7\}$  进行点被多重色集合可区别的 7-I-全染色, 则不是在该染色下的  $6C_{12}$  的任意顶点的 5 个 3-子集为:  $\{2,7,7\}, \{3,7,7\}, \{4,7,7\}, \{5,7,7\}, \{6,7,7\}$ 。

5)  $\tilde{\chi}_{vr}^i(mC_{12}) = 8$ ,  $7 \leq m \leq 9$ , 在已构造的  $6C_{12}$  的点被多重色集合可区别的 7-I-全染色的基础上, 从第 7 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 8-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{8,1,1\}, \{1,8,2\}, \{2,7,7\}, \{7,1,8\}, \{8,6,1\}, \{1,8,8\}, \{8,1,5\}, \{5,7,7\}, \{7,2,8\}, \{8,4,1\}, \{1,8,5\}, \{5,2,8\}$ ; 第 8 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 8-I-全染色, 分配如下 3-子集:

$\{8,1,3\}, \{3,7,7\}, \{7,3,8\}, \{8,2,2\}, \{2,3,8\}, \{8,2,4\}, \{4,7,7\}, \{7,4,8\}, \{8,5,6\}, \{6,7,7\}, \{7,8,5\}, \{5,5,8\}$ ; 第 9 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 8-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{8,6,2\}, \{2,8,8\},$

$\{8,2,7\}, \{7,7,6\}, \{6,4,8\}, \{8,3,3\}, \{3,8,8\}, \{8,4,3\}, \{3,7,8\}, \{8,6,3\}, \{3,8,5\}, \{5,4,8\}$  进行点被多重色集合可区别的 8-I-全染色, 则不是在该染色下的  $9C_{12}$  的任意顶点的 4 个 3-子集为:  $\{4,8,8\}, \{5,8,8\}, \{6,8,8\}, \{7,8,8\}$ 。

6)  $\tilde{\chi}_{vr}^i(mC_{12}) = 9$ ,  $10 \leq m \leq 13$ , 在已构造的  $9C_{12}$  的点被多重色集合可区别的 8-I-全染色的基础上, 从第 10 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 9-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{9,1,1\}, \{1,9,9\}, \{9,1,2\}, \{2,9,9\}, \{9,1,3\}, \{3,9,9\}, \{9,1,4\}, \{4,9,9\}, \{9,1,5\}, \{5,9,9\}, \{9,1,6\}, \{6,9,9\}$ ; 第 11 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 9-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{9,1,7\}, \{7,8,8\}, \{8,9,9\}, \{9,1,8\}, \{8,2,9\}, \{9,2,2\}, \{2,3,9\}, \{9,2,4\}, \{4,8,8\}, \{8,7,9\}, \{9,9,7\}, \{7,7,9\}$ ; 第 12 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 9-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{9,2,5\}, \{5,8,8\}, \{8,6,9\}, \{9,2,6\}, \{6,8,8\}, \{8,3,9\}, \{9,7,2\}, \{2,8,9\}, \{9,3,3\}, \{3,4,9\}, \{9,5,3\}, \{3,6,9\}$ ; 第 13 个  $C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的 9-I-全染色, 分配如下 3-子集:  $\{9,3,7\}, \{7,8,8\}, \{8,4,9\}, \{9,5,4\}, \{4,7,9\}, \{9,4,4\}, \{4,6,9\},$



$\{9,5,5\},\{5,6,9\},\{9,7,5\},\{5,9,8\},\{8,8,9\}$ 。此时共染色 13 个  $C_{12}$ ，没有剩余的 3-子集。

从正整数 9 开始递增，递归地进行如下过程，在已构造好的  $\left\lfloor \frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} \right] \right\rfloor$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $(l-1)$ -I-全染色的基础上，对第  $\left\lfloor \frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} \right] \right\rfloor + 1$  个  $C_{12}$  到第  $\left\lfloor \frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] \right\rfloor$  个  $C_{12}$  的染色方案，叙述如下：

