Statistics and Application 统计学与应用, **2024, 13(2), 445-452**
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/sa
https://doi.org/10.12677/sa.2024.132044

Hans汉斯

由α-稳定过程驱动的线性自排斥扩散过程的渐近行为和参数估计

冯　甜，闫理坦

东华大学理学院，上海

收稿日期：2024年3月26日；录用日期：2024年4月16日；发布日期：2024年4月24日

摘　要

设 $M^{\alpha}=\left\{M_t^{\alpha},t\ge 0\right\}$ 为一维 α -稳定模型且 $0<\alpha<2$。本文主要研究如下线性自排斥扩散的长时间行为和参数估计：$X_t^{\alpha}=M_t^{\alpha}+\theta\int_0^t\int_0^s(1+u)^2\,\mathrm{d}X_u^{\alpha}\mathrm{d}s+\nu t$，其中 θ 、ν 是两个未知参数且 $\theta>0$ 。当 $\frac{1}{3}<\alpha<2$ 且 t 趋于无穷大时，对任意 $n\ge 1$，我们有 $J_t^{\alpha}(0,\theta):=\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}X_t^{\alpha}\to\xi_{\infty}^{\alpha}+\frac{\nu}{\theta}$ 和 $J_t^{\alpha}(n,\theta):=\theta(1+t)^3\left(J_t^{\alpha}(n-1,\theta)-\prod_{i=1}^{n-1}(3i-1)\left(\xi_{\infty}^{\alpha}+\frac{\nu}{\theta}\right)\right)\to\prod_{i=1}^{n}(3i-1)\left(\xi_{\infty}^{\alpha}+\frac{\nu}{\theta}\right)$ 几乎处处成立，其中 $\xi_{\infty}^{\alpha}=\int_0^t(1+s)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}M_s^{\alpha}$ 。在连续观测条件下，建立 θ 和 ν 的最小二乘估计讨论其相合性与渐近分布。

关键词

自排斥扩散，长时间行为，参数估计，渐近分布

Asymptotic Behavior and Parameter Estimation of the Linear Self-Repelling Diffusion Driven by α-Stable Motion

Tian Feng, Litan Yan

College of Science, Donghua University, Shanghai

Received: Mar. 26th, 2024; accepted: Apr. 16th, 2024; published: Apr. 24th, 2024

文章引用: 冯甜, 闫理坦. 由 α-稳定过程驱动的线性自排斥扩散过程的渐近行为和参数估计[J]. 统计学与应用, 2024, 13(2): 445-452. DOI: 10.12677/sa.2024.132044

Abstract

Let $M^{\alpha}=\{M_t^{\alpha},t\geq 0\}$ be an α-stable motion of one-dimension with $0<\alpha<2$. In this paper, we consider large time behaviors and parameter estimation of the linear self-repelling diffusion of the forms $X_t^{\alpha}=M_t^{\alpha}+\theta\int_0^t\int_0^s(1+u)^2\,\mathrm{d}X_u^{\alpha}\mathrm{d}s+\nu t$ where $\theta>0$ and ν are two unknown parameters. When $\frac{1}{3}<\alpha<2$ and t tends to infinity, we show that the convergence

$J_t^{\alpha}(0,\theta):=\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}X_t^{\alpha}\to\xi_{\infty}^{\alpha}+\frac{\nu}{\theta}$ and

$J_t^{\alpha}(n,\theta):=\theta(1+t)^3\left(J_t^{\alpha}(n-1,\theta)-\prod_{i=1}^{n-1}(3i-1)\left(\xi_{\infty}^{\alpha}+\frac{\nu}{\theta}\right)\right)\to\prod_{i=1}^{n}(3i-1)\left(\xi_{\infty}^{\alpha}+\frac{\nu}{\theta}\right)$ hold almost surely for all $n\geq 1$, where $\xi_{\infty}^{\alpha}=\int_0^t(1+s)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}M_s^{\alpha}$. The least squares estimates of θ and ν are established to discuss their coincidence and asymptotic distributions under continuous observation conditions.

