Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 15-19
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.21003 Published Online February 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

A New ASE-I Method for Solving Parabolic Equations

Dong Wang[1], **Lei Feng**[2]

[1]Shanxi Normal University, Linfen
[2]Academy of Opto-Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing
Email: wangdong8714361@163.com

Received: Nov. 30th, 2012; revised: Dec. 12th, 2012; accepted: Dec. 20th, 2012

Abstract: In this paper, I construct a new ASE-I scheme for solving parabolic partial differential equations in parallel through classical explicit-implicit format and the Saul'yev asymmetric formats. This method is absolutely parallel and stable, and the sub-sections are more flexible, so the scheme is more convenient to apply to solve parabolic partial differential equations. In this paper, we list the mathematical form of this finite difference scheme, analyze the stability of the scheme, and verify the stability and accuracy of this scheme through numerical experiments. The results of numerical experiments are consistent with the theoretical analysis.

Keywords: Parabolicl Equations; Parallel Algorithm; Difference Scheme

并行求解抛物型偏微分方程的一种新 ASE-I 格式

王　栋[1]，**冯　蕾**[2]

[1]山西师范大学，临汾
[2]中国科学院光电研究院，北京
Email: wangdong8714361@163.com

收稿日期：2012 年 11 月 30 日；修回日期：2012 年 12 月 12 日；录用日期：2012 年 12 月 20 日

摘　要：通过古典显、隐格式和 Saul'yev 非对称格式，本文构造了一种并行求解抛物型偏微分方程的一种新的 ASE-I 格式。这种新的差分格式兼具绝对稳定性和高度并行性，并且分段更加灵活，从而这种新的差分格式应用更加广泛。本文给出这种新的差分格式的数学形式，分析了稳定性并得出了稳定性定理。最后通过数值算例验证了这种新 ASE-I 格式的稳定性和精确性，数值试验结果和理论分析相符合。

关键词：抛物型方程；差分格式；并行算法

1. 引言

有限差分法是求解抛物型偏微分方程的一种有效方法，目前已有许多研究结果[1-7]。文献[1,2]介绍了求解抛物型方程的 AGE 方法，并讨论了稳定性，给出了误差分析；文献[3,4,6]发展了 AGE 方法，提出了更一般的 ASE-I 方法，该方法突破了隐式计算的难点，在兼具并行性和稳定性基础上，有更好的截断误差，而且适合在 MIMD 型计算机上应用。本文使用求解抛物型方程的古典显隐格式和 Saul'yev 非对称格式构造新的隐式段，给出了一种新的 ASE-I 方法。

考虑一维抛物型初边值问题的并行有限差分法：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 \le x \le 1, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = f_1(t), u(1,t) = f_2(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$f_1(t), f_2(t), f(x)$ 是给定的连续函数，且 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 满足相容条件。以空间步长 h 和时间步长 τ 将定界区域划分为网格，节点为 (x_i, t_k)，其中 $x_i = ih\left(i=0,1,\cdots,N; h=\dfrac{1}{N}\right)$；$t_k = t\tau\ (k=0,1,\cdots)$。点 (x_i, t_k) 简记为 (i,k)。用 $u_i^k = u(i,k)$ 表示问题(1.1)的解 $u(x,t)$ 在离散点 (i,k) 的值。