**情形 1** 当  $l \equiv 10 \pmod{72}$ ， $l \geq 10$  时，由引理 1 经过  $[l;m]$ -I-型染色和  $[l;p,q]$ -II-型染色，选出所有  $C_{12}$  的好组，再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后，可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 6 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 2** 当  $l \equiv 11 \pmod{72}$ ， $l \geq 11$  时，由引理 2 经过  $[l;m]$ -I-型染色和  $[l;p,q]$ -II-型染色，选出所有  $C_{12}$  的好组，再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后，将剩下的部分非好组 3-子集补足为  $C_{12}$  的好组，可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 11 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 3** 当  $l \equiv 12 \pmod{72}$ ， $l \geq 12$  时，由引理 3 经过  $[l;m]$ -I-型染色和  $[l;p,q]$ -II-型染色，选出所有  $C_{12}$  的好组，再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后，将剩下的部分非好组 3-子集补足为  $C_{12}$  的好组，可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 16 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色，此时得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 4 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 4** 当  $l \equiv 13 \pmod{72}$ ， $l \geq 13$  时，由引理 1 经过  $[l;m]$ -I-型染色和  $[l;p,q]$ -II-型染色，选出所有  $C_{12}$  的好组，再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后，可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 10 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 5** 当  $l \equiv 14 \pmod{72}$ ， $l \geq 14$  时，由引理 2 经过  $[l;m]$ -I-型染色和  $[l;p,q]$ -II-型染色，选出所有  $C_{12}$  的好组，再经  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  过 - 补法后，可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 18 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色，此时得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 6 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 6** 当  $l \equiv 15 \pmod{72}$ ， $l \geq 15$  时，由引理 3 经过  $[l;m]$ -I-型染色和  $[l;p,q]$ -II-型染色，选出所有  $C_{12}$  的好组，再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后，可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 17 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色，此时得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 5 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 7** 当  $l \equiv 16 \pmod{72}$ ， $l \geq 16$  时，由引理 1 经过  $[l;m]$ -I-型染色和  $[l;p,q]$ -II-型染色，选出所有  $C_{12}$  的好组，再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后，可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 8 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 8** 当  $l \equiv 17 \pmod{72}$ ， $l \geq 17$  时，由引理 2 经过  $[l;m]$ -I-型染色和  $[l;p,q]$ -II-型染色，选出所有  $C_{12}$  的好组，再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后，可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 16 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

全染色；此时得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 4 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 9** 当  $l \equiv 18 \pmod{72}$ ,  $l \geq 18$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 18 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 此时得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 6 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 10** 当  $l \equiv 19 \pmod{72}$ ,  $l \geq 19$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 3 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 11** 当  $l \equiv 20 \pmod{72}$ ,  $l \geq 20$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 8 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 12** 当  $l \equiv 21 \pmod{72}$ ,  $l \geq 21$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 22 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 10 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 13** 当  $l \equiv 22 \pmod{72}$ ,  $l \geq 22$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 22 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 10 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 14** 当  $l \equiv 23 \pmod{72}$ ,  $l \geq 23$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 21 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 9 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 15** 当  $l \equiv 24 \pmod{72}$ ,  $l \geq 24$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 20 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 8 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 16** 当  $l \equiv 25 \pmod{72}$ ,  $l \geq 25$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 20 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可

区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 8 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 17** 当  $l \equiv 26 \pmod{72}$ ,  $l \geq 26$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 22 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 10 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 18** 当  $l \equiv 27 \pmod{72}$ ,  $l \geq 27$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 27 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 15 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 3 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 19** 当  $l \equiv 28 \pmod{72}$ ,  $l \geq 28$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 20** 当  $l \equiv 29 \pmod{72}$ ,  $l \geq 29$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 21** 当  $l \equiv 30 \pmod{72}$ ,  $l \geq 30$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 22 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 10 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 22** 当  $l \equiv 31 \pmod{72}$ ,  $l \geq 31$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 25 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 13 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 1 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 23** 当  $l \equiv 32 \pmod{72}$ ,  $l \geq 32$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。



**情形 24** 当  $l \equiv 33 \pmod{72}$ ,  $l \geq 33$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 20 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 8 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 25** 当  $l \equiv 34 \pmod{72}$ ,  $l \geq 34$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 26 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 26** 当  $l \equiv 35 \pmod{72}$ ,  $l \geq 35$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 19 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 7 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 27** 当  $l \equiv 36 \pmod{72}$ ,  $l \geq 36$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 24 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 28** 当  $l \equiv 37 \pmod{72}$ ,  $l \geq 37$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 18 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 6 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 29** 当  $l \equiv 38 \pmod{72}$ ,  $l \geq 38$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 26 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 30** 当  $l \equiv 39 \pmod{72}$ ,  $l \geq 39$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 25 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 13 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 1 \right] C_{12}$

进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 31** 当  $l \equiv 40 \pmod{72}$ ,  $l \geq 40$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 18 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 4 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 32** 当  $l \equiv 41 \pmod{72}$ ,  $l \geq 41$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 24 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 33** 当  $l \equiv 42 \pmod{72}$ ,  $l \geq 42$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 26 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 34** 当  $l \equiv 43 \pmod{72}$ ,  $l \geq 43$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 23 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 11 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 35** 当  $l \equiv 44 \pmod{72}$ ,  $l \geq 44$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 28 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 16 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 4 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 36** 当  $l \equiv 45 \pmod{72}$ ,  $l \geq 45$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 30 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 18 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 6 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 37** 当  $l \equiv 46 \pmod{72}$ ,  $l \geq 46$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 30 \right]$  个