Keywords

Self-Repelling Diffusion, Large Time Behaviors, Parameter Estimation, Asymptotic Distribution

1. 引言

在 1995 年，Cranston 和 Le Jan [1]引入一个与路径相关的随机微分方程的特例(线性自吸引扩散)

$$X_t=B_t-\theta\int_0^t\int_0^s(X_s-X_u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\nu t,\quad t\geq 0,$$

其中 $\theta>0$ 且 B 是一维标准布朗运动。他们证明了当 t 趋于无穷大时，X_t 过程在 L^2 上存在且几乎必然收敛。这种依赖于路径的随机微分方程是由 Durrett 和 Rogers [2]在 1992 年首次提出的，是描述了一种增长聚合物的模型，具体如下：

$$X_t=X_0+B_t+\int_0^t\mathrm{d}s\int_0^s f(X_s-X_u)\mathrm{d}u, \tag{1}$$

其中 $B=\{B_t,t\geq 0\}$ 是 d 维标准布朗运动且 f 是 Lipschitz 连续的。X_t 对应于聚合物末端在时间 t 时的位置。在某些条件下，他们又建立了随机微分方程的渐近形态，并提出一些猜想和问题。该模型是自交互随机行走概念的连续模型。若 $f(x)=g(x)x/\|x\|$，$g(x)\geq 0$，则此时 X_t 就是由 Pemantle [3]所提出的过程的一个连续类似物。我们可以将这种与过去的轨迹相互作用的布朗运动称为自交互运动。一般地，方程(1)在不对 f 做任何假设时可定义自交互扩散过程。如果对所有 $x\in R^d$ 均有 $x\cdot f(x)\geq 0$ $(resp.\leq 0)$，则称这个解为自吸引(或自排斥)。2002 年，Benaïm [4]等人还引入了一种依赖(卷积)经验测度的自交互扩散。这些扩散和布朗聚合物之间一个很大的区别是漂移项除了 t。重要的是要注意，在 f 的许多情况下，相互作用势具有足够的吸引力，使得自交互扩散过程可近似等同于 O-U 过程，这使得其遍历行为可能存在并值得进

行研究。更多的可参考 Cranston 和 Mountford [5]，Gauthier [6]，Hermann 和 Scheutzow [7]，Mountford 和 Tarr [8]，Sun 和 Yan [9]及文内其他文献。

另一方面，方程(1)可以重写为

$$X_t = B_t - \theta\int_0^t\int_0^s u\mathrm{d}X_u \mathrm{d}s + \nu t, \quad t \ge 0.$$

受这一结论的启发，在这篇文章我们可以考虑以下方程的长时间行为和参数估计：

$$X_t^\alpha = M_t^\alpha + \theta\int_0^t\int_0^s (1+u)^2 \mathrm{d}X_u^\alpha \mathrm{d}s + \nu t, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

其中 M_t^α 是一维 α 稳定运动且 $0<\alpha<2$， θ 和 ν 是两个实参数且 $\theta>0$。这篇文章的组织结构如下。

在第二节，我们简要回顾了 α 稳定运动相关的定义、性质以及公式命题。第三节研究了解的长时间行为。第四节研究了参数的最小二乘估计及参数估计量的渐近分布。

2. 预备知识

在这一节中，我们简要地介绍了 α-稳定运动的一些定义和性质。在本文，我们假设 $0<\alpha<2$ 是任意且固定的，并设 $M^\alpha = \{M_t^\alpha, t\ge 0\}$ 是一个 $\{\mathcal{F}_t\}$-适定过程。令参数 α,β,λ,μ 满足

$$\alpha\in(0,2], \quad \lambda\in(0,+\infty), \quad \beta\in[-1,1], \quad \mu\in(-\infty,+\infty),$$

且定义

$$\phi_\alpha(u) = \begin{cases} -\lambda^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(u)\tan\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) + i\mu u, & \alpha\ne 1, \\ -\lambda|u|\left(1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sgn}(u)\log|u|\right) + i\mu u, & \alpha = 1 \end{cases}$$