求解 u_i^{k+1} 的古典隐格式为：

$$-u_{i+1}^{k+1} + (1+2r)u_i^{k+1} - ru_{i-1}^{k+1} = u_i^k \tag{1.2}$$

求解 u_i^{k+1} 的古典显格式为：

$$u_i^{k+1} = ru_{i+1}^k + (1-2r)u_i^k + ru_{i-1}^k \tag{1.3}$$

求解 u_i^{k+1} 的一类 Saul'yev 非对称格式为：

$$(1+r)u_i^{k+1} - ru_{i+1}^{k+1} = (1-r)u_i^k + ru_{i-1}^k \tag{1.4}$$

$$(1+r)u_{i+1}^{k+1} - ru_i^{k+1} = (1-r)u_{i+1}^k + ru_{i+2}^k \tag{1.5}$$

其中网比 $r = \Delta t / \Delta x^2$。用 Fourier 方法可以证明，上述两种非对称格式都绝对稳定，证明过程参见参考文献[5]。

由泰勒公式可知古典显隐格式的截断误差都是 $o(\tau + h^2)$[5]，而单独使用 Saul'yev 非对称格式的截断误差含有 $o(\tau/h)$，因此常常把两种 Saul'yev 非对称格式交替使用，以消除截断误差的 $o(\tau/h)$，从而可以构造多种稳定的差分格式。

本文首先详细给出了这种新的隐式段的构造方法，然后用这种新的隐式段构造了新的 ASE-I 方法。然后给出了这种 ASE-I 方法的数学形式，分析了稳定性并得出了稳定性定理。最后通过数值算例验证了这种新 ASE-I 格式的稳定性和精确性，并与求解抛物型方程的 AGE 方法和精确解进行比较，仔细分析了数值试验结果。

2. 并行求解抛物型偏微分方程的一种新的 ASE-I 格式

首先利用古典显隐格式和 Saul'yev 非对称格式构造隐式段，然后给出算法设计。

设需要求解的内节点 $m-1$ 满足 $m-1 = KL$，K 为段数，L 为每段分点数，不妨设 $L \geq 4$。对某 i_0，考虑 $(i_0+i, k+1)\ (i=1,2,\cdots,L)$ 诸点上的计算。

Saul'yev 隐式段：在某个子段的两个端点 $(i_0+1, k+1)$ 和 $(i_0+L, k+1)$ 分别使用 Saul'yev 非对称格式(1.4)和(1.5)，在内点处使用古典隐式。

古典显隐式段：同样，对某个子段的两个端点 $(i_0+1, k+1)$ 和 $(i_0+L, k+1)$，分别使用古典显式，在内点处使用古典隐式。

下面给出利用这两种隐式段构造交替分段显隐式法的算法设计：在奇数时间层，将要计算的点，自左向右依次按“古典显隐式段→Saul'yev 隐式段→古典显隐式段→Saul'yev 隐式段→⋯”的规律安排计算格式。且若 $K=2n$，$(m-1, k+1)$ 使用古典显格式，每段可并行计算；在偶数时间层，每点计算格式与奇数时间层交替的进行，即：古典显格式与古典隐格式交替，两种非对称格式交替，这样在偶数时间层上的点仍可以并行计算，只是分组发生改变。

这种算法设计的数学描述的矩阵形式为：

$$(I + rG_1)U^{k+1} = (I - rG_2)U^k + B_1^k \tag{2.1}$$

$$(I + rG_2)U^{k+2} = (I - rG_1)U^{k+1} + B_2^k \tag{2.2}$$

其中

$$B_1^k = \left[ru_0^k, 0, \cdots, 0, u_m^k\right]^{\mathrm{T}},\quad B_2^k = \left[ru_0^{k+1}, 0, \cdots, 0, u_m^{k+1}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$u_i^0 = f(x_i)，\ u_0^k = f_1(\tau^k)，\ u_m^k = f_2(\tau^k)，\ i = 1,2,\cdots,m，\ K = 0,2,\cdots。$$

$$G_1 = \mathrm{diag}\left(G_L^{(1)}, G_L^{(2)}, G_L^{(1)}, \cdots, G_L^{(1)}, G_L^{(2)}, G_L^{(3)}\right)；$$

$$G_2 = \mathrm{diag}\left(G_{L+1}^{(1)}, Q_{L-2}, G_{L+2}^{(2)}, Q_{L-2}, \cdots, G_{L+2}^{(2)}, Q_{L-2}, G_{L'}^{3}\right)$$

$$G_L^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}，\ G_L^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$G_{L+1}^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{vmatrix}，\ G_{L+2}^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