$C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-18\right]C_{12}$ 、 $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-6\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 38** 当  $l \equiv 47 \pmod{72}$ ,  $l \geq 47$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-29\right]C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-17\right]C_{12}$ 、 $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-5\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 39** 当  $l \equiv 48 \pmod{72}$ ,  $l \geq 48$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-28\right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-16\right]C_{12}$ 、 $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-4\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 40** 当  $l \equiv 49 \pmod{72}$ ,  $l \geq 49$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-28\right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-16\right]C_{12}$ 、 $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-4\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 41** 当  $l \equiv 50 \pmod{72}$ ,  $l \geq 50$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-30\right]C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-18\right]C_{12}$ 、 $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-6\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 42** 当  $l \equiv 51 \pmod{72}$ ,  $l \geq 51$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-35\right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-23\right]C_{12}$ 、

$\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-11\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 43** 当  $l \equiv 52 \pmod{72}$ ,  $l \geq 52$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-32\right]$  个

$C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-20\right]C_{12}$ 、

$\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-8\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 44** 当  $l \equiv 53 \pmod{72}$ ,  $l \geq 53$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-34\right]C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-22\right]C_{12}$ 、

$\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-10\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 45** 当  $l \equiv 54 \pmod{72}$ ,  $l \geq 54$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-42\right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-30\right]C_{12}$ 、

$\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-18\right]C_{12}$ 、 $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-6\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 46** 当  $l \equiv 55 \pmod{72}$ ,  $l \geq 55$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-33\right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-21\right]C_{12}$ 、

$\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-9\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 47** 当  $l \equiv 56 \pmod{72}$ ,  $l \geq 56$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-32\right]C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-20\right]C_{12}$ 、 $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-8\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 48** 当  $l \equiv 57 \pmod{72}$ ,  $l \geq 57$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-40\right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-28\right]C_{12}$ 、

$\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-16\right]C_{12}$ 、 $\frac{1}{12}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-4\right]C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 49** 当  $l \equiv 58 \pmod{72}$ ,  $l \geq 58$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 34 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 22 \right] C_{12}$ ,  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 10 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 50** 当  $l \equiv 59 \pmod{72}$ ,  $l \geq 59$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 39 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 27 \right] C_{12}$ ,  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 15 \right] C_{12}$ ,  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 3 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 51** 当  $l \equiv 60 \pmod{72}$ ,  $l \geq 60$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 32 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 20 \right] C_{12}$ ,  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 8 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 52** 当  $l \equiv 61 \pmod{72}$ ,  $l \geq 61$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 38 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 26 \right] C_{12}$ ,  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$ ,  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 53** 当  $l \equiv 62 \pmod{72}$ ,  $l \geq 62$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 34 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 22 \right] C_{12}$ ,  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 10 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 54** 当  $l \equiv 63 \pmod{72}$ ,  $l \geq 63$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 45 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 33 \right] C_{12}$ ,

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 21 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 9 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 55** 当  $l \equiv 64 \pmod{72}$ ,  $l \geq 64$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 36 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 24 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 56** 当  $l \equiv 65 \pmod{72}$ ,  $l \geq 65$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 32 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 20 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 8 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 57** 当  $l \equiv 66 \pmod{72}$ ,  $l \geq 66$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 46 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 34 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 22 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 10 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 58** 当  $l \equiv 67 \pmod{72}$ ,  $l \geq 67$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 43 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 31 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 19 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 7 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 59** 当  $l \equiv 68 \pmod{72}$ ,  $l \geq 68$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 36 \right] C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 24 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 60** 当  $l \equiv 69 \pmod{72}$ ,  $l \geq 69$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有



$C_{12}$ 的好组, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 38 \right]$  个  $C_{12}$ 的点

被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 26 \right] C_{12}$ ,

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 61** 当  $l \equiv 70 \pmod{72}$ ,  $l \geq 70$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 38 \right]$  个

$C_{12}$ 的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 26 \right] C_{12}$ ,

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 62** 当  $l \equiv 71 \pmod{72}$ ,  $l \geq 71$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 37 \right] C_{12}$  的点被

多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 25 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 13 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 1 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 63** 当  $l \equiv 0 \pmod{72}$ ,  $l \geq 72$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 再经过  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 36 \right]$  个  $C_{12}$ 的点

被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 24 \right] C_{12}$ ,

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 64** 当  $l \equiv 1 \pmod{72}$ ,  $l \geq 73$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 再经过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 36 \right]$  个  $C_{12}$

的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 24 \right] C_{12}$ ,

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 65** 当  $l \equiv 2 \pmod{72}$ ,  $l \geq 74$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 选出所有  $C_{12}$ 的好组, 再经过  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 38 \right]$  个  $C_{12}$ 的