其中 $u\in(-\infty,+\infty)$ 且 $i^2=-1$。如果随机变量 η 具有特征函数 $E\mathrm{e}^{iu\eta} = \mathrm{e}^{-\phi_\alpha(u)}$，则称其具有 α-稳定分布，表示为 $\eta \sim S_\alpha(\lambda,\beta,\mu)$。当 $\mu=0$ 和 $\beta=0$ 时，我们称 η 是对称的 α-稳定过程。

进一步地，若对任意 $t>s>0$ 有

$$E\left[\mathrm{e}^{iu\left(M_t^\alpha - M_s^\alpha\right)} \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathrm{e}^{-(t-s)\phi_\alpha(u)},$$

则称 M^α 是一个 α-稳定过程。在本文中，我们假定 M^α 是对称的 α-稳定过程，并且 $\lambda=1$， $0<\alpha<2$，即 $\phi_\alpha(u) = |u|^\alpha$。

命题 2.1： 方程(2)有唯一的解，且可表示为：

$$X_t^\alpha = \int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}M_s^\alpha + \nu\int_0^t h_\theta(t,s)\mathrm{d}s, \quad t\ge 0,$$

其中 $h_\theta(t,s) = \left(1+\theta(1+s)^2 \mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+s)^3-1\right)}\int_s^t \mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u\right), t\ge s\ge 0$。

证明：我们可以用常数变易法证明这个命题。

3. 长时间行为

设 X_t^α 是方程(2)的解且 $\theta>0$。这节我们主要讨论解的长时间行为。

引理 3.1： 设 $0<\alpha<2$ 且 $\theta>0$，定义过程 $\xi_t^\alpha := \int_0^t (1+s)^2 \mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}M_s^\alpha, t\ge 0$。则随机变量 ξ_∞^α 在 L^p 上适定，且

$$(1+t)^{3n}\varphi(t)\left(\xi_\infty^\alpha - \xi_t^\alpha\right) \to 0 \tag{3}$$

在 L^p 上适定且几乎必然收敛，其中 $\varphi(t)=(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t \mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u$。

证明：明显地，我们有

$$E\left|\xi_t^\alpha\right|^p \le C_{p,\alpha}\left(\int_0^t(1+s)^{2\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\theta}{3}\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}s\right)^{p/\alpha} \le C_{p,\alpha}\left(\int_0^\infty(1+s)^{2\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\theta}{3}\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}s\right)^{p/\alpha}<\infty,$$

即随机变量 ξ_∞^α 在 L^p 上适定。相似地，我们有

$$E\left|(1+t)^{3n}\left(\xi_\infty^\alpha-\xi_t^\alpha\right)\right|^p \le C_{p,\alpha}\left((1+t)^{3n\alpha}\int_t^\infty(1+s)^{2\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\theta}{3}\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}s\right)^{p/\alpha}\to 0 \quad (t\to\infty).$$

结合当 t 趋于无穷大时，$\varphi(t)\to 1/\theta$，则这个收敛在 L^p 上适定。

再考虑(3)以概率 1 收敛。运用分部积分和洛必达法则可得

$$\begin{aligned}&(1+t)^{3n}\left(\xi_\infty^\alpha-\xi_t^\alpha\right)=(1+t)^{3n}\int_t^\infty(1+s)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}M_s^\alpha\\&=-(1+t)^{3n+2}\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}M_t^\alpha-(1+t)^{3n}\int_t^\infty\left(2(1+s)-\theta(1+s)^4\right)\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}M_s^\alpha\to 0 \quad (t\to\infty)\end{aligned}$$

几乎必然收敛，且

$$(1+t)^{3n}\varphi(t)\left(\xi_\infty^\alpha-\xi_t^\alpha\right)\sim\theta^{-1}(1+t)^{3n}\left(\xi_\infty^\alpha-\xi_t^\alpha\right)\to 0 \quad (t\to\infty)$$