当 $K = 2n$ 时：

$$G_L^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}，\ G_{L'}^{(3)} = G_{L-1}^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

当 $K = 2n+1$ 时：

$$G_L^{(3)} = G_L^{(1)}，\ G_{L'}^{(3)} = G_{L+1}^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

Q_{L-2} 为 $L-2$ 阶零矩阵。显然有：

$$G_1 + G_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

数值计算时将这种并行差分格式的奇数层与偶数层接层合并，可得转移矩阵为：

$$T = (I + rG_2)^{-1}(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}(I - rG_2)$$

为证明这种新并行差分格式的稳定性，需要引入下面 Kellogg 引理：

引理 1[7]： 设 $\sigma \ge 0$，如果 A 为非负实矩阵，即满足 $A + A^{\mathrm{T}}$ 非负定，则 $(I + \sigma A)^{-1}$ 存在，且有估计式 $\left\|(I + \sigma A)^{-1}\right\| \le 1$。

注：若 $A > 0$，$\sigma > 0$，则有 $\left\|(I + \sigma A)^{-1}\right\| < 1$。

引理 2(Kellogg 引理)[7]： 若矩阵算子 $A \ge 0$ 与 R^n 上，则对任何参数 $\sigma \ge 0$，有估计式

$$\left\|(I-\sigma A)(I+\sigma A)^{-1}\right\|\le 1$$

注 1：若 $A>0$，$\sigma>0$，则 $\left\|(I-\sigma A)(I+\sigma A)^{-1}\right\|<1$，注 2：若 $A\ge 0$，$\sigma\ge 0$，则 $\left\|(I+\sigma A)^{-1}(I-\sigma A)\right\|\le 1$，注 3：若 $A>0$，$\sigma>0$，则 $\left\|(I+\sigma A)^{-1}(I-\sigma A)\right\|<1$。

对由(2.1)，(2.2)所描述的并行差分格式，利用以上引理可得到其绝对稳定性定理。

定理：由(2.1)和(2.2)描述的并行差分格式绝对稳定。

证明：由新的差分格式算法的数学描述知，从第 k 层到第 $k+2$ 层的增长矩阵为：

$$T=(I+rG_2)^{-1}(I-rG_1)(I+rG_1)^{-1}(I-rG_2)$$

由于 $G_L^{(i)}\ge 0,\ i=1,2,3$。$G_{L+1}^{(1)}\ge 0,\ G_{L-1}^{(3)}\ge 0,\ G_{L+1}^{(3)}\ge 0,\ G_{L+2}^{(2)}\ge 0,$ 从而 $G_1\ge 0,\ G_2\ge 0,$ 令 $T_1=(I-rG_1)(I+rG_1)^{-1}$，$T_2=(I-rG_2)(I+rG_2)^{-1}$。由 Kellogg 引理 2，可得：

$$\|T\|_2\le\left\|(I+rG_2)^{-1}\right\|_2\|T_1\|_2^{\,n}\|T_2\|_2^{\,n-1}\left\|(I-rG_2)\right\|_2\le\left\|(I-rG_2)\right\|_2\le 1+4r=C$$

即：$\|T\|_2\le C, C=1+4r$。证毕。

3. 数值算例

下面考虑一维抛物型初边值问题：

$$\begin{cases}u_t=u_{xx,}\ 0\le x\le 1, t>0,\\ u(x,0)=\sin(\pi x),\\ u(0,t)=0, u(1,t)=0\end{cases} \tag{3.1}$$

的并行有限差分法，它可视为初边值问题(1.1)的模型。其精确解为

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-\pi^2 t}\sin\pi x \tag{3.2}$$