点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 26 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 66** 当  $l \equiv 3 \pmod{72}$ ,  $l \geq 75$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 43 \right]$  个  $C_{12}$  的点

被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 31 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 19 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 7 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 67** 当  $l \equiv 4 \pmod{72}$ ,  $l \geq 76$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 40 \right]$  个

$C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 28 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 16 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 4 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 68** 当  $l \equiv 5 \pmod{72}$ ,  $l \geq 77$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 42 \right]$  个  $C_{12}$  的

点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 30 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 18 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 6 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 69** 当  $l \equiv 6 \pmod{72}$ ,  $l \geq 78$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 50 \right]$  个  $C_{12}$  的点

被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 38 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 26 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 14 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 2 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 70** 当  $l \equiv 7 \pmod{72}$ ,  $l \geq 79$  时, 由引理 1 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 41 \right]$  个  $C_{12}$

的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 29 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 17 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 5 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 71** 当  $l \equiv 8 \pmod{72}$ ,  $l \geq 80$  时, 由引理 2 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\beta_1$ 、 $\beta_2$ 、 $\beta_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 40 \right]$  个  $C_{12}$  的点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 28 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 16 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 4 \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

**情形 72** 当  $l \equiv 9 \pmod{72}$ ,  $l \geq 81$  时, 由引理 3 经过  $[l; m]$ -I-型染色和  $[l; p, q]$ -II-型染色, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 选出所有  $C_{12}$  的好组, 再经过  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$ 、 $\gamma_3$ -补法后, 可以得到  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 48 \right]$  个  $C_{12}$  的点

被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色, 再将余下 3-子集分配给  $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 36 \right] C_{12}$ 、

$\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 24 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} - 12 \right] C_{12}$ 、 $\frac{1}{12} \left[ 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3} \right] C_{12}$  进行点被多重色集合可区别的  $l$ -I-全染色。

定理证毕。

**定理 3.2** 若  $2 \binom{l-1}{2} + \binom{l-1}{3} < 12m < 2 \binom{l}{2} + \binom{l}{3}$ ,  $l \leq 4, m \geq 1$ , 则  $\chi_n^{vi}(mC_{12}) = l$ 。

证明 由命题 1.1 与定理 3.1 即得此结论。

## 参考文献

- [1] Burris, A.C. (1993) Vertex-Distinguishing Edge-Colorings. PhD Thesis, Memphis State University, Memphis.
- [2] Burris, A.C. and Schelp, R.H. (1997) Vertex-Distinguishing Proper Edge-Colorings. *Journal of Graph Theory*, **26**, 73-82. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199710\)26:2<73::AID-JGT2>3.0.CO;2-C](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199710)26:2<73::AID-JGT2>3.0.CO;2-C)
- [3] Balister, P.N., Riordan, O.M. and Schelp, R.H. (2003) Vertex-Distinguishing Edge Colorings of Graphs. *Journal of Graph Theory*, **42**, 95-109. <https://doi.org/10.1002/jgt.10076>
- [4] Horňák, M. and Soták, R. (1996) The Fifth Jump of the Point-Distinguishing Chromatic Index of  $K_{n,n}$ . *Ars Combinatoria*, **42**, 233-242.
- [5] Horňák, M. and Soták, R. (1997) Localization of Jumps of the Point-Distinguishing Chromatic Index of  $K_{n,n}$ . *Discusiones Mathematicae Graph Theory*, **17**, 243-251. <https://doi.org/10.7151/dmgt.1051>
- [6] Horňák, M. and Salvi, N.Z. (2006) On the Point-Distinguishing Chromatic Index of Complete Bipartite Graphs. *Ars Combinatoria*, **80**, 75-85.
- [7] Salvi, N.Z. (1990) On the Value of the Point-Distinguishing Chromatic Index of  $K_{n,n}$ . *Ars Combinatoria*, **29B**, 235-244.
- [8] Zhang, Z.F., Qiu, P.X., Xu, B.G., et al. (2008) Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs. *Ars Combinatoria*, **87**, 33-45.
- [9] Chen, X.E. and Li, Z.P. (2014) Vertex-Distinguishing I-Total Colorings of Graphs. *Utilitas Mathematica*, **95**, 319-327.
- [10] 陈祥恩, 苗婷婷, 王治文. 两条路的联图的点可区别 I-全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(4): 30-33.
- [11] 苗婷婷, 王治文, 陈祥恩. 圈与路联图点可区别 I-全染色和点可区别 VI-全染色[J]. 大连理工大学学报, 2017, 57(4): 430-435.
- [12] 杨晗, 陈祥恩.  $m$  个阶为 4 的圈的不交并的点可区别 I-全染色和 VI-全染色[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2020,

59(1): 85-89.

- [13] 陈祥恩. 某些顶点对被非多重色集合所区别的未必正常染色的综述[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2019, 18(4): 50-59.