几乎必然收敛。因此，该引理得到证明。

引理 3.2： 设 $\theta>0$ 和 $\frac{1}{3}<\alpha<2$。定义函数 $I_\theta(t)=\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u-1$，则随机变量 $\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha$ 在 L^p 上适定，且

$$\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha\to\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha \quad (t\to\infty) \tag{4}$$

在 L^p 上适定且几乎必然收敛，$0<p<\alpha$。

证明：定义 $\eta_t^\alpha:=\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha-\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha=\int_t^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha$，$t\ge 0$。明显地，我们有

$$\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\left((1+t)^2-(1+u)^2\right)\mathrm{d}u=\int_0^t 2(1+s)\mathrm{d}s\int_0^s\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u\to\infty \quad (t\to\infty).$$

紧接着，根据洛必达法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}I_\theta(t)(1+t)^3&=\lim_{t\to\infty}(1+t)^3\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\left(\theta(1+t)^2\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u-\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\right)\\&=\lim_{t\to\infty}(1+t)^3\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\left(\theta(1+t)^2\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u-\int_0^t\theta(1+u)^2\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u-1\right)\\&=\theta\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+t)^{-3}\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}}\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\left((1+t)^2-(1+u)^2\right)\mathrm{d}u=\frac{2}{\theta}.\end{aligned}$$

根据 $\int_0^\infty(1+t)^{-3}\mathrm{d}t=-1/2$，可得

$$E\left|\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha\right|^p\le C_{p,\alpha}\left(\int_0^t\left|I_\theta(s)\right|^\alpha\mathrm{d}s\right)^{p/\alpha}\le C_{p,\alpha}\left(\int_0^\infty\left|I_\theta(s)\right|^\alpha\mathrm{d}s\right)^{p/\alpha}<\infty.$$

因此，随机变量 $\int_0^\infty I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha$ 在 L^p 上适定。同理，根据以下估计可知(4)在 L^p 上适定：

$$E\left|\eta_t^\alpha\right|^p\le C_{p,\alpha}\left(\int_t^\infty\left|I_\theta(s)\right|^\alpha\mathrm{d}s\right)^{p/\alpha}\sim\frac{1}{(1+t)^{3p-p/\alpha}} \quad (t\to\infty),$$

对所有$\frac{1}{3}<\alpha<2$，$0<p<\alpha$都成立。最后，考虑(4)以概率 1 收敛。通过一个简单的计算可得

$$\begin{aligned}I'_\theta(t)&=2\theta(1+t)\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u-\theta^2(1+t)^4\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u+\theta(1+t)^2\\&=\theta(1+t)\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\left(\int_0^t2\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u-\theta(1+t)^3\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u+(1+t)\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\right)\\&=\theta(1+t)\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\left(2-\theta(1+t)^3+\theta(1+t)(1+u)^2\right)\mathrm{d}u+\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}.\end{aligned}$$

定义$f_\theta(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\left(2-\theta(1+t)^3+\theta(1+t)(1+u)^2\right)\mathrm{d}u$，则可得$f_\theta(0)=0$，

$$f'_\theta(t)=-3\theta\int_0^t2(1+s)\mathrm{d}s\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u+2\to-\infty\quad(t\to\infty)$$

和$f'_\theta(t)\le2$。从而有$f_\theta(t)=\int_0^tf'_\theta(s)\mathrm{d}s\to-\infty\ (t\to\infty)$。紧接着，运用洛必达法则可得

$$\lim_{t\to\infty}(1+t)^4I'_\theta(t)=-6\theta^{-1},$$

即可证(4)以概率 1 收敛。

引理 3.3：设$\theta>0$和$\frac{1}{3}<\alpha<2$。定义如下递归公式：

$$I_\theta(t;1)=\theta(1+t)^3I_\theta(t),\quad I_\theta(t;n+1)=\theta(1+t)^3\left[I_\theta(t;n)-\prod_{i=1}^n(3i-1)\right],$$