下面通过本文介绍的 ASE-I 算法和求解抛物型方程的 AGE 算法[2,8,9]求解这一问题，并与精确解作比较。

首先对求解区间 $0\le x\le 1$ 进行剖分取 $\Delta x=0.01$，则相应的分点数为 $m=100$，需要计算的内点数 $m-1=99$，取每段的分点数为 4，最后一段有 3 个分点，这样就有 25 段，网比取 $r=0.5$。则由 C 程序分别计算出各内点在 $t=0.5$ 的值及与精确解的绝对误差。使用 AGE 算法，则需要处理单点。网比同样取 $r=0.5$，则由 C 程序分别计算出各内点在 $t=0.5$ 的值及与精确解的绝对误差。将部分计算结果分别列于表 1。

Table 1. The comparison of ASE-I, AGE and exact solution when $r=0.5, \Delta x=0.01, t=0.5$

表 1. 当 $r=0.5, \Delta x=0.01, t=0.5$ 时，ASE-I 与 AGE 格式和精确解的比较

x	精确解	ASE-I	$\lvert e\rvert(10^{-7})$	AGE	$\lvert e\rvert(10^{-4})$
0.10	0.0022	0.0022	2.656	0.0022	0.0395
0.20	0.0042	0.0042	5.019	0.0042	0.0751
0.30	0.0058	0.0058	6.468	0.0058	0.1033
0.40	0.0068	0.0068	7.469	0.0068	0.1214
0.50	0.0071	0.0071	7.916	0.0072	0.1276
0.60	0.0068	0.0068	7.478	0.0068	0.1213
0.70	0.0058	0.0058	6.477	0.0058	0.1030
0.80	0.0042	0.0042	5.038	0.0042	0.0746
0.90	0.0022	0.0022	2.668	0.0022	0.0390

4. 结论

本文利用古典显隐格式和 Saul’yev 非对称格式，构造了一种新的古典显隐式段，进而构造一种新的 ASE-I 算法，并给出这种差分格式的矩阵形式，从理论证明了这种新格式的稳定性。

从表 1 的数值计算实验结果表明，可以看出使用此种 ASE-I 算法可以计算出相当精确的结果，在取四位有效数值时，数值解与精确解可达同样精度。同时与求解抛物型方程的 AGE 方法比较，就截断误差来看，有更加小的截断误差。在分段更加灵活性的基础上，能得到更小的截断误差，应用更加广泛，实验数据与理论分析相符合。

参考文献 (References)

[1] D. J. Evans, M. Sahimi. The alternating group explicit iterative method for solving parabolic equations: 2-dimensional problems. International Journal Computer Mathematics, 1988, 24: 311-341.

[2] B.-L. Zhang, W.-Z. Li. AGE methods with variable coefficient for parabolic computing. Parallel Algorithms and Applications, 1995, 5(3/4): 219-228.

[3] J. Dauglas Jr. A survey of numerical methods for parabolic differential equations. Advances in Computer, Vol.2, Cambridge: Academic Press, 1961: 1-52.

[4] D. J. Evans, A. R. B. Abdullah. A new method for the solution of parabolic differential equations. International Journal of Computer Mathematics, 1991, 38: 241-255.

[5] R. H. Li, B. Liu. The numerical solutions of partial differential equation (3rd Edition). Beijing: Higher Education Press. 2009:107-149. (In Chinese)

[6] D. J. Evans, A. R B. Aboullah. Group explicit methods for parabolic equations. International Journal of Computer Mathematics, 1983, 14(1): 73-105.

[7] L. S. Kang. H. Y. Quan. The numerical solution method of splitting operate for high-dimensional partial differential equation. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1990: 1-127.

[8] D. Wang. Operator-splitting methods and its application for solving parabolic equations. Master’s Thesis, Jilin University, 2009. (in Chinese)

[9] D. Y. Li. The Difference Scheme for the solution one-dimensional parabolic equations. Computational Mathematics, 1982, 4(1): 80-90. (in Chinese)