则对所有$n\ge1$我们有

$$\lim_{t\to\infty}I_\theta(t;n)=\prod_{i=1}^n(3i-1).$$

证明：证明过程可参考文献 Sun 和 Yan [10]引理 4.3。

定理 3.1：设$\theta>0$和$\frac{1}{3}<\alpha<2$。则对任意$0<p<\alpha$有

$$J_t^\alpha(0,\theta):=(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}X_t^\alpha\to\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\quad(t\to\infty)$$

在L^p上适定且几乎必然收敛。

证明：通过一个简单的计算可得

$$\begin{aligned}J_t^\alpha(0,\theta)&=(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^th_\theta(t,s)\mathrm{d}M_s^\alpha+\nu(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^th_\theta(t,s)\mathrm{d}s\\&=(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}M_t^\alpha-\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\left(\xi_\infty^\alpha-\xi_u^\alpha\right)\mathrm{d}u\\&\quad+\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u\\&=-(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^tI_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha-\theta\varphi(t)\left(\xi_\infty^\alpha-\xi_t^\alpha\right)\\&\quad+\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)\theta(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+u)^3-1\right)}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

从而有

$$J_t^\alpha(0,\theta)-\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)=-(1+t)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^tI_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha-\theta\varphi(t)\left(\xi_\infty^\alpha-\xi_t^\alpha\right)+\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)I_\theta(t).\tag{5}$$

根据引理 3.1，引理 3.2 和引理 3.3，我们可证该定理成立。

定理 3.2: 设 $\theta>0$ 和 $\frac{1}{3}<\alpha<2$。定义递归过程：$J_t^\alpha(n,\theta):=\theta(1+t)^3\left(J_t^\alpha(n-1,\theta)-\prod_{i=1}^{n-1}(3i-1)\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)\right)$。则对所有 $n=\{0,1,2,\cdots\}$， $0<p<\alpha$ 有

$$J_t^\alpha(n,\theta)\to\prod_{i=1}^{n}(3i-1)\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)\quad(t\to\infty)$$

在 L^p 上适定且几乎必然收敛。

证明：参考(5)，可得

$$J_t^\alpha(n,\theta)=-\theta^n(1+t)^{3n+2}\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\int_0^t I_\theta(s)\mathrm{d}M_s^\alpha-\theta^{n+1}(1+t)^{3n}\varphi(t)\left(\xi_\infty^\alpha-\xi_t^\alpha\right)+\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)I_\theta(t;n).$$

根据引理 3.1，引理 3.2，引理 3.3 和定理 3.1 可证。

4. 参数估计与渐近分布

在这一节，我们主要研究两个实参 θ 和 ν 的相合性和渐近分布。记

$$Y_t^\alpha:=\int_0^t(1+s)^2\mathrm{d}X_s^\alpha,\quad t\ge0,$$

且 θ 和 ν 的最小二乘估计量可以由以下比较函数的最小值求出：

$$\rho(\theta,\nu)=\int_0^T\left|\dot{X}_t^\alpha-\left(\theta Y_t^\alpha+\nu\right)\right|^2\mathrm{d}t.$$

则可得最小二乘估计量为

$$\hat{\theta}_T=\frac{T\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}X_t^\alpha-X_T^\alpha\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t}{T\int_0^T\left(Y_t^\alpha\right)^2\mathrm{d}t-\left(\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right)^2},\quad \hat{\nu}_T=\frac{1}{T}\left(X_T^\alpha-\hat{\theta}_T\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right).$$

从而有

$$\hat{\theta}_T-\theta=\frac{T\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}M_t^\alpha-M_T^\alpha\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t}{T\int_0^T\left(Y_t^\alpha\right)^2\mathrm{d}t-\left(\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right)^2},\tag{6}$$

$$\hat{\nu}_T-\nu=\frac{1}{T}\left(M_T^\alpha-\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right).$$

通过常数变易法可得：$Y_t^\alpha=\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\xi_t^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\left(\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}-1\right)$，其中 $\xi_t^\alpha=\int_0^t(1+s)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+s)^3-1\right)}\mathrm{d}M_s^\alpha$。当 T 趋于无穷大时，

$$(1+T)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\int_0^T\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}\xi_t^\alpha\mathrm{d}t\to\frac{1}{\theta}\xi_\infty^\alpha$$

$$(1+T)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\int_0^T\frac{\nu}{\theta}\left(\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+t)^3-1\right)}-1\right)\mathrm{d}t\to\frac{\nu}{\theta^2},$$

则有

$$(1+T)^2\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\to\frac{1}{\theta}\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)\quad(a.s.).\tag{7}$$

定理 4.1：设 $0<\alpha<2$ 且 $\theta>0$，则当 T 趋向于无穷时有

$$\hat{\theta}_T\to\theta,\quad \hat{\nu}_T\to\nu\quad (a.s.).$$

证明：定义 $\psi_T:=T\int_0^T\left(Y_t^\alpha\right)^2\mathrm{d}t-\left(\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right)^2$。根据洛必达法则，当 T 趋于无穷大时可得

$$T^{-1}(1+T)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{2\theta}{3}\left((1+T)^3-1\right)}\psi_T\to\frac{1}{2\theta}\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)^2\quad (a.s.).$$

依据洛必达法则和公式(6)，当 T 趋于无穷大时有

$$T^{-2}\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\left(TY_T^\alpha M_T^\alpha\right)\to 0$$

$$T^{-2}\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\left(T\int_0^T\dot{Y}_t^\alpha\dot{M}_t^\alpha\mathrm{d}t\right)\to 0$$

$$T^{-2}\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\left(M_T^\alpha\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right)=T^{-1}M_T^\alpha\left((1+T)^2\,\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right)T^{-1}(1+T)^{-2}\to 0\quad (a.s.).$$

从而得到当 $T\to\infty$ 时 $\hat{\theta}_T\to\theta$ 几乎必然收敛于 0。同理可得，当 $T\to\infty$ 时有

$$\hat{\nu}_T-\nu=\frac{M_T^\alpha}{T}-\frac{T^{-2}\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)}{T^{-1}(1+T)^2\,\mathrm{e}^{-\frac{2\theta}{3}\left((1+T)^3-1\right)}\psi_T}\left((1+T)^2\,\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right)\to 0\quad (a.s.).$$

定理 4.2：设 $1<\alpha<2$ 且 $\theta>0$，则当 T 趋向于无穷时有

$$(1+T)^{2(1/\alpha-1)}\,\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\sim 2\theta^{1-1/\alpha}\alpha^{-1/\alpha}\left|\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right|^{-1}\tilde{M}_1$$

$$T(1+T)^{2/\alpha}\left(\hat{\nu}_T-\nu-\frac{M_T^\alpha}{T}\right)\sim -2(\theta\alpha)^{-1/\alpha}\operatorname{sgn}\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)\tilde{M}_1\quad (a.s.).$$

证明：参考 Rosinski-Woyczynski [10]，定义

$$\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}M_t^\alpha:=\tilde{M}_{\tau_\alpha(T)}^\alpha,\quad T\ge 0,$$

其中 $\tau_\alpha(T)=\int_0^T\left|Y_t^\alpha\right|^\alpha\mathrm{d}t$。根据收敛(7)式和洛必达法则，当 T 趋向于无穷时有

$$\begin{aligned}&(1+T)^{2/\alpha}\,\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\left(\int_0^T\left|Y_t^\alpha\right|^\alpha\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}\\&=\left((1+T)^2\,\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\alpha\left((1+T)^3-1\right)}\int_0^T\left|Y_t^\alpha\right|^\alpha\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}\sim(\theta\alpha)^{-1/\alpha}\left|\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right|\quad (a.s.).\end{aligned}$$

通过两个简单计算

$$(1+T)^{2/\alpha}\,\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\tilde{M}_{\tau_\alpha(T)}^\alpha\sim(\theta\alpha)^{-1/\alpha}\left|\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right|\tilde{M}_1$$

$$T^{-1}(1+T)^{2/\alpha}\,\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}M_T^\alpha\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\to 0,$$

可以获得 $(1+T)^{2(1/\alpha-1)}\,\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\sim 2\theta^{1-1/\alpha}\alpha^{-1/\alpha}\left|\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right|^{-1}\tilde{M}_1$。同理，当 T 趋向于无穷时有

$$\begin{aligned}T(1+T)^{2/\alpha}\left(\hat{\nu}_T-\nu-\frac{M_T^\alpha}{T}\right)&=-\left((1+T)^2\,\mathrm{e}^{-3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\int_0^T Y_t^\alpha\mathrm{d}t\right)\left((1+T)^{2(1/\alpha-1)}\,\mathrm{e}^{3^{-1}\theta\left((1+T)^3-1\right)}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\right)\\&\sim -2(\theta\alpha)^{-1/\alpha}\operatorname{sgn}\left(\xi_\infty^\alpha+\frac{\nu}{\theta}\right)\tilde{M}_1\quad (a.s.).\end{aligned}$$

由此，该定理得到证明。

5. 总结

依据目前已研究的成果发现，很多学者主要研究关于布朗运动的自交互过程。然而随着研究的深入，这一类过程已不能满足现实的需求，需要进一步扩展。针对这一现状，本文研究一个自交互过程的特例，由 α 稳定过程驱动的线性自排斥过程的相关问题。文中我们利用收敛速度和分部积分得到一个递归收敛，并通过最小二乘法估计参数计算出渐近分布，有创新点，但也存在一定的局限性。事实上，本文研究的线性自排斥过程也只是自交互过程中的一类，是一种特殊的形式，还可以从其他方面入手对自交互过程进行更深入研究，包括改变噪声、更换函数、限定漂移项等。

参考文献

[1] Cranston, M. and Le Jan, Y. (1995) Self-Attracting Diffusion: Two Case Studies. *Mathematische Annalen*, **303**, 87-93. https://doi.org/10.1007/BF01460980

[2] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1991) Asymptotic Behavior of Brownian Polymer. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/BF01300560

[3] Pemantle, R. (1988) Phase Transition in Reinforced Random Walk and RWWE on Trees. *Annals of Probability*, **16**, 1229-1241. https://doi.org/10.1214/aop/1176991687

[4] Benaïm, M., Ciotir, I. and Gauthier, C.-E. (2015) Self-Repelling Diffusions via an Infinite Dimensional Approach. *Stochastic Partial Differential Equations*: *Analysis and Computations*, **3**, 506-530. https://doi.org/10.1007/s40072-015-0059-5

[5] Cranston, M. and Mountford, T.S. (1996) The Strong Law of Large Numbers for a Brownian Polymer. *Annals of Probability*, **24**, 1300-1323. https://doi.org/10.1214/aop/1065725183

[6] Gauthier, C.-E. (2016) Self Attracting Diffusions on a Sphere and Application to a Periodic Case. *Electronic Communications in Probability*, **21**, 1-12. https://doi.org/10.1214/16-ECP4547

[7] Herrmann, S. and Scheutzow, M. (2004) Rate of Convergence of Some Self-Attracting Diffusions. *Stochastic Processes and Their Applications*, **111**, 41-55. https://doi.org/10.1016/j.spa.2003.10.012

[8] Mountford, T. and Tarrés, P. (2008) An Asymptotic Result for Brownian Polymers. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, *Probabilités et Statistiques*, **44**, 29-46. https://doi.org/10.1214/07-AIHP113

[9] Sun X. and Yan, L. (2020) A Convergence on the Linear Self-Interacting Diffusion Driven by α-Stable Motion. *Stochastics*, **93**, 1186-1208. https://doi.org/10.1080/17442508.2020.1869239

[10] Rosinski, J. and Woyczynski, W.A. (1986) On Itô Stochastic Integration with Respect to P-Stable Motion: Inner Clock, Integrability of Sample Paths, Double and Multiple Integrals. *Annals of Probability*, **14**, 271-286. https://doi.org/10.1214/aop/1176992627